Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 32, 112–115, 2009.

Об асимптотике коэффициентов представления правильно меняющихся распределений

Гор П. Авагян
Государственный педагогический университет им. Х. Абовяна
gor_avakyan@yahoo.com

Аннотация

В настоящей работе рассмотрены распределения $\{p_n\}_1^\infty$ правильно меняющиеся при $n\to+\infty$, допускающие асимптотически постоянную медленно меняющуюся компоненту, лог-выпуклые вниз, определяемые последовательностью $\{\theta_n\}_1^\infty$ коэффицентов с заданным основным представлением. На основе асимптотического разложения с двумя членами распределения $\{p_n\}$ находится асимптотическое разложение для $\{\theta_n\}$ при $n\to+\infty$.

1. Введение

Распределение $\{p_n\}_1^\infty$ правильно меняется при $n\to+\infty$ с показателем $(-\rho)$, $1<\rho<+\infty$ и допускает асимптотически постоянную медленно меняющуюся компоненту (АПММК) $L\in R^+=(0,+\infty)$, если

$$p_n=\frac{L}{n^\rho}+o\left(\frac{1}{n^\rho}\right),\ n\to+\infty. \tag{1}$$

Тогда, согласно [1], при $n=1,2,\ldots$

$$p_n=p_0\cdot\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\rho}{k}-\frac{\theta_k}{k}\right)>0, \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to+\infty}\theta_n=0, \qquad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k\ge n}\frac{\theta_k}{k}=0. \tag{2}$$

В биоинформатике интерес представляют *лог-выпуклые вниз* распределения $\{p_n\}_1^\infty$, т.е. для всех n справедливы неравенства [2]

$$\frac{p_n}{p_{n+1}}>\frac{p_{n+1}}{p_{n+2}}. \tag{3}$$

Пусть заданы числа: $\rho\in(1,+\infty)$; $L\in R^+$; целое $s\ge 0$; $M_i\in R^1\setminus\{0\}$, где $R^1=(-\infty,+\infty)$, $i=1,2,\ldots,s$; $0<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_s<+\infty$. Обозначим $\vec{M}_s=(M_1,M_2,\ldots,M_s)$, $\vec{\alpha}_s=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_s)$ и рассмотрим класс $K(\rho,L;\vec{M}_s,\vec{\alpha}_s)$ распределений $\{p_n\}_1^\infty$, удовлетворяющих условиям (3) и $p_n=\frac{L}{n^\rho}+\sum_{k=1}^{s}\frac{M_k}{n^{\rho+\alpha_k}}+o\left(\frac{1}{n^{\rho+\alpha_s}}\right)$, $n\to+\infty$.

В частности, при $s=0$ получаем класс $K(\rho,L)$ распределений $\{p_n\}$, удовлетворяющих условиям (1) и (3). В [3]-[4] установлено, что при любых допустимых константах $\rho, L, s, \bar{M}_s, \bar{\alpha}_s$, определенных выше, класс

$K_0(\rho, L; \bar{M}_s, \bar{\alpha}_s) \subset K(\rho, L; \bar{M}_s, \bar{\alpha}_s)$, для которого в (5) $o(\frac{1}{n^{\rho+\alpha_s}}) \equiv 0$, $n \to +\infty$, *не пуст.*

Легко видеть, что класс $K(\rho, L; \bar{M}_s, \bar{\alpha}_s) \setminus K_0(\rho, L; \bar{M}_s, \bar{\alpha}_s)$ также *не пуст*, поскольку, в частности, ему принадлежит непустой при любых $M_{s+1} \subset R^1 \setminus \{0\}$ и $\alpha_{s+1} \subset (\alpha_s, +\infty)$ класс $K_0(\rho, L; \bar{M}_{s+1}, \bar{\alpha}_{s+1})$. v b

При $n = 2, 3, \ldots$ обозначим

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \varepsilon_n = 1 - \frac{\rho}{n} - \frac{\theta_n}{n} > 0, \qquad (4)$$

что при $n > 0$ не противоречит (2), более того, равносильно (2).

В силу (4), условие (3) равносильно условию $\varepsilon_n < \varepsilon_{n+1}$, или

$$\frac{\rho + \theta_n}{n} > \frac{\rho + \theta_{n+1}}{n+1}, \ n = 2, 3, \ldots .$$

Возникает *проблема* изучения асимптотических раложений последовательности $\{\theta_n\}$ при $n \to +\infty$, соответствующей распределению $\{p_n\}_1^\infty \in K(\rho, L; \bar{M}_s, \bar{\alpha}_s)$.

В частном случае $\{p_n\}_1^\infty \in K_0(\rho, L; M_1, 1)$ решение формулируется следующим образом.

Теорема: *Обозначим* $R = (M_1 / L)$. *Тогда*

$$\theta_n = \frac{1}{n}(R - \frac{1}{2}\rho(\rho - 1)) + \widetilde{O}(\frac{1}{n^2}), \ n \to +\infty, \qquad (5)$$

$$\{\widetilde{O}(\frac{1}{n^2})\}_1^\infty = \{\frac{\varphi_n}{n^2}\}_1^\infty, \ n \to +\infty,$$

где последовательность $\{\varphi_n\}_1^\infty$ *при* $n \to +\infty$ *сохраняет знак и*

$$\varphi_n = \varphi + o(1), \ n \to +\infty, \ \varphi \in R^1 \setminus \{0\}.$$

2. Доказательство теоремы.

Произведем выкладки при $n \to +\infty$

$$\varepsilon_n = \frac{p_n}{p_{n-1}} = (\frac{n-1}{n})^\rho \frac{1 + \frac{R}{n}}{1 + \frac{R}{n-1}} = (1 - \frac{1}{n})^\rho (1 + \frac{R}{n})(\sum_{k \ge 0} (-1)^k (\frac{R}{n-1})^k) =$$

$$= (1 - \frac{1}{n})^\rho (1 + \frac{R}{n})(\sum_{k \ge 0} (-1)^k (\frac{R}{n(1 - \frac{1}{n})})^k) = (1 - \frac{1}{n})^\rho (1 + \frac{R}{n})(\sum_{k \ge 0} (-1)^k \frac{R^k}{n^k} (\sum_{m \ge 0} \frac{1}{n^m})^k) =$$

$$= (1 - \frac{1}{n})^\rho (1 + \frac{R}{n})(1 + \sum_{k \ge 1} (-1)^k \frac{R^k}{n^k} (1 + \sum_{m \ge 1} \frac{1}{n^m})^k) =$$

$$= (1 - \frac{1}{n})^\rho (1 + \frac{R}{n})(1 + \sum_{k \ge 1} (-1)^k \frac{R^k}{n^k} (1 + \frac{k}{n} + \frac{k(k+1)}{2n^2}(1 + o(1)))) .$$

Здесь использован бином Ньютона

$$(1+\sum_{m\geq 1}\frac{1}{n^m})^k=(1+(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}(1+o(1))))^k=1+\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}+\frac{k(k-1)}{2n^2}(1+o(1))=$$
$$=1+\frac{k}{n}+\frac{k}{n^2}+\frac{k(k+1)}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}),\ n\to+\infty,$$

а в вычислениях выше принято во внимание, что

$$\sum_{m\geq 3}\frac{1}{n^m}=\frac{1}{n^3}\sum_{s\geq 0}\frac{1}{n^s}=\frac{1}{n^3}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=O(\frac{1}{n^3}),\ n\to+\infty.$$

По теореме Лейбница имеем

$$\frac{1}{n}\cdot\sum_{k\geq 2}(-1)^k\frac{R^k\cdot k}{n^k}=O(\frac{1}{n^3}),\ n\to+\infty,$$
$$\sum_{k\geq 1}(-1)^k\frac{R^k}{n^k}\{\frac{k(k+1)}{2n^2}(1+o(1))\}=O(\frac{1}{n^3}),\ n\to+\infty.$$

Используя полученные асимптотические соотношения, продолжим вычисления

$$\varepsilon_n=(1-\frac{1}{n})^\rho(1+\frac{R}{n})\{(1+\sum_{k\geq 1}(-1)^k\frac{R^k}{n^k})-\frac{R}{n^2}+$$
$$+\frac{1}{n}\sum_{k\geq 2}(-1)^k\frac{k\cdot R^k}{n^k}+\sum_{k\geq 1}(-1)^k\frac{R^k}{n^k}(\frac{k(k+1)}{2n^2}(1+o(1)))\}=$$

$$=(1-\frac{1}{n})^\rho(1+\frac{R}{n})\{\frac{1}{1+\frac{R}{n}}-\frac{R}{n^2}+O(\frac{1}{n^3})\}=(1-\frac{1}{n})^\rho\{1-\frac{R}{n^2}(1+\frac{R}{n})+O(\frac{1}{n^3})\}=$$

$$(1-\frac{1}{n})^\rho(1-\frac{R}{n^2}+O(\frac{1}{n^3}))=(1-\frac{\rho}{n}+\frac{\rho(\rho-1)}{2n^2}+O(\frac{1}{n^3}))(1-\frac{R}{n^2}+O(\frac{1}{n^3}))=$$

$$=1-\frac{\rho}{n}-\frac{1}{n^2}(R-\frac{1}{2}\rho(\rho-1))+O(\frac{1}{n^3}),\ n\to+\infty.$$

Выше применено также асимптотическое разложение (см. 1.110, с.35, [5])

$$(1+x)^q=1+qx+\frac{q(q-1)}{2!}x^2+O(x^3),\ x\to 0,\ q\in R^+.$$

Принимая во внимание (6), приходим к (8). Теорема доказана.

Литература

1. Э. А. Даниелян, Г. П. Авагян, "Об одном представлении правильно меняющихся распределений", *Математика в Высшей Школе*, т. 4, с. 17-23, 2008.
2. J. Astola, E. Danielian, "Frequency distributions in biomolecular systems and growing Networks", Tampere: TICSP Series 31, 2006.
3. G. P. Avagyan, "On dstribution's constant slowly varying component", *Proceedings of YSU*, pp. 20-23, 2006.
4. Э. А. Даниелян, Г. П. Авагян, "Об асимптотических разложениях правильно меняющихся распределений", *Доклады НАН Армении*, с. 21-31, 2009.
5. И.М., Рыжик И. С. Градштейн, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. –М.-Ленинград: ТИТТЛ, 1951.

Կանոնավոր փոփոխվող բաշխումների ներկայացման գործակիցների ասիմպտոտիկայի մասին

Գ. Ավագյան

Ամփոփում

Ներկայացված աշխատանքում դիտարկվում են $\{p_n\}_1^\infty$ կանոնավոր փոփոխվող բաշխումներ, որոնք թույլ են տալիս ասիմպտոտորեն հաստատուն դանդաղ փոփոխվող բաղադրիչ, լոգ-ուռուցիկ են դեպի ներքև և տրված են իրենց հիմնական ներկայացումը որոշող $\{\theta_n\}_1^\infty$ գործակիցների հաջորդականությամբ։ $\{p_n\}_1^\infty$-ի, երբ $n \to +\infty$ ասիմպտոտական վերլուծության հիման վրա գտնված է $\{\theta_n\}$-երի ասիմպտոտական վերլուծությունը։