Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 31, 100--107, 2008.

О контурах в направленных графах проходящих через данную вершину

Самвел Х. Дарбинян и Искандар А. Карапетян
Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА
samdarbin@ipia.sci.am, isko@ipia.sci.am

Аннотация

Пусть G есть $(2n+1)$-вершинный $(n\geq 6)$ направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими $n-1$. Доказывается, что через любую вершину такого графа проходит контур длины $2n-1$.

1. Введение и основные определения

В настоящей статье мы рассматриваем конечные ориентированные графы (орграфы) без петель и кратных дуг. Используются понятия и обозначения, принятые в книгах [1] и [2].

Через $V(G)$ обозначается множество вершин орграфа G, а через $E(G)$ – множество его дуг (иногда вместо $V(G)$ и $E(G)$ будем писать G). Дугу, исходящую из вершины x в вершину y, обозначим через xy.

Пусть $A, B \subseteq V(G)$ и $x \in V(G)$. Обозначим

$$E(A \to B) = \{yz \in E(G) / y \in A,\ z \in B\}; \quad E(A,B) = E(A \to B) \cup E(B \to A);$$

$$O(x) = \{y \in V(G) / xy \in E(G)\}; \quad I(x) = \{y \in V(G) / yx \in E(G)\};$$

$$O(x,A) = A \cap O(x); \quad I(x,A) = A \cap I(x); \; od(x,A) = |O(x,A)|; \quad id(x,A) = |I(x,A)|.$$

Число $od(x) = |O(x)|$ ($id(x) = |I(x)|$) называется полустепенью исхода (захода) вершины x, а число $d(x) = id(x) + od(x)$ называется степенью вершины x. Запись $A \to B$ означает, что если $y \in A$ и $z \in B$, то $yz \in E(G)$. Если $H \subseteq V(G)$, $A \to B$ и $B \to H$, то будем писать $A \to B \to H$. В этих обозначениях, если $A = \{u\}$ или $B = \{u\}$, где u – вершина орграфа G, то вместо $\{u\}$ пишем u. В частности, запись $E(x,y) = \varnothing$ означает, что вершины x и y не смежны. Если G – орграф, то $\overline{G}$ – орграф обратный к орграфу G, т.е. орграф $\overline{G}$ получается из G после переориентации всех дуг. Путь, состоящий из вершин $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и дуг $x_i x_{i+1}$, $1 \leq i \leq k-1$, обозначим через $x_1 x_2 \ldots x_k$, а контур, полученный из этого пути после добавления дуги $x_k x_1$ – через $x_1 x_2 \ldots x_k x_1$. Как обычно, C_k означает контур длины k, а $[m,n]$ – множество целых чисел, не больших n и не меньших m. Если $C_k = x_1 x_2 \ldots x_k x_1$, то всюду индексы вершин контура C_k берутся по $\mathrm{mod}(k)$, т.е. $x_{k+i} = x_i$, $i \geq 1$.

Орграф G с p вершинами ($p \geq 3$) называется панциклическим (соответственно, вершинно панциклическим), если он содержит контур длины k (соответственно, если любая вершина орграфа G находится на контуре длины k) для всех k, $3 \leq k \leq p$. Орграф называется направленным, если он не содержит контура длины 2.

Многие авторы (см [3 – 10]) исследовали гамильтоновость, панцикличность и вершинную панцикличность направленных графов. В частности, в [5] и в [9] доказаны следующие теоремы.

Теорема A [5]. Пусть G есть p-вершинный ($p \geq 9$) направленный граф. Если для любой вершины $x \in V(G)$ степень $d(x) \geq p-2$ и для любых различных вершин $x, y \in V(G)$ имеет место $xy \in E(G)$ или $od(x)+id(y) \geq p-3$, то G является вершинно панциклическим.

Теорема B [9]. Любой p-вершинный ($p \geq 10$) направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими, чем $(p-3)/2$, является панциклическим.

Теорема C [9]. Пусть G есть p-вершинный ($p \geq 10$) направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими $(p-1)/2-k \geq 6k-2$, где $k \geq 1$. Тогда любая вершина графа G находится на контуре любой длины $r \in [3,\ 5]$.

Учитывая теоремы **A**, **B** и **C**, в работе [10] мы поставили следующая (см. также [11]).

Гипотеза. Пусть G есть p-вершинный ($p \geq 10$) направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими $(p-3)/2$. Тогда G является вершинно панциклическим.

В работе [10] мы доказали, что если p-вершинный направленный граф G удовлетворяет условиям гипотезы, то любая вершина графа G находится на контуре любой длины k, $9 \leq k \leq p-3$.

В настоящей статье доказывается, что если $(2n+1)$-вершинный ($n \geq 6$) направленный граф G удовлетворяет условиям гипотезы, то любая вершина графа G находится на контуре длины $2n-1$.

2. Основной результат

В работе [10] доказана следующая

Лемма 1 ([10]). Пусть $C_k = x_1 x_2 \ldots x_k$ есть контур, где $k \geq 7$, в направленном графе G и $y \notin C_k$. Если вершина y не смежна не более чем двум вершинам контура C_k и $od(y, C_k) \geq 2$, $id(y, C_k) \geq 2$, то существует такое $i \in [1, k]$, что $x_i y \in G$ и $y x_{i+1} \in G$ или $y x_{i+3} \in G$.

Теперь мы докажем основной результат.

Теорема. Пусть G есть $(2n+1)$-вершинный ($n \geq 6$) направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими $n-1$. Тогда любая вершина графа G находится на контуре длины $2n-1$.

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы не верно. Тогда направленный граф G (в дальнейшем, граф G) содержит такую вершину y, которая не принадлежит контуру длины $2n-1$. Из теоремы **B** следует, что граф G содержит контур длины $2n-1$. Пусть $C_{2n-1}=x_1x_2\dots x_{2n-1}x_1$ есть контур длины $2n-1$ и вершины $y,\ z\notin V(C_{2n-1})$.

В дальнейшем вместо $E(G)$ (соответственно вместо $V(C_{2n-1})$) будем писать G (соответственно C_{2n-1}), а через C обозначим контур длины $2n-1$, который содержит вершину y. Из предположения, что вершина y не принадлежит контуру длины $2n-1$, следует, что для любого $i\in[1,\,2n-1]$ имеет место

$$|E(x_i\to y)|+|E(y\to x_{i+2})|\le 1. \tag{1}$$

Из леммы 1 следует, что существует такое $s\in[1,\,2n-1]$, что

$$x_sz,\ zx_{s+1}\in G \quad \text{или} \quad x_sz,\ zx_{s+3}\in G. \tag{2}$$

Для доказательства теоремы нам понадобятся некоторые свойства контура C_{2n-1} и вершины y, которые сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 2. $E(y,z)\ne\varnothing$, т.е. вершины y и z смежны.

Доказательство. Предположим, что вершины y и z не смежны. Тогда нетрудно убетиться , что вершина y не смежна с некоторой вершиной контура C_{2n-1} и $id(y)=od(y)=n-1$. Пусть, для определенности, вершина y не смежна с вершиной x_1. Следовательно, вершина y смежна со всеми вершинами множества $\{x_2,x_3,\dots,x_{2n-1}\}$ и $x_{2n-1}y\in G$ или $yx_{2n-1}\in G$.

Допустим, что $x_{2n-1}y\in G$. Тогда из (1) следует, что $\{x_2,x_4,\dots,x_{2n-2}\}\to y$ и $O(y)\subseteq\{x_3,x_5,\dots,x_{2n-3}\}$. Поэтому $od(y)\le n-2$, а это противоречит тому, что $od(y)=n-1$.

Теперь допустим, что $yx_{2n-1}\in G$. Тогда, с помощью (1) , получим, что

$$\{x_2,x_4,\dots,x_{2n-2}\}\to y\to\{x_3,x_5,\dots,x_{2n-1}\}. \tag{3}$$

Из (2) следует , что $x_sz,\ zx_{s+1}\in G$ или $x_sz,\ zx_{s+3}\in G$.

Пусть $x_sz,\ zx_{s+1}\in G$. Тогда, пользуясь (3), получим, что если $x_s\notin\{x_2,x_3,x_4\}$, то $C=x_szx_{s+1}\dots x_2yx_5\dots x_s$, а если $x_s\in\{x_2,x_3,x_4\}$, то $C=x_szx_{s+1}\dots x_6yx_9\dots x_s$, что невозможно.

Пусть теперь $x_sz,zx_{s+3}\in G$. Тогда, вновь ползуъясь (3), получим, что если $x_s\notin\{x_{2n-4},x_{2n-3},x_{2n-2}\}$, то $C=x_szx_{s+3}\dots x_{2n-2}yx_{2n-1}\dots x_s$, а если $x_s\in\{x_{2n-4},x_{2n-3},x_{2n-2}\}$, то $C=x_szx_{s+3}\dots x_2yx_3\dots x_s$, а это противоречит нашему предположению, что вершина y не принадлежит контуру длины $2n-1$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Если для некоторого $i\in[1,\,2n-1]$ имеет место $E(y,\{x_i,x_{i+1}\})=\varnothing$, то $\{x_{i-3},x_{i-2},x_{i-1}\}\to y\to\{x_{i+2},x_{i+3},x_{i+4}\}$.

Доказательство. Пусть, для определенности, $E(y,\{x_1,x_2\})=\varnothing$. Тогда вершина y смежна со всеми вершинами множества $\{x_3,x_4,\dots,x_{2n-1},z\}$. Для доказательства леммы 3 достаточно доказать следующие утверждение 1-3.

Утверждение 1. $yx_3\in G$ и $x_{2n-1}y\in G$.

Доказательство. Предположим, что $yx_3\notin G$. Тогда $x_3y\in G$ и с помощью (1) получим, что

$$\{x_3,x_5,\dots,x_{2n-1}\}\to y\to\{x_4,x_6,\dots,x_{2n-2},z\}. \tag{4}$$

Согласно (2), возможны следующие случаи $x_s z,\ zx_{s+1} \in G$ или $x_s z,\ zx_{s+3} \in G$.

Предположим, что $x_s z,\ zx_{s+1} \in G$. Тогда, из соотношеия (4) имеем,что если $s \notin \{3,4,5\}$, то $C = x_3 y x_6 \dots x_s z x_{s+1} \dots x_3$, а если $s \in \{3,4,5\}$, то $C = x_s z x_{s+1} \dots x_7 y x_{10} \dots x_s$, а это противоречит нашему предположению.

Теперь предположим, что $x_s z,\ zx_{s+3} \in G$. Тогда, вновь пользуясь соотношением (4), получим, что если $s \notin \{1,2,3\}$, то $C = x_3 y x_4 \dots x_s z x_{s+3} \dots x_3$, а если $s \in \{1,2,3\}$, то ,$C = x_s z x_{s+3} \dots x_7 y x_8 \dots x_s$, что невозможно. Итак доказали, что $yx_3 \in G$. Аналогичным образом можно показать, что $x_{2n-1} y \in G$ (для этого нужно рассмотреть обратный орграф $\overline{G}$). Утверждение 1 доказано.

Нетрудно убедиться, что справедливо

Утверждение 2. Если $x_s z,\ zx_{s+1} \in G$, то $s \in \{1,2,2n-1\}$.

Действительно, если $s \notin \{1,2,2n-1\}$, то, по утверждению1, имеем $x_{2n-1} y$, $yx_3 \in G$ и $C = x_{2n-1} y x_3 \dots x_s z x_{s+1} \dots x_{2n-1}$, что противоречит нашему предположению.

Утверждение 3. $E(\{x_4, x_5\} \to y) = E(y \to \{x_{2n-3}, x_{2n-2}\}) = \varnothing$.

Доказательство. Предположим, что утверждение не верно. Пусть, для определнности, $x_i y \in G$, где $i=4$ или $i=5$, и число i с этими свойствами является минимальным. Тогда с помощью (1), получим, что

$$\{x_i, x_{i+2}, \dots, x_{i+2l}\} \to y \to \{x_{i+1}, x_{i+3}\}, \tag{5}$$

где $x_{i+2l} = x_{2n-2}$ или $x_{i+2l} = x_{2n-1}$. Согласно (2) имеем, что $x_s z,\ zx_{s+1} \in G$ или $x_s z,\ zx_{s+3} \in G$.

Допустим, что $x_s z,\ zx_{s+1} \in G$. Тогд из утверждения 2 следует, что $s \in \{1, 2, 2n-1\}$. Отсюда с помощью (5), получим, что $C = x_s z x_{s+1} \dots x_i y x_{i+3} \dots x_s$, а это противоречит нашему предположению.

Теперь допустим, что $x_s z,\ zx_{s+3} \in G$. Тогда, в силу (5), имеем, если $s \notin \{i-2, i-1, i\}$, то $C = x_s z x_{s+3} \dots x_i y x_{i+1} \dots x_s$, а если $s \in \{i-2, i-1\}$, то $C = x_s z x_{s+3} \dots x_{i+2} y x_{i+3} \dots x_s$, а если $s = i$, то $C = x_i z y x_{i+3} \dots x_i$ или $C = x_i y z x_{i+3} \dots x_i$, соответственно, при $zy \in G$ и при $yz \in G$, что невозможно.

Таким образом во всех случаях получили контур длины $2n-1$, который содержит вершину y, что является противоречием. Итак, доказали, что $E(\{x_4, x_5\} \to y) = \varnothing$.

Аналогичным образом можно показать, что $E(y \to \{x_{2n-3}, x_{2n-2}\}) = \varnothing$, для этого нужно рассмотреть обратный орграф $\overline{G}$. Утверждение 3 доказано.

Из утверждений 1 и 3 непосредственно вытекает справедливость леммы 3.

Лемма 4. Для любого $i \in [1, 2n-1]$ имеет место $E(y, \{x_i, x_{i+1}\}) \neq \varnothing$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не верно и пусть для определенности $E(y, \{x_1, x_2\}) = \varnothing$. . Из леммы 3 следует, что

$$\{x_{2n-3}, x_{2n-2}, x_{2n-1}\} \to y \to \{x_3, x_4, x_5\}. \tag{6}$$

Без потери общности можно положить, что $yz \in G$ (случай $zy \in G$ легко свести к случаю $yz \in G$, перейдя от графа G к обратному орграфу $\overline{G}$). Легко заметить, что

$$E(z \to \{x_1, x_2, x_3\}) = \varnothing. \tag{7}$$

Следовательно, для любого $i \in [1, 2n-1]$ имеет место,

$$\text{если } x_i z \in G, \text{ то } zx_{i+1} \notin G. \tag{8}$$

Случай 1. $\{x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{2n-1}\} \to y \to \{x_3, x_4, ..., x_n\}$.

Тогда очевидно, что

$$E(z \to \{x_{n+4}, x_{n+5}, ..., x_{2n-1}, x_1, x_2, x_3\}) = \varnothing. \tag{9}$$

Для случая 1 покажем

Утверждение 4. Если $zx_{n+3} \in G$, то

$$E(x_2 \to \{x_4, x_5\}) = E(x_1 \to \{x_3, x_4\}) = \varnothing,$$

$$E(\{x_{2n-1}, x_{2n-2}\} \to x_2) = E(\{x_{2n-3}, x_{2n-2}\} \to x_1) = \varnothing.$$

Доказательство. Допустим, что утверждение 4 не верно. Тогда, если $i = 1$ или 2 и $j = 0$ или 1, то $C = x_i x_{i+2+j} ... x_{n+1+j} yzx_{n+3} ... x_i$, если $x_i x_{i+2+j} \in G$, где $i = 0$ или 1, то $C = x_{2n-1-i} x_{2n-i+1} ... x_{n+1} yzx_{n+3} ... x_{2n-1-i}$, а если $x_{2n-1-i} x_{2n-i+1} \in G$, где $i = 1$ или $i = 2$, то $C = x_{2n-i-1} x_{2n-i+2} ... x_{n+2} yzx_{n+3} ... x_{2n-1-i}$, что $x_{2n-i-1} x_{2n-i+2} \in G$, невозможно. Полученное противоречие доказывает утверждение 4.

Легко заметить, что $x_3 z \in G$ или $E(z, x_3) = \varnothing$

Предположим, что $x_3 z \in G$. Тогда, согласно (8), имеем $zx_4 \notin G$. Отсюда и с помощью (9) получим, что $z \to \{x_5, x_6, ..., x_{n+3}\}$. Значит, по утверждению 4, имеет место $E(x_2 \to \{x_4, x_5\}) = \varnothing$. Следовательно, $x_l x_2 \in G$, где $x_l \in \{x_4, x_5\}$, и $C = x_l x_2 x_3 zx_6 ... x_{2n-1} yx_l$, а это противоречит нашему предположению, что вершина y не принадлежит контуру длины $2n-1$.

Теперь предположим, что $E(z, x_3) = \varnothing$. Тогда из (8) и из (9) следует, что $x_4 z \notin G$, т.е. $E(z, x_4) = \varnothing$ или $zx_4 \in G$..

Предположим, что $E(z, x_4) = \varnothing$. Тогда, с помошью (9), получим, что $x_2 z \in G$ и $z \to \{x_5, x_6, ..., x_{n+3}\}$. Следовательно, по утверждению 4, имеет место $E(x_2 \to \{x_4, x_5\}) = \varnothing$ и $x_l x_2 \in G$, где $l = 4$ или $l = 5$. В результате получили контур $C = x_l x_2 zx_{4+i+1} ... x_{2n-1} yx_4 x_i$, где $i = 0$ или $i = 1$, длины $2n-1$, который содержит вершину y, а это противоречит нашему предположению.

Теперь предположим, что $zx_4 \in G$. Имеем, что $zx_5 \in G$ или $zx_6 \in G$.

Пусть $zx_{n+3} \in G$. Тогда, с помощью утверждения 4, получим, что вторая вершина, которая не смежна с вершиной x_1 (соответственно с вершиной x_2) принадлежит контуру C_{2n-1}. Следовательно, $\{x_1, x_2\} \to z$ и $x_3 x_1 \in G$ или $x_4 x_1 \in G$. Поэтому, если $x_3 x_1 \in G$, то $C = x_3 x_1 x_2 zx_4 ... x_{2n-3} yx_3$. А если $x_4 x_1 \in G$, то имеем $C = x_4 x_1 x_2 zx_5 ... x_{2n-2} yx_4$ или $C = x_4 x_1 x_2 zx_6 ... x_{2n-1} yx_4$ соответственно при $zx_5 \in G$ и при $zx_6 \in G$.

Пусть теперь $zx_{n+3} \notin G$. Тогда из (9) следует, что $z \to \{x_4, x_5, ..., x_{n+2}\}$. Поскольку $zx_{n+2}, x_{n+1}y, yz \in G$, то $x_1 x_4 \notin G$ и $x_{2n-3} x_1 \notin G$. Отсюда, так как $E(\{x_1, x_2\} \to z) \neq \varnothing$, то, при $x_4 x_1 \in G$, имеем $C = x_4 x_1 x_i zx_5 ... x_{2n-i} yx_4$, где $i = 1$ или $i = 2$. Значит $x_4 x_1 \notin G$. Имеем, что $E(x_1, \{y, x_4\}) = \varnothing$ и $x_1 x_{2n-3} \in G$. Отсюда, так как путь $x_3x_4...x_{2n-1}$ невозможно удлинить с вершиной x_1, то $x_1 \to \{x_2, x_5, ..., x_{2n-3}\}$ и $I(x_1) \subseteq \{x_{2n-1}, x_{2n-2}, x_3\}$, т.е. $id(x_1) \le 3$, а это противоречит условию $id(x_1) \ge n-1$. Случай 1 рассмотрен.

Случай 2. Для некоторого $j \in [6, 2n-5]$ имеет место $x_j y, yx_{j+1} \in G$ и j с этими свойствами является наименьшим, т.е.

$$y \to \{x_3, x_4, ..., x_{j-1}\}. \qquad (10)$$

Из (2) и из (8) следует, что $x_s z, zx_{s+3} \in G$. Если $x_s \notin \{x_{j-2}, x_{j-1}, x_j\}$, тогда $C = x_s z\, x_{s+3}...x_j y x_{j+1}...x_s$. Следовательно $x_s \in \{x_{j-2}, x_{j-1}, x_j\}$. Из $x_j y, yz \in G$ следует, что $x_s \in \{x_{j-2}, x_{j-1}\}$. Если $j \le n-1$, то из $od(y, C_{2n-1}) = n-2$ и из (10) следует, что $x_{j+2}y, yx_{j-3} \in G$. В результате имеем контур $C = x_s zx_{s+3}...x_{j-2}yx_{j+3}...x_s$ длины $2n-1$, который содержит вершину y, а это противоречит нашему предположению. Значит, $j = n$, т.е. $x_n y, yx_{n+1} \in G$. Тогда $x_s \in \{x_{n-2}, x_{n-1}\}$ и

$$\{x_n, x_{n+2}, x_{n+3}, ..., x_{2n-1}\} \to y \to \{x_3, x_4, ..., x_{n-1}, x_{n+1}\}. \qquad (11)$$

Из $x_s z \in G$ и из (8) имеем, что $zx_{s+1} \notin G$. Отсюда с помощью (11) получим

$$E(z \to \{x_{n+3}, x_{n+5}, x_{n+6}, ..., x_{2n-1}, x_1, x_2, x_3, y, x_s, x_{s+1}\} = \varnothing,$$

т.е. $od(z) \le n-2$, , а это противоречит условию $od(z) \ge n-1$. Лемма 4 доказана

Теперь продолжим доказательство теоремы.

Из леммы 2 и 4 следует, что вершина y смежна вершиной z и не смежна двум непоследовательным вершинам контура C_{2n-1}. Пусть для определенности $E(y, \{x_1, x_l\}) = \varnothing$, где $3 \le l \le 2n-2$. Имеем, что $x_{2n-1}y \in G$ или $yx_{2n-1} \in G$.

Без потери общности можно положить, что $yz \in G$ (случай $zy \in G$ легко свести к случаю $yz \in G$, перейдя от графа G к обратному орграфу $\overline{G}$). Рассмотрим отдельно случаи $x_{2n-1}y \in G$ и $yx_{2n-1} \in G$.

Случай 1. $x_{2n-1}y \in G$.

Нетрудно убедиться , что для некоторого r, где $2r = l-1$ или $2r = l-2$, имеет место $x_2 y \in G$ и

$$\{x_2, x_4, ..., x_{2r}\} \to y, \qquad (12)$$

Если $x_{l-1}y \in G$, то $x_{l+1}y \in G$ и $\{x_{l+1}, x_{l+3}, ..., x_{l+2i-1}\} \to y$, где $l + 2i - 1 = 2n-1$ или $2n-2$. Отсюда и из (12) получим, что $id(y, C_{2n-1}) \ge od(y, C_{2n-1}) + 2$, что невозможно. Следовательно $yx_{l-1} \in G$. Легко заметить, что

$$\{x_2, x_4, ..., x_{l-2}\} \to y \to \{x_3, x_5, ..., x_{l-1}\}. \qquad (13)$$

Отсюда следует, что l – четное число.

Предположим, что $x_s z, zx_{s+1} \in G$. Тогда из $x_{2n-1}y, yx_3 \in G$ и из $yz \in G$ следует, что $x_s \in \{x_{2n-1}, x_1\}$. Если $yx_5 \in G$, то $C = x_s zx_{s+1}\ x_2 yx_5 ... x_s$. Поэтому будем предполагать, что $yx_5 \notin G$. Тогда, согласно (13), $l = 4$ и $x_5 y \in G$. Отсюда нетрудно проверить, что $\{x_5, x_7, x_9\} \to y \to \{x_6, x_8\}$ и $C = x_s zx_{s+1}...x_5 yx_8...x_s$, а это невозможно.

Теперь предположим, что для всех $i \in [1, 2n-1]$ имеет место, если $x_i z \in G$, то $zx_{i+1} \notin G$. Значит, согласно (2), $x_s z, zx_{s+3} \in G$. Легко заметить, что

$x_{2n-1}y,\ x_2y \in G$, то $x_s = x_1$, т.е. $x_1z,\ zx_4 \in G$ и $x_s \in \{x_{2n-1}, x_1, x_2\}$. Тогда, так как $E(z, x_3) = \varnothing$ и $l = 4$. Отсюда нетрудно убедиться, что

$$\{x_{n+2}, x_{n+3}, \dots, x_{2n-1}\} \to y \to \{x_3, x_5, x_6, \dots, x_{n+1}\}. \tag{14}$$

Из $id(y, C_{2n-1}) = n-1$ и из $|E(x_i \to y)| + |E(z \to x_{n-1})| \le 1$ следует, что $zx_{n+4} \in G$ или $zx_{n+3} \in G$.

Пусть $zx_{n+4} \in G$. Тогда, так как $\{x_{n+2}, x_{n+3}\} \to y$, то $E(x_1 \to \{x_3, x_4\}) = \varnothing$. Значит, Если $x_3x_1 \in G$, то, с помощью (14), получим что $C = yx_3x_1zx_1 \dots x_{2n-2}y$. $E(x_1, \{y, x_3\}) = \varnothing$, $x_1x_{2n-2}, x_4x_1 \in G$ и для некоторого $i \in [4, 2n-3]$ имеет место $x_ix_1,\ x_1x_{i+1} \in G$. Поэтому контур $C = yx_3 \dots x_ix_1x_{i+1} \dots x_{2n-1}y$ длины $2n-1$ содержит вершину y, что противоречит нашему предположению.

Пусть теперь $zx_{n+4} \notin G$. Тогда $zx_{n+3} \in G$, $x_1x_4 \notin G$ и $zx_6 \in G$. Если $x_4x_1 \in G$, то $C = yx_3x_4x_1zx_6 \dots x_{2n-1}y$. Следовательно, $E(x_1, x_4) = \varnothing$. Отсюда, так как $x_{2n-2}x_1 \notin G$, то $x_1 \to \{x_{2n-2}, x_{2n-3}, \dots, x_5\}$, т.е. $id(x_1) \le 2$, а это противоречит условию $id(x_1) = n-1$.

Случай 2. $yx_{2n-1} \in G$.

Можем предполоагать, что $yx_{l-1} \in G$ (если $x_{l-1}y \in G$, то для вершины x_l имеет место рассмотренный случай 1).

Подслучай 2.1. $x_2y \in G$ и $x_{l+1}y \in G$.

Тогда из (1) получим, что

$$\{x_2, x_4, \dots, x_{l-2}, x_{l+1}, x_{l+3}, \dots, x_{2n-2}\} \to y \to \{x_3, x_5, \dots, x_{l-1}, x_{l+2}, x_{l+4}, \dots, x_{2n-1}\},$$

а это невозможно, так как $2n-1-$ нечетное число.

Подслучай 2.2. $x_2y \in G$ и $yx_{l+1} \in G$.

Из (1) следует, что $l-$четное число и

$$\{x_2, x_4, \dots, x_{l-2}\} \to y \to \{x_3, x_5, \dots, x_{l-1}\}. \tag{15}$$

Значит $2n-l-1 = |\{x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{2n-1}\}| -$ нечетное число. И $yx_{2n-1} \in G$, с помощью (1), получим, что $y \to \{x_{2n-1}, x_{2n-3}, \dots, x_{l+1}\}$. Отсюда и из (15), так как $2n-l-1-$ нечетное, вытекает, что $od(y) \ge id(y) + 2$, а это является противореием.

Подслучай 2.3. $yx_2 \in G$.

Можем предполагать, что $yx_{l+1} \in G$ (в случае $x_{l+1}y \in G$ для вершины x_l имеет место рассмотренный подслучай 2.2). Из $yx_{2n-1},\ yx_{l-1} \in G$ и из (1) следует, что

$$y \to \{x_{2n-1}, x_{2n-3}, \dots, x_{l+1}, x_{l-1}, x_{l-3}, \dots, x_2\}. \tag{16}$$

Имеем, что $l-2 = |\{x_2, x_3, \dots, x_{l-1}\}| -$четное или $2n-l-1 = |\{x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{2n-1}\}| -$четное.

Пусть для определенности $l-2-$четное. Тогда из (16) следует, что

$$od(y, \{x_2, x_3, \dots, x_{l-1}\}) \ge id(y, \{x_2, x_3, \dots, x_{l-1}\}) + 2,$$
$$od(y, \{x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{2n-1}\}) \ge id(y, \{x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{2n-1}\}),$$

т.е. $od(y, C_{2n-1}) \ge id(y, C_{2n-1}) + 2$, а это является противоречием.

Таким образом, всевозможные подслучаи случая 2 рассмотрены. Теорема доказана.

Литература

[1] Ф. Харари, Теория графов, Мир, Москва, 1973.

[2] J. Bang-Jensen and G. Gutin, Digraphs. Theory. Algorithms and Applications. Springer, 2001.

[3] B. Jackson, "Long paths and cycles in oriented graphs", J. Graph Theory, no. 5, pp. 145- 157 ,1981.

[4] Z. M. Song, "Pancyclic oriented graphs", J. Graph Theory, no. 18, pp. 461-468 , 1994.

[5] J. Bang-Jensen and Y. Guo, "A note on vertex pancyclic oriented graphs", Odense Universitet, Preprint 20 , 1997.

[6] G. Gutin, "Characterizations of vertex pancyclic and pancyclic ordinary complete multipartite digraphs", Discrete Math, v. 141, pp. 153-162, 1995.

[7] С. Х. Дарбинян, "Оценка длин контуров и путей в регулярных направленных графах", Tanulmanyok , v. 135 , pp. 131-144, 1982.

[8] С. Х. Дарбинян, К. М. Мосесян, "О панцикличности регулярных орграфов", ДАН Арм. ССР, 1978, т. LXVII, № 4, стр. 208-211, 1978.

[9] С. Х. Дарбинян, "О панцикличности направленных графов с большими полустепенями", ДАН Арм. ССР, т. LXXX, № 4, стр. 51-54, 1985 (см. также Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, № 14, стр. 55-74, 1985).

[10] С. Х. Дарбинян, И. А. Карапетян, "О вершинной панцикличности направленных графов с большими полустепенями", Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, № 29, стр. 66-84, 2007.

[11] S. Darbinyan and I. Karapetyan, "On vertex pancyclic oriented graphs, CSIT Conference, pp.154-155, Yerevan, Armenia, 2005.

Ուղղորդված գրաֆներում տրված գագաթով անցնող ցիկլերի մասին

Ս. Դարբինյան և Ի. Կարապետյան

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ եթե $2n+1$ -գագաթանի $(n \geq 6)$ ուղղուրդված G գրաֆի ցանկացած գագաթի լոկալ կիսաաստիճանները փոքր չեն $n-1$ թվից, ապա G գրաֆի յուրաքանչյուր գագաթ գտնվում է $2n-1$ երկարության կողմնորոշված ցիկլի վրա: