Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 31, 90--99, 2008.

О длинных контурах в направленных графах, проходящих через данную вершину

Самвел Х. Дарбинян и Искандар А. Карапетян
Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА
samdarbin@ipia.sci.am, isko@ipia.sci.am

Аннотация

Пусть G есть $(2n+1)$-вершинный $(n \geq 6)$ направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими $n-1$. Доказывается, что через любую вершину такого графа проходит контур длины $2n$.

1. Введение и основные определения

Мы будем рассматривать конечные ориентированные графы (орграфы) без петель и кратных дуг и будем в основном придерживаемся терминологии и обозначений, принятых в книгах $[1]$ и $[2]$ (см. также работу [13] настоящей сборника).

Мун [3] получил характеризацию вершинно панциклических турниров, показав, что турнир является панциклическим, тогда и только тогда, когда он сильно связеан. В дальнейшем, гамильтоновость, панцикличность и вешинная панциклочость направленных граюов, в частности, исследовались в работах $[4-14]$. В работе [7] доказана следующая

Теорема A ([6]). Пусть G есть p-вершинный $(p \geq 9)$ направленный граф. Если для любой вершины $x \in V(G)$ степень $d(x) \geq p-2$ и для любых различных вершин $x, y \in V(G)$ имеет место $xy \in E(G)$ или $od(x)+id(y) \geq p-3$, то G является вершинно панциклическим.

Пусть G есть p-вершинный направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими $(p-3)/2$. В работах $[11-13]$ для графа G доказаны следующие результаты .

Теорема B ([11]). Если $p \geq 10$, то G является панциклическим и любая вершина графа G находится на контуре любой длины k, $k \in [3, 5]$.

Теорема C ([12−13]). Если $p \geq 13$, то любая вершина графа G находится на контуре любой длины k, $k \in [9, p-2]$.

В настоящей статье доказывается, что если $p = 2n+1 \geq 13$, то любая вершина графа G находится на контуре длины $2n$.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $P = x_1 x_2 \dots x_m$ есть путь, $m \geq 2$, в орграфе G и $x \notin V(P)$ Если для некоторого $i \in [1, m-1]$ имеет место $x_i x, x x_{i+1} \in G$, то будем говорить, что путь $x_1 x_2 \dots x_i x x_{i+1} \dots x_m$ получается из пути P удлинением вершиной x.

Для доказательства основного результата статьи нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. Пусть $P = x_1x_2...x_m$ есть путь, $m \ge 2$, в орграфе G. Если $y \notin V(P)$, x_1y, $yx_m \in G$ и вершина y смежна со всеми вершинами пути P, то путь P можно удлинить вершиной y.

Лемма 2. Пусть $P = x_1x_2...x_m$ есть путь, $m \ge 2$, в орграфе G и пусть $Q = y_1y_2...y_r$ есть путь в орграфе $G - V(P)$. Если для всех $i \in [1, r]$ имеет место x_1y_i, $y_ix_m \in G$ и вершина y_i смежна со всеми вершинами пути P, то существует путь из вершины x_1 к вершине x_m с множеством вершин $V(P) \cup V(Q)$.

Доказательства лемм 1, 2 достаточно просты, поэтому опускаются.

3. Основной результат

Теорема 1. Пусть G есть $(2n+1)$ – вершинный $(n \ge 6)$ направленный граф с минимальными полустепенями не меньшими $n-1$. Тогда любая вершина графа G находится на контуре длины $2n$.

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы не верно. Тогда граф G содержит такую вершину y, которая не принадлежит контуру длины $2n$. Из теоремы **B** следует, что граф G содержит контур $C_{2n} = x_1x_2...x_{2n}x_1$ длины $2n$. Имеем, что вершина y не принадлежит контуру C_{2n}, т.е. граф G не содержит контур $C_{2n}(y)$. Очевидно, что для любого $i \in [1, 2n]$ имеет место

$$|E(x_i \to y)| + |E(y \to x_{i+2}| \le 1. \qquad (1)$$

Возможны следующие три случая.

Случай 1. Вершина y не смежна в точности двум вершинам контура C_{2n}. Тогда $id(y) = od(y) = n-1$.

Подслучай 1.1. $E(y, \{x_1, x_2\}) = \varnothing$ и $yx_{2n} \in G$. Тогда вершина y смежна всеми вершинами множества $\{x_3, x_4, ..., x_{2n}\}$. Из (1) следует, что

$$\{x_3, x_5, ..., x_{2n-1}\} \to y \to \{x_4, x_6, ..., x_{2n}\}. \qquad (2)$$

Отсюда, так как граф G не содержит контур $C_{2n}(y)$, то для любого $i \in [1, 2n]$ имеет место

$$x_ix_{i+2} \notin G. \qquad (3)$$

В ходе доказательства теоремы будет доказан ряд свойств в виде утверждений.

Утверждение 1. $x_4x_1 \in G$ и $x_2x_{2n-1} \in G$.

Доказательство. Предположим противное и пусть $x_4x_1 \notin G$. Тогда возможны два случая: $x_1x_4 \in G$ и $E(x_1, x_4) = \varnothing$.

