Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 32, 107 – 111, 2009.

О наименьшем и наибольшем возможных числах вершин с интервальным спектром на множестве правильных реберных раскрасок дерева

Нарине Н. Давтян

Иджеванский филиал ЕГУ
narinedavtyan@mail.ru

Аннотация

Найдены наименьшие и наибольшие возможные числа вершин с интервальным спектром на множестве правильных реберных раскрасок произвольного дерева.

В работе рассматриваются конечные неориентированные связные графы без кратных ребер и петель [1]. Множество вершин графа G обозначим через $V(G)$, множество ребер – через $E(G)$. Степень вершины $x \in V(G)$ графа G обозначаем через $d_G(x)$, а максимальную из степеней вершин графа G – через $\Delta(G)$. Хроматический класс [1] графа G обозначаем через $\chi'(G)$. Через $ex_G(x)$ обозначаем эксцентриситет [1] вершины $x \in V(G)$ в графе G. Для вершин $x \in V(G)$ и $y \in V(G)$ через $\rho_G(x, y)$ обозначаем расстояние между вершинами x и y в графе G.

Для графа G и числа $i \in N$, где $1 \le i \le \Delta(G)$, положим
$V^{(i)}(G) \equiv \{x \in V(G)/\ d_G(x) = i\}$, и пусть $\gamma(G) \equiv |V^{(1)}(G)|$.

Множество ребер графа G, инцидентных вершине $x \in V(G)$, обозначим через $I_{G,e}(x)$.

Мощность произвольного конечного множества A обозначаем через $|A|$. Для произвольного непустого конечного подмножества D множества N через $l(D)$ и $L(D)$ обозначаем, соответственно, его наименьший и наибольший элемент. Непустое конечное подмножество D множества N называется интервалом, если из $l(D) \le t \le L(D)$, $t \in N$ вытекает $t \in D$. Интервал D называется $h-$интервалом, если $|D| = h$. Интервал D с $l(D) = q$, $|D| = h$ обозначаем через $Int(q, h)$.

Функция $\varphi : E(G) \to Int(1, t)$ называется правильной реберной $t-$раскраской графа G, если выполнены следующие два условия:

1) для любых смежных ребер $e_1 \in E(G)$ и $e_2 \in E(G)$ $\varphi(e_1) \ne \varphi(e_2)$;

2) для $\forall i \in Int(1, t)$ $\exists\, e \in E(G)$, такое, что $\varphi(e) = i$.

Для графа G и числа $t \in N$, где $\chi'(G) \le t \le |E(G)|$, через $\alpha(G, t)$ обозначим множество всех правильных реберных t-раскрасок графа G. Положим

$$\alpha(G) \equiv \bigcup_{t=\chi'(G)}^{|E(G)|} \alpha(G,t).$$

Для $\forall\varphi \in \alpha(G)$ и произвольного подмножества $E_0 \subseteq E(G)$ ребер графа G положим $\varphi_{E_0} \equiv \{\varphi(e)/\ e \in E_0\}$.

Если G – граф, $\varphi \in \alpha(G)$ и $x \in V(G)$, то множество $\varphi_{I_{G,e}(x)}$ обозначим через $S_G(x,\varphi)$.

Для графа G и $\forall\varphi \in \alpha(G)$ положим

$$f_G(\varphi) \equiv |\{x \in V(G)/\ S_G(x,\varphi)\ \ d_G(x)-\}|.$$

Для графа G и числа $t \in N$, $\chi'(G) \le t \le |E(G)|$, определим числа $\mu_1(G,t)$ и $\mu_2(G,t)$ следующим образом:

$$\mu_1(G,t) \equiv \min_{\varphi\in\alpha(G,t)} f_G(\varphi), \qquad \mu_2(G,t) \equiv \max_{\varphi\in\alpha(G,t)} f_G(\varphi).$$

Для графа G определим числа $\mu_{11}(G)$, $\mu_{12}(G)$, $\mu_{21}(G)$, $\mu_{22}(G)$ следующим образом:

$$\mu_{11}(G) \equiv \min_{\chi'(G)\le t\le|E(G)|} \mu_1(G,t), \qquad \mu_{12}(G) \equiv \max_{\chi'(G)\le t\le|E(G)|} \mu_1(G,t),$$

$$\mu_{21}(G) \equiv \min_{\chi'(G)\le t\le|E(G)|} \mu_2(G,t), \qquad \mu_{22}(G) \equiv \max_{\chi'(G)\le t\le|E(G)|} \mu_2(G,t).$$

Для $\forall n \in N$, $n \ge 2$ через P_n обозначаем граф, изоморфный простой цепи с n вершинами.

Не определяемые понятия и обозначения можно найти в [1, 2, 3, 4, 5].

В работе найдены точные значения чисел $\mu_{11}(G)$ и $\mu_{22}(G)$ для произвольного дерева G.

Утверждения 1: Для $\forall m \in N$ $\mu_1(K_{m,1}, |E(K_{m,1})|) = \mu_1(K_{m,1}, m) = |V(K_{m,1})| = m+1$.

Утверждения 2: Для $\forall m \in N$ $\mu_{11}(K_{m,1}) = |V(K_{m,1})| = m+1$.

Доказательство: вытекает из Утверждения 1 и равенства $\Delta(K_{m,1}) = \chi'(K_{m,1}) = |E(K_{m,1})|$.

Утверждения 3: Для любого дерева D с $|V(D)| \ge 5$ $\exists\varphi \in \alpha(D, |E(D)|)$ с

$$f_D(\varphi) = \begin{cases} \gamma(D), & |V(D)| \ge \gamma(D)+2 \\ \gamma(D)+1, & |V(D)| \le \gamma(D)+1. \end{cases}$$

Доказательство: Базис индукции Если $|V(D)| = 5$, то, очевидно, имеет место одно из следующих трех соотношений:

1. $D \cong K_{4,1}$. 2. $D \cong P_5$. 3. $D \cong G^0$, где G^0 есть граф, определяемый равенствами $V(G^0) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $E(G^0) = \{(x_1,x_2), (x_1,x_3), (x_1,x_4), (x_2,x_5)\}$. Случае1 $D \cong K_{4,1}$. Существование искомой раскраски φ вытекает из Утверждения 1.

Случае 2: $D \cong P_5$. Ясно, что $|V(D)| > \gamma(D)+2$.

Пусть $V(D) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $E(D) = \{(x_i, x_{i+1})/\ 1 \le i \le 4\}$. Определим функцию $\varphi : E(D) \to \{1,2,3,4\}$ равенствами $\varphi((x_1,x_2)) = 2$, $\varphi((x_2,x_3)) = 4$, $\varphi((x_3,x_4)) = 1$, $\varphi((x_4,x_5)) = 3$. Ясно, что $\varphi \in \alpha(D,4)$ и $f_D(\varphi) = 2 = \gamma(D)$.

Случае 3 $D \cong G^0$. Ясно, что $|V(D)| = \gamma(D) + 2$.

Определим функцию $\varphi^0 : E(D) \to \{1, 2, 3, 4\}$ равенствами $\varphi^0((x_1, x_2)) = 4$, $\varphi^0((x_1, x_3)) = 3$, $\varphi^0((x_1, x_4)) = 1$, $\varphi^0((x_2, x_5)) = 2$. Ясно, что $\varphi^0 \in \alpha(D, 4)$ и $f_D(\varphi^0) = 3 = \gamma(D)$.

Шаг индукции. Пусть $|V(D)| = k + 1$, где $k \geq 5$, и доказываемое утверждение верно для любого дерева G с $|V(G)| = k$. Покажем, что оно верно и для дерева D.

Ввиду Утверждения 1 можно считать, что для $\forall m \in N$, $m \geq 5$ $D \ncong K_{m,1}$. Следовательно, $|V(D)| \geq \gamma(D) + 2$. Выберем произвольную вершину $x \in V(D)$, удовлетворяющую равенству $d_D(x) = \Delta(D)$.

Для $i = 0, 1, \ldots, ex_D(x)$ определим подмножества $N_i(x) \subseteq V(D)$ следующим образом:

$$N_i(x) \equiv \{z \in V(D) / \ \rho_D(x, z) = i\}.$$

Ясно, что $ex_D(x) \geq 2$. Выберем произвольную вершину $y \in N_{ex_D(x)}(x)$. Ясно, что $d_D(y) = 1$. Очевидно, существует единственная вершина $z_0 \in N_{ex_D(x)-1}(x)$, которая удовлетворяет условию $(z_0, y) \in E(D)$. Пусть G' есть подграф графа D, получающийся из D удалением [1] вершины y. Ясно, что $|V(G')| = k \geq 5$.

Случае A: $d_{G'}(z_0) = 1$.

Случае A.1: $|V(G')| \leq \gamma(G') + 1$.

Легко видеть, что в рассматриваемом случае будет выполняться равенство $|V(G')| = \gamma(G') + 1$, и, следовательно, будет выполняться соотношение

$$G' \cong K_{|V(D)|-2,1}.$$

По предположению индукции, $\exists \varphi' \in \alpha(G', |E(G')|)$ с $f_{G'}(\varphi') = \gamma(G') + 1$. Легко видеть, что, не ограничивая общность рассуждения, можно считать, что $\varphi'((z_0, x)) = |E(G')| - 1 \geq 3$. Определим функцию $\varphi : E(D) \to Int(1, |E(D)|)$. Для $\forall e \in E(D)$ положим:

$$\varphi(e) = \begin{cases} |E(G')| - 1, & e = (y, z_0) \\ |E(G')| + 1, & e = (z_0, x) \\ \varphi'(e), & e \in E(D) \backslash \{(y, z_0), (z_0, x)\}. \end{cases}$$

Из построения функции φ и равенства $|E(G')| + 1 = |E(D)|$ вытекает, что $\varphi \in \alpha(D, |E(D)|)$ и $f_D(\varphi) = \gamma(D)$, что и завершает доказательство в Случае A.1, поскольку $|V(D)| \geq \gamma(D) + 2$.

Случае A.2: $|V(G')| \geq \gamma(G') + 2$.
По предположению индукции, $\exists \varphi' \in \alpha(G', |E(G')|)$ с $f_{G'}(\varphi') = \gamma(G')$.
Пусть $e' \in E(G')$ есть ребро, смежное вершине z_0 в графе G'.

Случае A.2.1: $\varphi'(e') \neq |E(G')|$.
Определим функцию $\varphi : E(D) \to Int(1, |E(D)|)$. Для $\forall e \in E(D)$ положим:

$$\varphi(e) = \begin{cases} \varphi'(e), & e \neq (y, z_0) \\ |E(G')| + 1, & e = (y, z_0). \end{cases}$$

Из построения функции φ и равенства $|E(G')| + 1 = |E(D)|$ вытекает, что $\varphi \in \alpha(D, |E(D)|)$ и $f_D(\varphi) = \gamma(D)$, что и завершает доказательство в Случае A.2.1, поскольку $|V(D)| \geq \gamma(D) + 2$.

Случае A.2.2: $\varphi'(e') = |E(G')|$.
Определим функцию $\varphi : E(D) \to Int(1, |E(D)|)$. Для $\forall e \in E(D)$ положим:

$$\varphi(e) = \begin{cases} |E(D)| - \varphi'(e), & e \neq (y, z_0) \\ |E(D)|, & e = (y, z_0). \end{cases}$$

Из построения функции φ и соотношения $|E(G')|+1 = |E(D)| \geq 5$ вытекает, что $\varphi \in \alpha(D, |E(D)|)$ и $f_D(\varphi) = \gamma(D)$, что и завершает доказательство в Случае A.2.2. поскольку $|V(D)| \geq \gamma(D) + 2$.

Случае B: $d_{G'}(z_0) \geq 2$.

Легко видеть, что при $\forall m \in N$ $G' \ncong K_{m,1}$, и, следовательно, $|V(G')| \geq \gamma(G') + 2$.

По предположению индукции, $\exists \varphi' \in \alpha(G', |E(G')|)$ с $f_{G'}(\varphi') = \gamma(G')$.

Ясно, что в рассматриваемом случае $S_{G'}(z_0, \varphi')$ не является интервалом, и, следовательно, функция $\varphi : E(D) \to Int(1, |E(D)|)$, определяемая равенством

$$\varphi(e) = \begin{cases} \varphi'(e), & e \neq (y, z_0) \\ |E(D)|, & e = (y, z_0), \end{cases}$$

удовлетворяет соотношениям $\varphi \in \alpha(D, |E(D)|)$ и $f_D(\varphi) = \gamma(G') + 1 = \gamma(D)$.

Это завершает исследование в Случае B, поскольку $|V(D)| \geq \gamma(D) + 2$. Утверждение 3 полностью доказано.

Следствия 1: Для любого дерева D с $|V(D)| \geq 5$

$$\mu_{11}(D) = \begin{cases} \gamma(D), & |V(D)| \geq \gamma(D) + 2 \\ \gamma(D) + 1, & |V(D)| \leq \gamma(D) + 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что из Следствия 1 и Утверждения 2 вытекает

Теорема 1: Для любого дерева D с $|V(D)| \geq 2$ имеет место равенство

$$\mu_{11}(D) = \begin{cases} 3, & D \cong P_4 \\ \gamma(D), & |V(D)| \geq 5 \;\; |V(D)| \geq \gamma(D) + 2 \\ |V(D)| & - \;\; . \end{cases}$$

Теорема 1 допускает эквивалентную переформулировку в следующем виде.

Утверждения 4: Для любого дерева D с $|V(D)| \geq 2$ имеет место равенство

$$\mu_{11}(D) = \begin{cases} |V(D)|, & \exists m \in N\,,\; D \cong K_{m,1} \\ 3, & D \cong P_4 \\ \gamma(D), & |V(D)| \geq 5 \;\; |V(D)| \geq \gamma(D) + 2. \end{cases}$$

Теорема 2: Для любого дерева D с $|V(D)| \geq 2$ имеет место равенство

$$\mu_{22}(D) = |V(D)|.$$

Доказательство следует из результатов [4].

Литература

[1] Ф. Харари , *Теория графов,* М., Мир, 304 с., 1973.

[2] А. С. Асратян, Р.РКамалян., "Интервальные раскраски ребер мультиграфа", *Прикладная математика, ЕГУ,* Вып. 5, с. 25-34, 1987.

[3] Р. Р. Камалян, *Интервальные реберные раскраски графов,* Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 103 с., 1990.

[4] Р. Р. Камалян, *Интервальные раскраски полных двудольных графов и деревьев,* Препринт ВЦ АН Армянской ССР, Ереван, 11 с, 1989.

[5] П. А. Петросян, *Интервально реализуемые наборы в некоторых классах графов,* Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук, ИПИА НАН РА, Ереван, 130 с., 2006.

Ծառի կողային ճիշտ ներկումների բազմության վրա միջակայքային սպեկտրով գագաթների հնարավոր նվազագույն և առավելագույն թվերի մասին

Ն. Դավթյան

Ամփոփում

Գտնված են կամյական ծառի կողային ճիշտ ներկումների բազմության վրա միջակայքային սպեկտրով գագաթների հնարավոր նվազագույն և առավելագույն թվերը: