Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 31, 158—162, 2008.

Квадратурная формула золотого сечения

С.Б. Аллахвердян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА и ЕрГУ
E-mail: souren@ipia.sci.am

Резюме

Получены формулы апрроксимирующие корни многочлена Лежандра с помощью золотого сечения (Фибоначчи). Сравнены результаты квадратурной формулы золотого сечения с известными формуйами Чебышева и Лежандра.

1. Введение

Золотое сечение (золотая пропорция) - это закон пропорциональной связи целого и составляющих его частей.
Золотое сечение (золотая пропорция) - это деление отрезка в крайнем и среднем отношении, когда целое относится к большей своей части так, как большая часть к меньшей (рис 1):

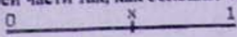


Рис. 1

Решение задачи сводится к уравнению $x^2+x-1=0$ одно из решений которого есть $\omega=(-1+\sqrt{5})/2=0.6180339\ldots$, обратная величина которого обычно обозначается как $\tau=(1+\sqrt{5})/2=1.6180339\ldots$, и называется основанием золотой пропорции.

Традиционный ряд Фибоначчи определяется следующей рекуррентной формулой [1]

$$f_0=1, \quad f_1=1,$$
$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}, \quad n\geq 2$$

И имеет вид: 1, 1, 2, 3, 5, 8, …
Числа Фибоначчи связаны с золотой пропорцией с помощью формул Бине.

$$f_n=\left(\tau^n-\tau^{-n}\right)/\sqrt{5}$$

Имеет место

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f_{n+1}}{f_n}=\tau$$

Числа Фибоначчи и золотое сечение применяются для решения ряда задач в различных областях науки и техники. Например :

1. метод золотого сечения применяется для поиска минимума функции одного переменного на отрезке. Предполоraется, что точки минимума локаизованы.
   метод обладает стабильной линейной скоростью сходимости [1].
2. Ю. Матиясевичем в 1970 г. была решена 10-я проблема Гильберта ("Задача о разрешении диофантовых уравнений") с применением чисел Фибоначчи.

3. Законы фондового рынка (движения индекса Доу-Джонса), основанные на числах Фибоначчи и "золотом сечении", были открыты Р. Элиотом [3] в 1939 году.

2. Квадратурные формулы Гаусса

Формулы численного интегрирования функций одного переменного называют *квадратурными формулами.* Задача приближенного вычисления определенного интеграла разбивается на две самостоятельные подзадачи:

1. интегрирование таблично заданной функции,
2. вычисление значения интеграла от известной функции.

Отметим, что самая ресурсоемкая операция с точки зрения вычислений, это подсчет значения функции. Желательно построить численный метод, позволяющий получать как можно более высокую точность при наименьшем количестве вычислений.

В математическом плане это означает выбор коэффициентов A_i и узлов t_i, i=1,..., n квадратурной формулы Гаусса [2]:

$$\int_{-1}^{1} f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} A_i f(t_i) \qquad (1)$$

такими, чтобы формула (1) была точна для многочленов наивысшей возможной степени N. Гаусс решил эту задачу более простым (в смысле реализации, но не решения) способом, доказав следующую теорему:

Теорема. Если в качестве узлов t_i, $i = 0,\ldots, n-1$ в квадратурной формуле (1) используются нули многочленов Лежандра, то наивысший степень равно $2n-1$.

Многочлены Лежандра определяются следующим образом:

$$P_0(t) = 1,$$
$$P_1(t) = t,$$
$$P_n(t) = \frac{2n+1}{n+1} t P_{n-1}(t) - \frac{n}{n+1} P_{n-2}(t), \;\; n \geq 2$$

Для вычисления коэффициентов A_i получаем систему линейных уравнений порядка n. для $j = 0,1,2,\ldots,n-1$, имеем

$$\sum_{i=0}^{n-1} A_i t^j = \begin{cases} \dfrac{2}{j+1}, & j \quad \textit{четный}, \\ 0 \quad , & j \quad \textit{нечетный}. \end{cases}$$

Детерминант системы не равно 0 (определитель Вандермонда).

Для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$ отрезок [a,b] преобразуется в отрезок [-1,1] путем замены переменной:

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} t.$$

Формулы Гаусса обеспечивают высокую точность уже при небольшом количестве узлов (от 4 до 10). В практических же вычислениях число узлов составляет от нескольких сотен до нескольких тысяч. Отметим также, что веса квадратур Гаусса всегда положительны, что обеспечивает устойчивость алгоритма вычисления сумм $\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_i)$ Следует понимать, что Гауссовы квадратуры эффективны только для гладких подинтегральных функций *f(x)*.

3. Квадратурная формула золотого сечения

При вычислении интегралов очень больших степеней (n>>) необходимо решать уравнение $P_n(x)=0$, а если учитывать, что коэффициенты многочлена Лежандра очень большие , то решение задачи достаточно задрудняется .

В работе приводится решение поставленной задачи без решения уравнения $P_n(x)=0$, аппроксимируя корни многочлена Лежандра с помошью золотого сечения. Отметим также, что остаточный член формулы Гаусса – Лежандра использует значение производной от интегрируемой функции порядка $2(n+1)$, что в свою очеред затрудняет оценку точности вычисленного значения. Корни многочлена Лежандра, находятся в интервале [-1, 1], все различны и симетричны относително точки 0.

Мы будем рассматривать многочлены в интервале [0, 1], тогда $x=0.5\cdot(1+t)$ и корни симетричны относительно точки x = 0,5.

Корни многочлена Лежандра обозначим через x_k, $k=0,1,...,n-1$, тогда

$x_i = 1 - x_{n-i}$, $i=0,1,...,\frac{n}{2}-1$, если n не нечетное, то $x_{n/2}=0.5$.

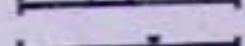
Разделим отрезок [0, 1] на n частей и находим значения золотых сечений в интервалах

$$\left(\frac{n-k-1}{n},\frac{n-k}{n}\right),\ k=1,2,...,\frac{n}{2}-1, \tag{2}$$

Приведем схему расположения решений многочлена Лежандра по данным интервалам.

 в интервале $\left(\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}\right)$ количество решений равно 3, если $n\geq 19$

 и равно 2, в противном случае,

 в остальных интервалах есть по одному решению, кроме интервала $\left(\frac{0,5\cdot n+1}{n},\frac{0,5\cdot n+2}{n}\right)$, где нет решений (это предпоследний интервал).

Используя вышеуказанное распределение решений, рассмотрим последовательность золотых сечениий в интервалах (2)

$$z_k = \frac{n-k-1}{n}+\frac{\sqrt{5}-1}{2n}=\frac{n-k-1}{n}+\frac{\omega}{n},\quad k=0,1,...\frac{n}{2}-1, \tag{3}$$

Иметт место соотношение $z_k < x_k$, которое следует из закоперемен $P_n(z_k)$ в интервалах (2) (-, +, -, +,...). Для приближения z_k к x_k исползуется следующая схема приближения по интервалам:

Из полученных значений z_k формируются следующие новые значения $\overset{\bullet}{z}_k$.

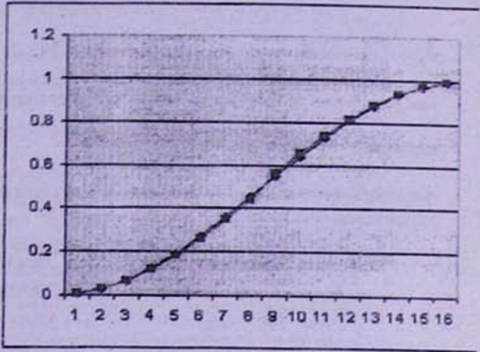
$$p=\frac{n\cdot\varpi}{8(\varpi+\tau^2)}\ \overset{\bullet}{z}_{n-k-1}=z_{n-k-1}^{p+k\cdot\varpi/6}\quad ,\overset{\bullet}{z}_k=1-z_{n-k-1}^{p+k\cdot\varpi/6}$$

$$k=0,1,...,\frac{n}{2}-2\quad ,z_{n/2-1}=\frac{n-1}{n}.$$

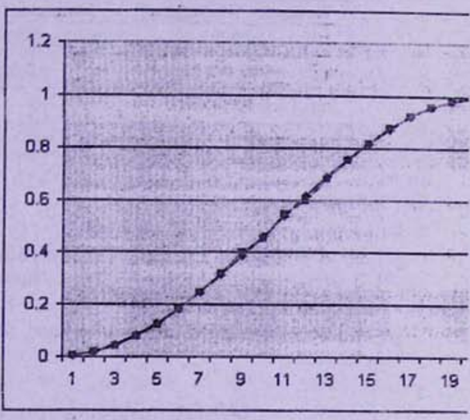
Отметим, что формула золотого сечения более хорошо апроксимирует корни многочлена Лежандра при значениях $n>10$, несмотря, что при $n\leq 10$ результаты не плохие.

Приведем значения корней многочлена Лежандра $P_n(x)=0$ и их аппроксимирующие значения по вышеуказанной формулой для n=16 , n=20 и их графики. Указаны также значения $\varepsilon(z_k)=|z_k-x_k|$, $\varepsilon(P_{16}(z_k))=|P_{16}(x_k)-P_{16}(z_k)|$.

Лежандр	Зол. Сеч.	$\varepsilon(z_k)$	$\varepsilon(P_{16}(z_k))$
0.0053	0.005688		
0.067184	0.067878		
0.122298	0.119527		
0.191062	0.18418		
0.270992	0.260524		
0.359198	0.346567		
0.452494	0.440136		
0.547506	0.559864	0.012358	0.078632
0.640802	0.653433	0.012631	0.085075
0.729008	0.739476	0.010468	0.079922
0.808938	0.81582	0.006882	0.064003
0.877702	0.880473	0.002771	0.034107
0.932816	0.932122	0.000693	0.012635
0.972286	0.970098	0.002189	0.072275
0.9947	0.994312	0.000388	0.04424



Лежандр	Зол. Сеч.	$\varepsilon(z_k)$	$\varepsilon(P_{20}(z_k))$
0.003436	0.002707		
0.018014	0.017078		
0.043883	0.042269		
0.080442	0.078372		
0.126834	0.125137		
0.181973	0.181929		
0.244566	0.247708		
0.313147	0.321027		
0.386107	0.400042		
0.461737	0.452022		
0.538263	0.547978	0.009715	0.068763
0.613893	0.599958	0.013935	0.098305
0.686853	0.678973	0.00788	0.062055
0.755434	0.752292	0.003142	0.028258
0.818027	0.818071	4.47E-05	0.000476
0.873166	0.874863	0.001697	0.022679
0.919558	0.921628	0.002069	0.037573
0.956117	0.957731	0.001614	0.045109
0.981986	0.982922	0.000936	0.050512
0.996564	0.997293	0.000729	0.147263



Значения узлов и весов квадратурной формулы золотого сечения для n = 11 и n=12:

n = 11		n = 12	
узлы z	весы w	узлы z	весы w
0.5	0.118257	0.565349	0.02695
0.633323	0.143905	0.724576	0.051329
0.769834	0.115407	0.81741	0.069429
0.861262	0.078167	0.893482	0.082577

0.933568	0.066597	0.951187	0.114255
0.985544	0.036795	0.990054	0.155458

Примеры:

Вычислить интегралы $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = 1 - \ln 2 = 0.306852819....$

$I_2 = \int_0^1 \sqrt{1+2x} dx = \frac{1}{3}(3\sqrt{3} - 1) = 1.3987174742...$. $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(x) dx = 0.5$

Так как формула Лежандра точна для многочленов степени $2n - 1$, то целесообразно вычислить

интеграл $I_4 = \int_0^1 x^9 dx = 0.1$

Интегралы вычислены с помощью квадратурных формул Чебышева, Лежандра и золотого сечения с количеством узлов 5

Чебышев	Лежандр	Золотое сечение
$I_1 = 0.3068628168722$	$I_1 = 0.30685284214696$	$I_1 = 0.30685066351078$
$I_2 = 1.398723082$	$I_2 = 1.3987175072852$	$I_2 = 1.3987162863890$
$I_3 = 0.49999999818803$	$I_3 = 0.50000000000000$	$I_3 = 0.49999999957823$
$I_4 = 0.098262236$	$I_4 = 0.1000000000000$	$I_4 = 0.10037544613416$

Точность (Чебышев)	Точность (Лежандр)	Точность (Зол. Сеч.)
$\varepsilon(I_1) = 0.00001$	$\varepsilon(I_1) = 0.00000002$	$\varepsilon(I_1) = 0.000002$
$\varepsilon(I_2) = 0.000005$	$\varepsilon(I_2) = 0.00000003$	$\varepsilon(I_2) = 0.000001$
$\varepsilon(I_3) = 0.000000002$	$\varepsilon(I_3) = 0$	$\varepsilon(I_3) = 0.000000001$
$\varepsilon(I_4) = 0.002$	$\varepsilon(I_4) = 0$	$\varepsilon(I_4) = 0.0003$

Литература

[1] Н. М. Воробьев, Числа Фибоначчи, Москва, Наука, 1992.

[2] Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. Численные методы и програмное обеспечение (пер. с англ.). М.: Мир, 2001.

[3] R. Fischer, Fibonacci Applications and, Strategies for Traders, New York: Wiley, 1993, p. 13.

"Ոսկե հատման" քառակուսային բանաձև

Ս. Ալլախվերդյան

Ամփոփում

Ստացված են բանաձևեր, որոնք մոտարկում են Լեժանդրի բազմանդամի արմատները "ոսկե հատման" (Ֆիբոնաչչիի թվերի) միջոցով։ Բերված են արդյունքի՝ "ոսկե հատման" քառակուսային բանաձևի համեմատումը Չեբիշևի և Լեժանդրի հայտնի քառակուսային բանաձևերի հետ։