Пусть $x_1x_4 \in G$. Если для некоторой вершины $x_i \in \{x_5, x_7, ..., x_{2n-1}\}$ имеет место $x_ix_3 \in G$, то, согласно (2), имеем $C_{2n}(y) = yx_{i+1}...x_{2n}x_1x_4...x_ix_3y$, что невозможно. Отсюда и из (3) следует, что

$$E(\{y, x_1, x_4, x_5, x_7, ..., x_{2n-1}\} \to x_3) = \varnothing, \qquad (4)$$

$E(x_3, x_5) = \varnothing$ и $x_{2n}x_3 \in G$. Очевидно, что $E(x_1, x_3) = \varnothing$, так как иначе имеем $x_3x_1 \in G$ и $C_{2n}(y) = x_{2n}x_3x_1x_4x_5...x_{2n-1}yx_{2n}$. Из $E(x_3, \{x_1, x_5\}) = \varnothing$ и из (4) следует, что

$x_6x_3, x_5x_7 \in G$. Следовательно, $C_{2n}(y)=x_1x_4x_7x_6x_3x_5x_8...x_{2n-1}yx_{2n}x_1$, а это противоречит нашему предположению.

Пусть теперь $E(x_1,x_4)=\varnothing$. Тогда из $E(x_1,\{y,x_4\})=\varnothing$ и из (3) следует, что $x_3x_1, x_1x_{2n-1} \in G$. Отсюда вытекает, что если для некоторого i, где $5 \le i \le 2n-1$, имеет место $x_{i-1}x_2, x_1x_i \in G$, то $C_{2n}(y)=yx_4...x_{i-1}x_2x_3x_1x_i...x_{2n-1}y$, что невозможно. Поэтому предположим, что если $x_1x_i \in G$, то $x_{i-1}x_2 \notin G$. Следовательно, так как $E(\{x_3,y,x_{2n}\}\to x_2)=\varnothing$ и $od(x_1,\{x_5,x_6,...x_{2n-1}\})\ge n-2$, то $x_{2n-1}x_2 \in G$ и, согласно (2), имеем контур $C_{2n}(y)=yx_{2n}x_1x_{2n-1}x_2...x_{2n-3}y$. Мы вновь пришли к противоречию. Откуда следует, что $x_4x_1 \in G$.

Доказательство включения $x_2x_{2n-1} \in G$ проводится точно так же, как и доказательство включения $x_4x_1 \in G$, для этого нужно рассмотреть обратный орграф $\overline{G}$. Утверждение 1 доказано.

Из утверждения 1 и из (3) следует, что

$$x_{2n}x_4 \notin G \quad \text{и} \quad id(x_2,\{x_4,x_5,...,x_{2n-2}\})\ge n-2, \tag{5}$$

действительно, если $x_{2n}x_4 \in G$, то $C_{2n}(y)=x_{2n}x_4x_1x_2x_3yx_6x_7...x_{2n}$, что является противоречием.

Утверждение 2. $E(x_1,x_3)=E(x_2,x_{2n})=\varnothing$.

Доказательство. Покажем только, что $E(x_1,x_3)=\varnothing$. Доказательство $E(x_2,x_{2n})=\varnothing$ сводится к доказательству $E(x_1,x_3)=\varnothing$, если перейти от графа G к обратному орграфу $\overline{G}$. Предположим, что $E(x_1,x_3)\ne\varnothing$. Тогда из (3) следует, что $x_3x_1 \in G$. Обозначим $A=\{x_{i+1} / x_ix_2 \in G,\ 4 \le i \le 2n-2\}$. Из (5) следует, что $|A| \ge n-2$. Легко заметить, что $E(x_1 \to A)=\varnothing$. Действительно, в противном случае, если $x_1x_{i+1} \in G$, где $x_{i+1} \in A$, то контур $C_{2n}(y)= =yx_4...x_ix_2x_3x_1x_{i+1}...x_{2n-1}y$ длины $2n$ содержит вершину y, а это противоречит нашему предположению. В результате получили, что

$$E(x_1 \to A \cup \{y,x_{2n},x_3,x_4\})=\varnothing,$$

и так как $|A \cup \{y,x_{2n},x_3,x_4\}| \ge n+2$, то имеем противоречие. Утверждение 2 доказано.

Из $E(x_1,\{y,x_3\})=E(x_2,\{y,x_{2n}\})=\varnothing$ следует, что вершины x_1 и x_2 смежны всем вершинам множества $\{x_4,x_5,...,x_{2n-1}\}$. Согласно утверждению1 и соотношения (3) имеют место $x_4x_1, x_1x_{2n-1}, x_4x_2, x_2x_{2n-1} \in G$. Значит, по лемме 1, путь $P= x_4x_5...x_{2n-1}$ можно удлинить вершиной x_1 и вершиной x_2, т.е. для некоторого $l \in [4, 2n-2]$ (соответственно $j \in [4, 2n-2]$) имеет место $x_lx_1, x_1x_{l+1} \in G$ (соответственно $x_jx_2, x_2x_{j+2} \in G$).

Утверждение 3. $E(x_3,x_{2n})=\varnothing$.

Доказательство . Предположим, что утверждение 3 не верно. Если $x_{2n}x_3 \in G$, то $C_{2n}(y)=yx_{2n}x_3x_4...x_lx_1x_{l+1}...x_{2n-1}y$. Значит, $x_3x_{2n} \in G$. Отсюда легко получим, что $E(x_{2n} \to A)=\varnothing$, поскольку, если $x_{2n}x_{i+1} \in G$, где $x_{i+1} \in A$, то контур $C_{2n}(y)=yx_4...x_ix_2x_3x_{2n}x_{i+1}...x_{2n-1}y$ длины $2n$ содержит вершину y. В результате, согласно (3) и (5), имеем $E(x_{2n} \to A \cup \{y, x_2, x_3, x_4\}) = \varnothing$, а это противоречит тому, что $od(x_{2n}) \geq n-1$. Итак, доказали, что $E(x_3, x_{2n}) = \varnothing$.

Из утверждений 2 и 3 имеем, что $E(x_{2n}, \{x_2, x_3\}) = \varnothing$. Значит, вершина x_{2n} смежна всем вершинам множества $\{x_4, x_5, ..., x_{2n-1}\}$. Отсюда и из $x_{2n}x_{2n-1}$, $x_4x_{2n} \in G$ с помощью леммы 1 получим, что путь $x_4x_5...x_{2n-1}$ можно удлинить вершиной x_{2n}. В результате имеем, что путь $x_4x_5...x_{2n-1}$ можно удлинить вершинами x_{2n}, x_1 и x_2. Поэтому, согласно лемме 2, имеем путь P из вершины x_4 к вершине x_{2n-1}, который содержит все вершины множества $\{x_4, x_5, ..., x_{2n-1}, x_{2n}, x_1, x_2\}$. Следовательно, $C_{2n}(y) = yPy$, а это противоречит нашему предположению. Итак, подслучай 1.1 рассмотрен.

Подслучай 1.2. $E(y, \{x_1, x_2\}) = \varnothing$ и $x_{2n}y \in G$. Так как $id(y) = n-1$, то с помощью (1) получим, что $yx_3 \in G$. Отсюда легко заметить, что путь $x_3x_4...x_{2n}$ невозможно удлинить ни вершиной x_1, ни вершиной x_2.

Предположим, что $\{x_{n+2}, x_{n+3}, ..., x_{2n}\} \to y \to \{x_3, x_4, ..., x_{n+1}\}$ и покажем справедливость следующих утверждений 4 и 5.

Утверждение 4. Если $2 \leq m$ и $m+3 \leq k \leq n+2$, то $x_mx_k \notin G$.

Доказательство. Предположим, что $x_mx_k \in G$. Тогда из $E(x_{k-1} \to \{y, x_{k-2}\}) = \varnothing$ следует что для некоторого $x_i \in \{x_{n+3}, x_{n+4}, ..., x_{2n}, x_1, x_2\}$ имеет место $x_{k-1}x_i \in G$. Следовательно, если $x_i \neq x_2$, то $C_{2n}(y) = yx_{m+2}...x_{k-1}x_i...x_mx_k...x_{i-1}y$, а если $x_i = x_2$, то $C_{2n}(y) = yx_{m+1}...x_{k-1}x_2...x_mx_k...x_{2n}y$, а это противоречит тому, что вершина y не находится на контуре длины $2n$.

Утверждение 5. $E(x_2 \to \{x_4, x_5, ..., x_{n+2}\}) = \varnothing$ и $E(\{x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{2n-1}\} \to x_1) = \varnothing$.

Доказательство. Предположим, что $E(\{x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{2n-1}\} \to x_1) \neq \varnothing$. Тогда из утверждения 4 следует, что $x_2x_4 \in G$ и $E(x_3 \to \{x_6, x_7, ..., x_{n+2}\}) = \varnothing$. Поэтому для некоторого $i \in [n+4,\ 2n+1]$ имеет место $x_3x_i \in G$. Следовательно, $C_{2n}(y) = yx_3x_i...x_2x_4...x_{i-2}y$, что является противоречием. Если перейти от графа G к обратному орграфу $\overline{G}$, то получим, что $E(\{x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, ..., x_{2n-1}\} \to x_1) = \varnothing$. Утверждение 5 доказано. Так как путь $x_3x_4...x_{2n}$ невозможно удлинить ни вершиной x_1, ни вершиной x_2, то из утверждения 5 следует, что

$$\{x_3, x_4, ..., x_n\} \to x_1 \to \{x_{n+2}, x_{n+3}, ..., x_{2n-1}\},\ \{x_4, x_5, ..., x_{n+1}\} \to x_2 \to \{x_{n+3}, x_{n+4}, ..., x_{2n}\}. \tag{6}$$

Вновь имеем контур $C_{2n}(y) = yx_4x_5...x_{n+1}x_2x_3x_1x_{n+2}...x_{2n-1}y$ длины $2n$, который содержит вершину y, а это противоречит нашему предположению.

Теперь предположим, что для некоторого $s \in [4,\ n+1]$ имеет место $x_sy \in G$. Пусть s с этими свойствами является наименьшим. Из $x_sy \subset G$ и из (1) следует, что $yx_{s+1} \in G$. Так как G не содержит контур $C_{2n}(y)$, то x_2x_4, x_1x_3, $x_{2n}x_2$, $x_{2n-1}x_1 \notin G$. Далее, так как путь $x_2x_4...x_{2n}$ невозможно удлинить ни вершиной x_1, ни вершиной x_2, то легко заметить, что x_3x_1, x_1x_{2n-1}, x_4x_2, $x_2x_{2n} \in G$. Отсюда нетрудно проверить, что имеет место (6) и $yx_{s-i} \in G$, где $i = 0$ или $i = 1$. Вновь имеем контур $C_{2n}(y) =$

$= yx_{5-i}...x_{n+1}x_2x_3x_1x_{n+2}...x_{2n}y$, а это противоречит нашему предположению. Итак, подслучай 1.2 рассмотрен.

Случай 2. $E(y,\{x_i,x_j\})=\varnothing$, где $l\neq 2$ и $l\neq 2n$.

Утверждение 6. $x_2y\in G$ и $yx_{2n}\in G$ ($x_{l+1}y\in G$ и $yx_{l-1}\in G$).

Доказательство. Покажем только $x_2y\in G$ (для доказательства $yx_{2n}\in G$ надо рассмотреть обратный орграф $\overline{G}$). Предположим, что $x_2y\notin G$. Тогда $yx_2\in G$ и, согласно (1), $yx_{2n}\in G$. Нетрудно убедиться, что $x_{l+1}y\in G$. Действительно, если $yx_{l+1}\in G$, то, согласно (1), имеет место $yx_{l-1}\in G$ и

$$y\to\{x_{2n},x_{2n-2},...,x_{2n-2k},x_{l-1},x_{l-3},...,x_{l-2i+1}\},$$

где $2n-2k=l+1$ или $l+2$ и $l-2i+1=3$ или 2. Отсюда $od(y)>id(y)$, что является противоречием. Аналогичным образом получим, что $x_{l-1}y\in G$. Из $x_{l-1}y\in G$ и из $yx_{2n}\in G$ с помощью (1) получим, что l – четное и

$$\{x_{l+1},x_{l+3},...,x_{2n-1}\}\to y\to\{x_{l+2},x_{l+4},...,x_{2n}\}. \qquad (7)$$

Отсюда следует, что $x_{2n}x_2\notin G$, $x_1x_3\notin G$ и $x_{2n-3}y\in G$.

Возможны следующие два случая: $x_{2n-1}x_1\notin G$ или $x_{2n-1}x_1\in G$. Предположим, что $x_{2n-1}x_1\notin G$. Тогда из $x_1x_3\notin G$ и из $E(x_1,y)=\varnothing$ следует, что $x_3x_1\in G$ или $x_1x_{2n-1}\in G$. Отсюда, так как путь $x_3x_4...x_{2n-1}$ невозможно удлинить вершиной x_1, то

$$\{x_3,x_4,...,x_n\}\to x_1\to\{x_{n+2},x_{n+3},...,x_{2n-1}\}. \qquad (8)$$

Из $E(x_{2n}\to\{y,x_2,x_{2n-1}\})=\varnothing$ следует, что для некоторого $i\in[4,n+2]$ имеет место $x_{2n}x_i\in G$. Следовательно, используя (8), нетрудно получить, что если $i\le n+1$, то $C_{2n}(y)=yx_2...x_{i-1}x_1x_{2n-1}x_{2n}x_i...x_{2n-3}y$, а если же $i=n+2$, то $C_{2n}(y)=$ $=yx_2x_3...x_nx_1x_{2n-2}x_{2n-1}x_{2n}x_{n+2}...x_{2n-3}y$, а это противоречит нашему предположению, что граф G не содержит контур $C_{2n}(y)$.

Теперь предположим, что $x_{2n-1}x_1\in G$. С помощью (7) нетрудно заметить, что $l=2n-2$ и

$$\{x_n,x_{n+1},...,x_{2n-3}\}\to y\to\{x_2,x_3,...,x_{n-1}\}. \qquad (9)$$

Так как $x_1x_3\notin G$ и путь $x_3x_4...x_{2n-1}$ невозможно удлинить с вершиной x_1, то для некоторого k, $k\ge 4$, имеет место $E(x_1,x_{k-1})=\varnothing$ и

$$x_1\to\{x_k,x_{k+1},...,x_{k+n-3}\}. \qquad (10)$$

Обозначим через $B=\{x_i\,/\,x_1x_{i+1}\in G,\ k-1\le i\le 2n-4\}$. Очевидно,что $|B|\ge n-3$. Нетрудно заметить, что $E(B\to x_{2n-1})=\varnothing$, так как иначе, если $x_ix_{2n-1}\in G$, где $x_i\in B$, то имеем $C_{2n}(y)=yx_2...x_ix_{2n-1}x_{2n}x_1x_{i+1}...x_{2n-3}y$, что невозможно. Отсюда и из $E(\{y,x_{2n},x_1,x_{2n-3}\}\to x_{2n-1})=\varnothing$ следует, что $|B|=n-3$. Значит, $x_1x_{2n-2}\in G$, т.е. $k+n-3=2n-2$, $k=n+1$. Имеем, что

$$\{x_3,x_4,...,x_{n-1}\}\to x_1 \quad \text{и} \quad \{x_2,x_3,...,x_{n-1}\}\to x_{2n-1}\ . \qquad (11)$$

Кроме того, для некоторого $i\in[4,\,2n-2]$, $i\neq n+1$ имеет место $x_{2n}x_i\in G$. Поэтому, согласно (10) и (11), если $i\in[4,\,n]$, то $C_{2n}(y)=yx_3...x_{i-1}x_1x_2x_{2n-1}\ x_{2n}x_i...x_{2n-3}y$, а если

$l \in [n+2, 2n-2]$, то $C_{2n}(y) = yx_{2n}x_l...x_{2n-1}x_1x_2...x_{l-2}y$. Мы вновь пришли к противоречию. Утверждение 6 доказано.

Из утверждения 6 и из (1) следует, что $4 \le l \le 2n-2$ и

$$\{x_2, x_4, ..., x_{l-2}, x_{l+1}, x_{l+3}, ..., x_{2n-1}\} \to y \to \{x_3, x_5, ..., x_{l-1}, x_{l+2}, x_{l+4}, ..., x_{2n}\}. \qquad (12)$$

В частности имеем, что $yx_3,\ x_{2n-1}y \in G$. Следовательно,

$$x_1x_3 \notin G,\ x_{2n-1}x_1 \notin G,\ x_{2n}x_2 \notin G,\ x_2x_4 \notin G \ \text{ и } \ od(x_1, \{x_4, x_5, ..., x_{2n-1}\}) \ge n-2. \qquad (13)$$

Утверждение 7. $x_{2n}x_3 \notin G$ и $x_{2n-1}x_2 \notin G$.

Доказательство. Доказательство $x_{2n-1}x_2 \notin G$ легко сводится к дока- зательству $x_{2n}x_3 \notin G$, если перейти от графа G к обратному орграфу $\overline{G}$. Поэтому покажем только, что $x_{2n}x_3 \notin G$. Допустим, что $x_{2n}x_3 \in G$. Очевидно, что путь $x_3x_4...x_{2n-1}$ невозможно удлинить вершиной x_1, так как в противном случае имеем контур $C_{2n}(y) = x_{2n-1}yx_{2n}x_3...x_ix_1x_{i+1}...x_{2n-1}$, где $3 \le i \le 2n-2$. Отсюда и из (13) следует, что $\{x_3, x_4, ..., x_n\} \to x_1 \to \{x_{n+2}, x_{n+3}, ..., x_{2n-1}\}$. Поэтому, если $l \ge 5$, то по (12), $yx_5 \in G$ и $C_{2n}(y) = x_{2n}x_3x_1x_2yx_5...x_{2n}$, а если $l = 4$, то $C_{2n}(y) = x_{2n}x_3x_4x_1x_2yx_6...x_{2n}$, а это противоречит нашему предположению, что граф G не содержит контур $C_{2n}(y)$. Утверждение 7 доказано.

Утверждение 8. $x_{2n-2}x_1 \notin G$ и $x_1x_4 \notin G$

Доказательство. Предположим, что $x_{2n-2}x_1 \in G$. Обозначим $B = \{x_{i+1} / x_iy \in G,\ 2 \le i \le 2n-3\}$. Нетрудно заметить, что $E(x_{2n} \to B) = \varnothing$, так как в противном случае имеем $C_{2n}(y) = yx_{2n}x_{i+1}...x_{2n-2}x_1x_2...x_iy$, где $x_{i+1} \in B$. а это противоречит тому, что граф G не содержит контур $C_{2n}(y)$. Следовательно , поскольку $|B| \ge n-2$ и $E(x_{2n} \to \{y, x_2, x_{2n-1}\}) = \varnothing$, то с помощью (12) получим, что $x_{2n} \to \ \to \{x_4, x_6, ..., x_{l-2}, x_l, x_{l+1}, ..., x_{2n-3}\}$. Поэтому для некоторого $k \in [3, 2n-4]$ имеет место $x_kx_{2n},\ x_{2n}x_{k+1} \in G$. В результате имееем контур $C_{2n}(y) = x_2yx_3...x_kx_{2n}x_{k+1}...x_{2n-2}x_1x_2$ длины $2n$, который содержит вершину y, а это противоречит нашему предположению. Следовательно, $x_{2n-2}x_1 \notin G$. Аналогичным образом можно показать, что $x_1x_4 \notin G$. Утверждение 8 доказано.

В дальнейшем предположим, что $l \le 2n-4$. Случай $l = 2n-2$ легко свести к случаю $l \le 2n-4$, перейдя от графа G к обратному орграфу $\overline{G}$. Согласно утверждению 8 возможны следующие случаи: $x_1x_{2n-2} \in G$ или $E(x_1, x_{2n-2}) = \varnothing$.

Предположим, что $x_1x_{2n-2} \in G$. Обозначим $F = \{x_{i+1} / x_ix_1 \in G,\ 3 \le i \le 2n-4\}$. Нетрудно заметить, что

$$E(x_{2n} \to F) = \varnothing. \qquad (14)$$

Действительно, в противном случае, если $x_{2n}x_{i+1} \subset G$, где $x_{i+1} \subset F$, то, согласно (12), имеем $C_{2n}(y) = yx_3...x_ix_1x_{2n-2}x_{2n-1}x_{2n}x_{i+1}...x_{2n-3}y$, а это противоречит тому ,что граф G не содержит контур $C_{2n}(y)$. Из (14) и из $E(x_{2n} \to \{y, x_{2n-1}, x_2, x_3\}) = \varnothing$ следует, что $|F| = n-3$. Следовательно,

$$x_{2n-3}x_1,\ x_{2n}x_{2n-2} \in G. \qquad (15)$$

Нетрудно убедиться, что

$$E(x_2, x_{2n-2}) = \emptyset. \qquad (16)$$

Действительно, в противном случае, если $x_{2n-2}x_2 \in G$, то $C_{2n}(y) = yx_{2n}x_1x_{2n-2}x_2 x_3 ... x_{2n-3}y$, а если $x_2x_{2n-2} \in G$, то, согласно соотношения (15), имеем $C_{2n}(y) = x_{2n-3}x_1x_2x_{2n-2}x_{2n-1}yx_3...x_{2n-3}$, а это является противоречием.

Очевидно, что если $x_ix_2 \in G$, то $x_2x_{i+1} \notin G$, где $4 \le i \le 2n-4$, так как иначе, по (15), имеем контур $C_{2n}(y) = yx_3...x_ix_2x_{i+1}...x_{2n-3}x_1x_{2n-2}x_{2n-1}y$. Следовательно, поскольку $E(x_2, x_{2n-2}) = \emptyset$ и $x_2x_4 \notin G$, то вторая вершина, которая не смежна вершиной x_2, принадлежит множеству $\{x_4, x_5, ..., x_{2n-4}\}$. Поэтому, согласно (13) и утверждению 7, имеет место $x_2 \to \{x_{2n-1}, x_{2n}\}$. Кроме того из $E(\{x_{2n-2}, x_{2n-1}, x_{2n}\} \to x_2) = \emptyset$ следует, что $id(x_2, \{x_4, x_5, ... x_{2n-3}\}) \ge n-2$. Отсюда, так как $E(x_{2n} \to \{x_2, x_3, x_{2n-1}, y\}) = \emptyset$, то для некоторого $i \in [4, 2n-3]$ имеет место $x_ix_2 \in G$ и $x_{2n}x_{i+1} \in G$. В результате имеем контур $C_{2n}(y) = yx_3...x_ix_2x_{2n}x_{i+1}...x_{2n-1}y$, что противоречит нашему предположению. Итак, случай $x_1x_{2n-2} \in G$ рассмотрен.

Теперь предположим, что $E(x_1, x_{2n-2}) = \emptyset$. Тогда вершина x_1 смежна всем вершинам множества $\{x_2, x_3, ..., x_{2n-3}\}$. Из утверждения 8 следует, что $x_4x_1 \in G$. Отсюда, если $l \ge 6$, то в обратном орграфе $\overline{G}$ имеет место рассмотренный случай $x_1x_{2n-2} \in G$. Поэтому предположим, что $l = 4$. Тогда

$$x_5y,\ yx_6,\ x_3x_1,\ x_1x_{2n-1} \in G. \qquad (17)$$

Можем предположить, что $E(x_4, x_7) = \emptyset$, так как иначе, в силу утверждения 8, имеет место $x_7x_4 \in G$, и, значит, $x_4x_7 \in \overline{G}$. Следовательно, в обратном орграфе $\overline{G}$ имеет место рассмотренный случай $x_1x_{2n-2} \in G$. Поэтому, x_4x_2, $x_6x_4 \in G$. Из утверждения 7, следует, что $x_2x_{2n-1} \in G$ или $E(x_2, x_{2n-1}) = \emptyset$.

Предположим, что $x_2x_{2n-1} \in G$. Тогда, если для некоторого i, $3 \le i \le 2n-4$, имеет место $x_ix_1 \in G$, то $x_{2n}x_{i+1} \notin G$, поскольку в противном случае имеем $C_{2n}(y) = yx_3...x_ix_1x_2x_{2n-1}x_{2n}x_{i+1}...x_{2n-3}y$. Отсюда и из $E(x_{2n} \to \{y, x_{2n-1}, x_2, x_3\}) = \emptyset$ следует, что $id(x_1, \{x_3, x_4, ..., x_{2n-4}\}) = n-3$. Значит $x_{2n-3}x_1 \in G$ и $x_{2n}x_{2n-2} \in G$. Так как $\{x_3, x_4\} \to x_1$, то $E(x_{2n} \to \{x_4, x_5\}) = \emptyset$. Отсюда и из $E(x_4, \{y, x_7\}) = \emptyset$ следует, что $x_4x_{2n} \in G$. Поэтому $C_{2n}(y) = x_{2n-3}x_1x_2x_3x_4x_{2n}x_{2n-2}x_{2n-1}yx_6...x_{2n-3}$, а это противоречит нашему предположению. Теперь предположим, что $E(x_2, x_{2n-1}) = \emptyset$. Из $E(x_1, \{y, x_{2n-2}\}) = \emptyset$ и из $x_3x_1 \in G$ следует, что путь $x_3x_4...x_{2n-2}$ можно удлинить вершиной x_1. Следовательно, путь $x_3x_4...x_{2n-2}$ невозможно удлинить вершиной x_2. Отсюда, так как $x_4x_2 \in G$, то легко заметить, что $x_2x_{2n} \in G$ и $E(x_2, x_{2n-2}) \ne \emptyset$. Нетрудно заметить, что если для некоторого $i \in [3, 2n-3]$ имеет место $x_ix_1 \in G$, то $x_{2n}x_{i+2} \notin G$ так как в случае $x_{2n}x_{i+2} \in G$ имеем контур $C_{2n}(y) = yx_3...x_ix_1x_2x_{2n}x_{i+2}...x_{2n-1}y$. Отсюда и из $E(x_{2n} \to \{y, x_2, x_3, x_{2n-1}\}) = \emptyset$ вытекает, что $x_{2n-3}x_1 \in G$. Следовательно, если $x_2x_{2n-2} \in G$, то $C_{2n}(y) = x_{2n-3}x_1x_2x_{2n-2}x_{2n-1}yx_3...x_{2n-3}$, а если $x_{2n-2}x_2 \in G$, то, согласно (17), имеем $C_{2n}(y) = x_{2n-2}x_2x_3...x_{2n-3}x_1x_{2n-1}yx_{2n-2}$. А это противоречие. Все возможные подслучаи случая 1 рассмотрены.

Случай 2. $E(y,x_1)=\varnothing$ и вершина y смежна всем вершинам множества $\{x_2,x_3,\ldots,x_{2n}\}$. Возможны следующие два случая : $yx_2\in G$ или $x_2y\in G$.

Предположим, что $yx_2\in G$. Тогда из (1) следует, что $yx_{2n}\in G$ и

$$y\to\{x_{2n},x_{2n-2},\ldots,x_2\} \quad ; \quad \{x_1,x_3,\ldots,x_{2n-1}\}\to y. \tag{18}$$

Следовательно, для любого $i\in[1,\,2n]$ имеет место

$$x_ix_{i+2}\notin G. \tag{19}$$

Отсюда, в частности, имеем, что $x_3x_1\in G$ или $x_1x_{2n-1}\in G$. Очевидно, что путь $x_3x_4\ldots x_{2n-1}$ невозможно удлинить с вершиной x_1, так как иначе для некоторого $i\in[3,\,2n-2]$ имеет место x_ix_1, $x_1x_{i+1}\in G$ и $C_{2n}(y)=yx_2x_3\ldots x_ix_1x_{i-1}\ldots x_{2n-1}y$. Поэтому $\{x_3,x_4,\ldots,x_n\}\to x_1\to\{x_{n+2},x_{n+3},\ldots,x_{2n-1}\}$. Отсюда, пользуясь (18), нетрудно заметить, что $E(x_{2n},\{x_n,x_{n+1}\})=\varnothing$. Действительно, в противном случае ,если $x_kx_{2n}\in G$, то $C_{2n}(y)=yx_2\ldots x_kx_{2n}x_1x_{k+2}\ldots x_{2n-1}y$, а если же $x_{2n}x_k\in G$, то $C_{2n}(y)=yx_2\ldots x_{k-1}x_1x_{2n-1}x_{2n}x_k\ldots x_{2n-3}y$, где $k=n$ или $k=n+1$, а это противоречит тому, что граф G не содержит контур $C_{2n}(y)$.

Из $E(x_{2n},\{x_n,x_{n+1}\})=\varnothing$ и из (19) следует, что $x_2x_{2n}\in G$ и $x_{2n}x_{2n-2}\in G$. Поэтому, так как путь $x_3x_4\ldots x_{2n-2}$ невозможно удлинить вершиной x_{2n}, то $\{x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},y,x_{2n-1}\}\to x_{2n}$. Отсюда и из $E(x_{2n},\{x_n,x_{n+1}\})=\varnothing$ получим, что $od(x_{2n})\le n-2$, а это противоречит условию $od(x_{2n})\ge n-1$.

Теперь предположим, что $x_2y\in G$. Тогда, согласно (1), имеет место

$$\{x_2,x_4,\ldots,x_{2n}\}\to y\to\{x_3,x_5,\ldots,x_{2n-1}\},$$

т.е. в обратном орграфе $\overline{G}$ имеет место рассмотренный случай $yx_2\in G$. Случай 2 рассмотрен.

Случай 3. Вершина y смежна всем вершинам контура C_{2n}.

Пусть, для, определенности $x_{2n}y\in G$. Тогда легко заметить, что

$$\{x_2,x_4,\ldots,x_{2n}\}\to y\to\{x_1,x_3,\ldots,x_{2n-1}\} \tag{20}$$

и для любого $i\in[1,\,2n]$ имеет место (19).

Утверждение 9. $x_1x_4\notin G$.

Доказательство. Предположим, что $x_1x_4\in G$. Тогда $E(x_1,x_3)=\varnothing$, так как в противном случае, по (19) и (20), имеем $x_3x_1\in G$ и $C_{2n}(y)=yx_3x_1x_4\ldots x_{2n}y$, что невозможно. Возможны два случая: $x_5x_3\in G$ или $E(x_3,x_5)=\varnothing$.

Пусть $x_5x_3\in G$. Тогда, так как путь $x_5x_6\ldots x_{2n}$ невозможно удлинить вершиной x_3, то для некоторого $k\in[7,\,n+3]$ имеет место $x_3\to\{x_k,x_{k+1},\ldots,x_{k+n-3}\}$. Следовательно, для некоторого $i\in[k,\,k+n-4]$ имеет место $x_{i-1}y\in G$ и $C_{2n}(y)=yx_3x_i\ldots x_{2n}x_1x_4\ldots x_{i-1}y$, что невозможно.

Пусть теперь $E(x_3,x_5)=\varnothing$. Тогда легко заметить, что $x_3\to\{x_6,x_7,\ldots,x_{n+3}\}$ и $C_{2n}(y)=yx_3x_7x_8\ldots x_{2n}x_1x_4\,x_5x_6y$, а это противоречит нашему предположению.

Утверждение 10. $x_2x_5\notin G$.

Доказательство. Предположим, что $x_2x_5 \in G$. Если $x_4x_3 \in G$, то, согласно (20), имеем, что $C_{2n}(y)=x_2x_5x_3x_4yx_7x_8...x_1x_2$, что невозможно. Поэтому $x_5x_3 \notin G$. Отсюда и из (19) следует, что $E(x_3,x_4)=\varnothing$. Если $x_3x_1 \in G$, то, согласно (20), $C_{2n}(y)=yx_3x_1x_2x_5...x_{2n}y$. Следовательно, $E(x_3,\{x_1,x_5\})=\varnothing$ и $x_3 \to \{x_5,x_7,...,x_{n+3}\}$ и $C_{2n}(y)=yx_3x_7x_8...x_1x_2x_5...x_6y$, что невозможно. Утверждение 10 доказано.

Из утверждений 9 и 10 следует, что для любого $i \in [1,2n]$ имеет место $x_ix_{i+3} \notin G$.

Утверждение 11. $E(x_1,x_3)\neq\varnothing$, т.е. $x_3x_1 \in G$.

Доказательство. Предположим, что $E(x_1,x_3)=\varnothing$. Тогда, так как путь $x_3x_4...x_{2n}$ невозможно удлинить вершиной x_1, то из утверждений 9 и 10 следует, что $E(x_1,x_{n+1})=\varnothing$ и

$$\{x_4,x_5,...,x_n\}\to x_1 \to \{x_{n+2},x_{n+3},...,x_{2n-1}\}. \tag{21}$$

Отсюда и из (20) имеем, что если $x_2x_{n+1} \in G$, то $C_{2n}(y)=yx_3...x_{n-1}x_1x_2x_{n+1}...x_{2n}y$, а если же $x_{n+1}x_2 \in G$, то $C_{2n}(y)=yx_7...x_{n+1}x_2x_3x_4x_5x_1x_{n+2}...x_{2n}y$, а это противоречит тому, что граф G не содержит контур $C_{2n}(y)$. В результате получили, что $E(x_{n+1},\{x_1,x_2\})=\varnothing$. Отсюда, пользуясь (19), получим, что $x_{n+3}x_{n+1} \in G$ и $E(x_{n+1},x_{2n})\neq\varnothing$. Если $x_{2n}x_{n+1} \in G$, то, согласно (19) и (21), имеем $C_{2n}(y)=$ $=yx_3...x_{n-1}x_1x_{2n-1}x_{2n}x_{n+1}...x_{2n-2}y$, что невозможно. Значит, $x_{n+1}x_{2n} \in G$ и вершина x_{n+1} смежна всем вершинам множества $\{x_{n+3},x_{n+4},...,x_{2n}\}$. Следовательно, по лемме 1, для некоторого $i \in [n+3,2n-1]$ имеет место $x_ix_{n+1}, x_{n+1}x_{i+1} \in G$ и $C_{2n}(y)=x_nx_1x_{n+2}...x_ix_{n+1}x_{i+1}...x_{2n}yx_3x_4...x_n$, а это противоречит нашему предположению. Утверждение 11 доказано.

Утверждение 12. $x_4x_2 \in G$.

Доказательство $x_4x_2 \in G$ легко сводится к доказательству $x_3x_1 \in G$, если перейти от графа G к обратному орграфу $\overline{G}$.

Из утверждений 11 и 12 следует, что для любого $i \in [1,2n]$ имеет место $x_{i+2}x_i \in G$. Отсюда, с помошью (20), легко заметить, что если $2n=3k$, то $C_{2n}(y)=yx_1x_{2n-1}x_{2n}x_{2n-2}x_{2n-4}x_{2n-3}...x_9x_7x_5x_6x_4x_2y$, если же $2n=3k+1$, то $C_{2n}(y)=$ $=yx_1x_2x_{2n}x_{2n-2}x_{2n-1}...x_8x_9x_7x_5x_6x_4y$, что противоречит нашему предположению. Поэтому предположим, что $2n=3k+2$. Тогда, так как $x_{i+2}x_i \in G$, где $i \in [1,2n]$, то с помошью (20) получим, что если $x_1x_{2n-2} \in G$, то $C_{2n}(y)=yx_1x_{2n-2}x_{2n-1}x_{2n-3}...x_6x_7x_5x_3x_4x_2y$, а если $x_4x_1 \in G$, то $C_{2n}(y)=yx_{2n-1}x_{2n-3}x_{2n-2}...x_7x_5x_6x_4x_1x_2x_{2n}y$, что невозможно. Следовательно, $x_4x_1 \notin G$ и $x_1x_{2n-2} \notin G$. Отсюда и из утверждений 11 и 12 следует, что $x_1x_5, x_2x_{2n}, x_4x_2 \in G$ и $C_{2n}(y)=yx_3x_4x_2x_{2n}x_1x_5x_6...x_{2n-2}y$. Вновь мы пришли к противоречию.

Таким образом все возможные случаи рассмотрены. Теорема 1 доказана.

В заключение отметим, что из доказанной теоремы и из теорем A, B, C непосредственно вытекает следующая

Теорема 2. Пусть G есть p-вершинный $(p \geq 13)$ направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими, чем $(p-3)/2$. Тогда любая вершина графа G находится на контуре любой длины k, $k \in [3,5] \cup [9, p]$.

Замечание. Нетрудно проверить, что если $p \geq 30$, то любая вершина такого графа G находится на контуре любой длины k, $k \in [6, 8]$.

Литература

[1] Ф. Харари, Теория графов, Мир, Москва, 1973.

[2] J. Bang-Jensen and G. Gutin, Digraphs. Theory. Algorithms and Applications. Springer, 2001.

[3] J. Moon, Topics on tournaments. N. Y., 104 p., 1968.

[4] M. Overbeck-Larish, "A theorem on pancyclic oriented graphs", J. Combin. Theory Ser. B 23, 168-173, 1977.

[5] B. Jackson, "Long paths and cycles in oriented graphs", J. Graph Theory, no. 5, pp. 145- 157, 1981.

[6] Z. M. Song, "Pancyclic oriented graphs", J. Graph Theory, no. 18, pp. 461-468, 1994. 468, 1994.

[7] J. Bang-Jensen and Y. Guo, "A note on vertex pancyclic oriented graphs", Odense Universitet,

[8] G. Gutin, "Characterizations of vertex pancyclic and pancyclic ordinary complete multipartite digraphs", Discrete Math, v. 141, pp. 153-162, 1995.

[9] С. Х. Дарбинян, "Оценка длин контуров и путей в регулярных направленных графах", Tanulmanyok , v. 135, pp. 131-144, 1982.

[10] С. Х. Дарбинян, К. М. Мосесян, "О панцикличности регулярных орграфов', ДАН Арм. ССР, 1978, т. LXVII, № 4, стр. 208-211, 1978.

[11] С. Х. Дарбинян, "О панцикличности направленных графов с большими полустепенями", ДАН Арм. ССР, т. LXXX, № 4, стр. 51-54, 1985 (см. также Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, № 14, стр. 55-74, 1985).

[12] С. Х. Дарбинян, И. А. Карапетян, "О вершинной панцикличности направленных графов с большими полустепенями", Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, № 29, стр. 66-84, 2007.

[13] С. Х. Дарбинян, И. А. Карапетян, "О контурах в направленных графах проходящих через данную вершину", Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, № 31, стр.100--107, 2008.

[14] S. Darbinyan and I. Karapetyan, "On vertex pancyclic oriented graphs, CSITConference, pp.154-155, Yerevan, Armenia, 2005.

Ուղղորդված գրաֆներում տրված գագաթով անցնող երկար ցիկլերի մասին

Ս. Դարբինյան և Ի. Կարապետյան

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ եթե $(2n+1)$-գագաթանի $(n \geq 6)$ ուղղորդված G գրաֆի ցանկացած գագաթի լոկալ կիսաաստիճանները փոքր չեն $n-1$ թվից, ապա G գրաֆի յուրաքանչյուր գագաթ գտնվում է $2n$ երկարության կողմնորոշված ցիկլի վրա: