АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
АСТРОФИЗИКА

ТОМ 16 МАЙ, 1980 ВЫПУСК 2

УДК 524.3

# МОДУЛЯЦИОННАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СПИРАЛЬНЫХ ВОЛН ПЛОТНОСТИ

В. И. КОРЧАГИН, П. И. КОРЧАГИН

Поступила 22 мая 1979

Рассмотрена модуляционная неустойчивость тугозакрученной спиральной волны плотности в дифференциально вращающейся плоской подсистеме галактики. Выведено уравнение, описывающее нелинейную динамику амплитуды спиральной волны. При типичных параметрах спиральный узор неустойчив относительно роста модуляций с характерным размером больше критического. Время развития неустойчивости меньше или порядка времени одного оборота системы.

1. *Введение.* В большинстве работ, посвященных волновой теории спиральной структуры, которая наиболее успешно объясняет комплекс имеющихся наблюдательных данных [1—5], динамика спиральных волн рассматривалась в линейном приближении*. Связано это с относительной малостью вариации возмущений в спиральных рукавах. Так, например, по данным Швейцера [6] вариация поверхностной плотности звезд в спиралях не превышает $20-30\%$. Однако хорошо известные примеры нелинейной динамики волн в жидкостях и газах показывают, что, несмотря на относительную малость возмущений, нелинейные эффекты могут оказаться существенными. Численные эксперименты Миллера [10], в которых наблюдалось нелинейное взаимодействие спиральных гармоник при малой ($\gtrsim 10\%$) амплитуде, прямо указывают на важность учета нелинейных эффектов в динамике спиральной структуры. Поэтому естественным является появление работ [11—15], посвященных исследованию нелиней-

* Нелинейные эффекты учитывались при нахождении отклика газа на гравитационное поле спиральных рукавов [7, 8] и в движении звезд вблизи резонансов (см., например, [9]).

ной динамики волн в гравитирующих средах. В частности, в работе [11] исследована модуляционная неустойчивость плоских волн в однородном твердотельно вращающемся диске, а в работах [13—15] рассматривались нелинейные стационарные решения солитонного типа.

В данной работе исследуется модуляционная неустойчивость нелинейной тугозакрученной спиральной волны в дифференциально вращающемся газовом диске. В разделе 2 выведено основное уравнение, описывающее нелинейную динамику огибающей тугозакрученной спиральной волны, которое совпадает с известным нелинейным параболическим уравнением. Исследование его на устойчивость, проведенное в разделе 3, показывает, что при параметрах спиральной структуры, принятых в моделях Лина (см., например, [5]) и Марочника и др. [16], спиральный узор оказывается неустойчивым относительно роста модуляций с достаточно большим характерным размером. Время развития неустойчивости меньше либо порядка времени одного оборота системы.

2. *Нелинейная динамика спиральных волн.* В качестве модели плоской подсистемы галактики рассмотрим однородный дифференциально вращающийся диск с постоянной дисперсией скоростей, удерживаемый в равновесии гравитационным полем более массивных подсистем. Возбуждение в такой системе тугозакрученной спиральной волны приводит к отклонению величин от равновесных значений. Представляя все величины в виде $f = f_0 + \tilde{f}$ и не предполагая малости $\tilde{f}$ по сравнению с $f_0$, получим следующую систему уравнений для отклонений от фона:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) v_r + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - 2\Omega_0 v_\varphi - \frac{v_\varphi^2}{r} = -c^2 \frac{\partial \sigma}{\partial r} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) v_\varphi + (2\Omega_0 + r\Omega_0') v_r + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r v_\varphi}{r} = -\frac{1}{r} c^2 \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}, \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \sigma + \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) v_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\sigma v_r}{r} + \sigma \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} + \frac{\sigma}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2b\sigma\delta(z). \tag{4}$$

В системе уравнений (1)—(4) все величины приведены в безразмерном виде:

$v_{r,\varphi} = \dfrac{\tilde{v}_{r,\varphi}}{\tilde{r}_L \tilde{\Omega}_0(\tilde{r}_L)}$ — радиальная и азимутальная возмущенные скорости; $t = \tilde{\Omega}_0(\tilde{r}_L)\tilde{t}$; $r = \tilde{r}/\tilde{r}_L$ — безразмерные время и радиальная координата; $c = \tilde{c}/\tilde{r}_L\tilde{\Omega}_0(\tilde{r}_L)$ — дисперсия скоростей; $\Phi = \tilde{\Phi}/[\tilde{r}_L\tilde{\Omega}_0(\tilde{r}_L)]^2$ — возмущенный потенциал; $\Omega_0 = \tilde{\Omega}_0/\tilde{\Omega}_0(\tilde{r}_L)$ — угловая скорость плоской подсистемы; $\sigma = \tilde{\sigma}/\tilde{\sigma}_0$ — поверхностная возмущенная плотность; $b = 2\pi G\tilde{\sigma}_0/\tilde{r}_L\tilde{\Omega}_0^2(\tilde{r}_L)$. Здесь $\tilde{r}_L$ — некоторый характерный масштаб, который будет конкретизирован позже. Заметим, что при типичных значениях параметров плоской подсистемы безразмерная дисперсия скоростей мала, $c \ll 1$. Это позволяет в системе уравнений (1)—(4) члены, пропорциональные квадрату дисперсии, рассматривать в линейном приближении.

Рассмотрим тугозакрученные волны, для которых $kr \gg 1$, и предположим, что амплитуда возмущений не слишком мала, $|v|^2 \gg \dfrac{c^2}{kr}$; $\dfrac{b}{(kr)^2}$. (Следует отметить, что при стандартных параметрах плоской подсистемы $c^2$; $b \ll 1$. Поэтому приведенные неравенства заведомо выполнены). Эти предположения позволяют пренебречь членами $\sim \dfrac{1}{r}$, и система динамических уравнений упрощается:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) v_r + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} - 2\Omega_0 v_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial r} + c^2 \frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) v_\varphi + (2\Omega_0 + r\Omega_0') v_r + v_r \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} = 0, \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) \sigma + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r}(\sigma v_r) = 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2b\sigma\delta(z).$$

Будем рассматривать случай слабой неоднородности, не учитывая производные равновесных величин в нелинейных членах. Выражая из уравнения (5) $v_\varphi$, подставляя в уравнение (6) и исключая возмущенную плотность, с помощью уравнения неразрывности (7) получим:

$$\hat{L}^2 v_r + \hat{L}\left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + \hat{L}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + v_r \frac{\partial}{\partial r}\left[\hat{L} v_r + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right] +$$
$$+ \varkappa^2 v_r - c^2 \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + c^2 \Omega_0' \hat{L}^{-1} \frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \varphi} = 0, \tag{8}$$

где

$$\hat{L} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega_0 \frac{\partial}{\partial \varphi}\right).$$

Для исключения возмущенного потенциала воспользуемся связью между возмущенным потенциалом и плотностью (Приложение, выражение (9П)). Тогда члены, содержащие возмущенный потенциал, могут быть представлены в виде

$$\hat{L}\frac{\partial \Phi}{\partial r} + v_r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = -ib\hat{L}\sigma - ibv_r \frac{\partial \sigma}{\partial r}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8) и исключая возмущенную плотность, с помощью уравнения неразрывности (7) получим окончательное уравнение в виде

$$\hat{L}^2 v_r + \hat{L}\left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}\right) + v_r \frac{\partial}{\partial r}\left[\hat{L} v_r + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}\right] + \varkappa^2 v_r - c^2 \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} +$$
$$+ ib\frac{\partial v_r}{\partial r} + ib\hat{L}^{-1}\left[-\frac{\partial v_r}{\partial r} + \hat{L}^{-1}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)\frac{\partial v_r}{\partial r} + \right. \tag{10}$$
$$\left. + v_r \frac{\partial}{\partial r}\hat{L}^{-1}\left(\frac{\partial v_r}{\partial r}\right)\right]\frac{\partial v_r}{\partial r} + c^2 \Omega_0' \hat{L}^{-1}\frac{\partial^2 v_r}{\partial r \partial \varphi} = 0.$$

Будем искать решение (10) в виде

$$v_r = v_0 + v_1 e^{i\psi} + v_2 e^{2i\psi} + \text{к. с.}, \tag{11}$$

где $v_{\pm i}(r, t)$ — медленно меняющиеся комплексные амплитуды, причем $|v_0| \sim |v_2| \sim |v_1|^2$, $\psi = \omega t + m\vartheta + \Phi(r)$, а $\partial\Phi/\partial r = k(r) \gg 1$, что соответствует обычным предположениям ВКБ-теории. Подставляя (11) в уравнение (10), получим после некоторых преобразований.

$$i\frac{\partial v_1}{\partial t} - iu_g \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{i}{2}\frac{\partial u_g}{\partial r}v_1 + \frac{1}{2(\omega + m\Omega_0)}\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2}\right) -$$
$$- k(v_0 v_1 + 3v_2 v_{-1}) + \frac{bk^2}{2(\omega + m\Omega_0)^2} v_2 v_{-1} + \tag{12}$$
$$+ \frac{1}{2(\omega + m\Omega_0)}\left(\frac{bk^3}{(\omega + m\Omega_0)^2} - 2k^2\right) v_1^2 v_{-1} = 0,$$

$$v_0 = \frac{2k(\omega + m\Omega_0)}{\varkappa^2} v_1 v_{-1}, \tag{13}$$

$$v_2 = \frac{1}{2bk - 3\varkappa^2} \left| 3k^2(\omega + m\Omega_0) - \frac{bk^2}{\omega + m\Omega_0} \right| v_1^2. \tag{14}$$

Здесь

$$u_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{2c^2k - b}{2(\omega + m\Omega_0)}. \tag{15}$$

Выражая в уравнении (12) амплитуды нулевой и второй гармоник с помощью (13), (14) и преобразуя вторые производные амплитуды основной гармоники $v_1$, приходим к уравнению

$$i\frac{\partial v_1}{\partial t} - iu_g\frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{i}{2}\frac{\partial u_g}{\partial r}v_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial u_g}{\partial k}\frac{\partial^2 v_1}{\partial r^2} + \alpha|v_1|^2 v_1 = 0, \tag{16}$$

где

$$\alpha = \frac{k^2}{\omega + m\Omega_0}\left\{-1 - \frac{4bk + 3\varkappa^2}{2bk - 3\varkappa^2}\frac{(\omega + m\Omega_0)^2}{\varkappa^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{3bk}{2bk - 3\varkappa^2}\left(1 + \frac{3k^2c^2 - 2bk}{6(\omega + m\Omega_0)^2}\right)\right\}. \tag{17}$$

Уравнение (16), которое описывает пространственно-временную эволюцию огибающей тугозакрученной спиральной волны плотности, является известным нелинейным параболическим уравнением, возникающим в широком круге задач нелинейной теории распространения волн [17]. Пренебрегая в уравнении (16) нелинейностью и членом со второй производной амплитуды, описывающим расплывание пакета вследствие дисперсии групповых скоростей, приходим к уравнению

$$\frac{\partial v_1^2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial r}(u_g v_1^2) = 0. \tag{18}$$

Это уравнение показывает, что в линейном приближении пакет тугозакрученных спиральных волн должен распространяться радиально с групповой скоростью — результат, хорошо известный в теории спиральных волн [18—20].

В пренебрежении неоднородностью фоновых величин уравнение (16) совпадает (с точностью до вида коэффициента $\alpha$) с нелинейным уравнением, полученным в работе [11], в которой рассматривалась динамика плоских гравитирующих волн в однородном твердотельно вращающемся диске*.

3. *Модуляционная неустойчивость.* Предположим, что в галактическом диске возбужден тугозакрученный спиральный узор, поддерживаемый в стационарном состоянии некоторым механизмом. Допустим также, что на спиральную волну с частотой $\omega$, волновым числом $k(r)$ и амплитудой $v_{10}(r)$ наложено малое возмущение $\bar{v}_1 \ll v_{10}$ с частотой $\nu$ и волновым числом $\varkappa < k$ (модуляция). Рассмотрим вначале влияние неоднородности системы на рост модуляций, пренебрегая нелинейностью и дисперсией групповых скоростей. Считая, что $\tilde{v}_1 \sim e^{i\nu t + i\varkappa r}$ и подставляя $\bar{v}_1$ в уравнение (18), получим

$$\nu = \varkappa u_g - i\frac{1}{2}\frac{\partial u_g}{\partial r}. \tag{19}$$

То есть неустойчивость амплитудных вариаций имеет место, если $\partial u_g/\partial r > 0$. Причина роста модуляций состоит в следующем: если направление распространения пакета противоположно направлению возрастания групповой скорости в неоднородной среде, то передний (по движению) край пакета будет отставать и усиливать модуляцию в максимуме, соответственно заднее крыло пакета, догоняя, также увеличивает максимум амплитуды.

Для спиральных волн плотности

$$\frac{\partial u_g}{\partial r} = \frac{c^2}{\omega + m\Omega_0}\frac{2(\omega + m\Omega_0)m\Omega_0' - 2\varkappa\varkappa'}{2c^2k - b} - \frac{2c^2k - b}{2(\omega + m\Omega_0)^2}m\Omega_0'.$$

Пренебрегая для оценок самогравитацией газа ($2c^2k \gg b$), получим:

$$\gamma \sim \frac{1}{2}\frac{\partial u_g}{\partial r} \simeq \frac{\varkappa^2 m\Omega_0' - (\omega + m\Omega_0)\varkappa\varkappa'}{2k(\omega + m\Omega_0)^2}.$$

Полагая $\omega + m\Omega_0 \sim \varkappa$ и $\varkappa' \sim \varkappa/r$, находим для времени развития неустойчивости:

$$t \sim \frac{k(\omega + m\Omega_0)}{\varkappa\varkappa'} \sim \frac{kr}{\varkappa}.$$

---

* В работе Нормана [15] также рассматривалась нелинейная теория спиральных волн в приближении тугой закрутки. Однако полученное в работе [15] уравнение для огибающей возмущения (см. формулу (64) работы [15]) не описывает в линейном приближении радиального распространения пакета с групповой скоростью. Кроме того, солитонное решение этого уравнения (формулы (65), (66)) не удовлетворяет условию периодичности по углу $\theta$.

Таким образом, время развития неустойчивости велико и составляет десятки оборотов галактики ($kr \gg 1$). Следовательно, влиянием неоднородности на рост модуляций можно пренебречь.

Рассмотрим влияние нелинейности на развитие модуляционной неустойчивости. Будем считать, что установившееся распределение амплитуды определяется уравнением

$$i\left(-u_g\frac{\partial v_{10}}{\partial r}-\frac{1}{2}\frac{\partial u_g}{\partial r}v_{10}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial u_g}{\partial k}\frac{\partial^2 v_{10}}{\partial r^2}+\alpha|v_{10}|^2 v_{10}=0. \qquad (20)$$

В уравнении (20) $v_{10}=v_0e^{i\Phi_0}$ — комплексная амплитуда. Возмутим слегка стационарную амплитуду и фазу:

$$v_1=(v_0+\tilde{v})\,e^{i\Phi_0+i\tilde{\Phi}};\qquad |\tilde{v}|\ll|v_0|;\quad |\tilde{\Phi}|\ll|\Phi_0|. \qquad (21)$$

Подставляя (21) в уравнение (16) и отделяя действительную и мнимую части в предположении $\frac{1}{\tilde{F}}\frac{\partial\tilde{F}}{\partial r}\ll\frac{1}{F_0}\frac{\partial F_0}{\partial r}$ (фоновая неоднородность мала), получим:

$$\left|\begin{aligned}&\frac{\partial\tilde{v}}{\partial t}-u_g\frac{\partial\tilde{v}}{\partial r}-\frac{1}{2}\frac{\partial u_g}{\partial k}v_0\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial r^2}=0,\\&-v_0\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial t}+u_gv_0\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial r}-\frac{1}{2}\frac{\partial u_g}{\partial k}\frac{\partial^2\tilde{v}}{\partial r^2}-3\alpha k^2v_0^2\tilde{v}=0.\end{aligned}\right. \qquad (22)$$

Представляя возмущенные величины в виде $\tilde{v},\ \tilde{\Phi}\sim e^{i\nu t+i\varkappa r}$, приходим к дисперсионному уравнению для возмущений:

$$\nu=\varkappa u_g\pm\varkappa\left|\frac{3}{2}\alpha\frac{\partial u_g}{\partial k}v_0^2+\left(\frac{1}{2}\frac{\partial v_g}{\partial k}\right)^2\varkappa^2\right|^{1/2}. \qquad (23)$$

Из уравнения (23) следует, что при $\alpha(\partial u_g/\partial k)<0$ и достаточно малых $\varkappa<\varkappa_{кр.}$, где

$$\varkappa_{кр.}=\sqrt{6}\,v_0\left|\alpha/\frac{\partial u_g}{\partial k}\right|^{1/2}, \qquad (24)$$

модуляции экспоненциально растут со временем — результат, хорошо известный в теории нелинейных волн (см., например, [21]). Волновое число модуляции, растущей с максимальным инкрементом, равно

$$\varkappa_{\max}=\frac{1}{\sqrt{2}}\varkappa_{кр.} \qquad (25)$$

Максимальный инкремент соответственно равен:

$$\gamma_{max} = \varkappa_{max} \left| \frac{3}{2} \left| \frac{\partial u_g}{\partial k} a \right| v_0^2 - \varkappa_{max}^2 \left( \frac{1}{2} \frac{\partial u_g}{\partial k} \right)^2 \right|^{1/2}. \tag{26}$$

Оценим параметры модуляционной неустойчивости для различных моделей спиральной структуры. Положим в (1)—(4) $\tilde{r}_L = 10$ кпс, $\tilde{\Omega}_0(\tilde{r}_L) = 25$ км/с·кпс и примем для параметров спиральной волны и диска значения, следующие из теории Лина и др. (см., например, [1]):

$$\Omega_p = 13.5 \frac{\text{км}}{\text{с}\cdot\text{кпс}}; \qquad \varkappa = 31.5 \frac{\text{км}}{\text{с}\cdot\text{кпс}}; \qquad \lambda = 4 \text{ кпс};$$

$$c = 22 \frac{\text{км}}{\text{с}}; \qquad \sigma = 40 \frac{M_\odot}{\text{пс}^2}; \qquad v_0 = 8 \frac{\text{км}}{\text{с}}.$$

При таких значениях параметров спиральный узор оказывается неустойчивым относительно роста модуляций с достаточно большой длиной волны $\lambda > \lambda_{кр.} = 5.5$ кпс. Длина волны модуляции, растущей с максимальным инкрементом, соответственно равна $\lambda_{max} = 8$ кпс, а характерное время развития неустойчивости, соответствующей максимальному инкременту, оказывается равным $t_{\gamma max} \approx 2 \cdot 10^8$ лет, т. е. порядка времени одного оборота системы. При значениях параметров узора, принятых в [16] (см. также [22]),

$$\Omega_p = 20 \text{ км/с}\cdot\text{кпс}, \quad \lambda = 4 \text{ кпс}; \quad \varkappa = 40 \text{ км/с}\cdot\text{кпс}, \quad c = 10 \text{ км/с}, \quad v_0 = 8 \text{ км/с}.$$

Критическая длина оказывается равной $\lambda_{кр.} = 6.5$ кпс, $\lambda_{max} = 9$ кпс, а время развития неустойчивости для возмущения с максимальным инкрементом $t_{\gamma max} \approx 3 \cdot 10^7$ лет. Таким образом, при общепринятых значениях параметров спирального узора модуляционная неустойчивость имеет место, причем ее характерное время достаточно мало — порядка или меньше времени одного оборота системы, что существенно меньше времени стягивания пакета к центральным областям галактики.

Отметим, что при $2\varkappa c > b$ отношение $a / \frac{\partial u_g}{\partial k}$ отрицательно при $k \to \infty$, и модуляционная неустойчивость для сильно коротковолновых возмущений всегда имеет место. Этот результат качественно согласуется с результатом работы [11], в которой показано, что плоская волна в бесконечно тонком, твердотельно вращающемся диске неустойчива относительно развития модуляций при больших волновых числах.

В заключение получим критерий нелинейности спиральных волн плотности, основываясь на качественной картине модуляционной неустойчивости, изложенной в [25]. Пусть для определенности $a > 0$. Тогда в областях A, A′ промодулированной волны на рис. 1 фазовая скорость больше, а в области B меньше. Это приводит к сжатию участка AB и растяжению участка BA′. Так как фазовые скорости волны в точках A и B равны соответственно $v_{\Phi A} = v_{\Phi 0} + \alpha a^2_{max}/k$, $v_{\Phi B} = v_{\Phi 0} + \alpha a^2_{min}/k$, то изменение волновых чисел за время $\Delta t$ будет:

$$k'_{AB} \approx k\left(1 + \frac{\alpha}{N} a^2 \Delta t\right),$$

$$k'_{BA'} \approx k\left(1 - \frac{\alpha}{N} a^2 \Delta t\right),$$

где $N$ — число волн, укладывающихся на участке AB ($kL_{AB} \sim N$).

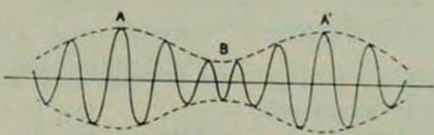


Рис. 1.

Можно считать нелинейность существенной, когда за время $\Delta t \sim L_{AB}/u_g$ изменение групповой скорости вследствие нелинейного сжатия и растяжения участков AB и BA′ порядка групповой скорости:

$$\Delta u_g \sim \frac{\partial u_g}{\partial k} \Delta k = \frac{\partial u_g}{\partial k} \frac{\alpha a^2}{u_g} \sim u_g,$$

то есть учет конечности амплитуды волн необходим при

$$a \gtrsim \frac{u_g}{\left|\dfrac{\partial u_g}{\partial k} \alpha\right|^{1/2}}. \tag{27}$$

Подставляя линоаские значения параметров узора, получим $a \gtrsim 5\%$. Качественная оценка также показывает, что уже при амплитуде узора в несколько процентов нелинейные эффекты могут оказать существенное влияние на его динамику.

*Приложение*

В приближении $kr \gg 1$ уравнение Пуассона имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 2b\sigma\delta(z). \tag{1П}$$

Следуя [11], рассмотрим диск конечной толщины 2H. Тогда

$$\frac{\partial^2\Phi_{out}}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\Phi_{out}}{\partial z^2}=0 \qquad |z|>H, \qquad (2П)$$

$$\frac{\partial^2\Phi_{in}}{\partial r^2}+\frac{\partial^2\Phi_{in}}{\partial z^2}=2b\rho \qquad |z|<H, \qquad (3П)$$

где $\rho$ — объемная плотность диска.

На границах справедливы соотношения:

$$\Phi_{in}(z=\pm H)=\Phi_{out}(z=\pm H); \quad \left.\frac{\partial\Phi_{in}}{\partial z}\right|_{z=\pm H}=\left.\frac{\partial\Phi_{out}}{\partial z}\right|_{z=\pm H},$$

$$\left.\frac{\partial\Phi_{in}}{\partial z}\right|_{z=H}-\left.\frac{\partial\Phi_{in}}{\partial z}\right|_{z=-H}=2b\sigma. \qquad (4П)$$

Определим связь между возмущенным потенциалом и возмущенной плотностью, если последняя имеет вид

$$\sigma=\bar\sigma_0+\bar\sigma_1 e^{i\psi}+\bar\sigma_2 e^{2i\psi},$$

причем $\partial\psi/\partial r=k(r)$; $\partial^2\psi/\partial r^2=k'(r)$, т. е. в отличие от [11] будем учитывать медленную зависимость волнового числа от координаты $r$. В силу линейности уравнения Пуассона будем искать решение для каждой из гармоник в отдельности. Для нулевой гармоники

$$\frac{\partial^2\bar\Phi^0}{\partial z^2}=2b\bar\sigma_0\delta(z). \qquad (5П)$$

Это уравнение определяет потенциал простого слоя с плотностью $\bar\sigma_0$. Поэтому $\bar\Phi^0\to 0$ при $|z|\to 0$.

Для нахождения потенциала, определяемого вторым слагаемым, выделим медленно зависящую от $r$ амплитуду:

$$\Phi_{out}=\Phi_{out}(r,z)\,e^{i\psi}.$$

Подставляя в уравнение (2П), получим для амплитуды:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}-k^2\right)\Phi_{out}^{(n)}+2ik\frac{\partial\Phi_{out}^{(n-1)}}{\partial r}+\left(\frac{\partial^2\Phi_{out}^{(n-2)}}{\partial r^2}+ik'\Phi_{out}^{(n-2)}\right)=0. \qquad (6П)$$

В (6П) $k'$ мало, так что поправки за счет $k'$ учитываются только в третьем порядке. Решая (6П) методом последовательных приближений и учитывая граничные условия (4П), получаем:

$$\Phi_{in}^{(1)}=\left(-\frac{b\bar\sigma_1}{k}-i\frac{b}{k^2}\frac{\partial\bar\sigma_1}{\partial r}+i\frac{bk'}{k^3}\bar\sigma_1+\frac{b}{k^3}\frac{\partial^2\bar\sigma_1}{\partial r^2}\right)e^{i\psi}. \qquad (7П)$$

Из (7П) следует:

$$\frac{\partial \Phi_{in}^{(1)}}{\partial r} = -ib\bar{\sigma}_1 e^{i\psi}.$$

Аналогично получим:

$$\frac{\partial \Phi_{in}^{(2)}}{\partial r} = -ib\bar{\sigma}_2 e^{2i\psi}.$$

Поэтому можно записать:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -ib(\bar{\sigma}_1 e^{i\psi} + \bar{\sigma}_2 e^{2i\psi}). \tag{8П}$$

Учитывая, что $\bar{\sigma}_0$ — медленно изменяющаяся величина второго порядка малости, можно записать:

$$\hat{L}\frac{\partial \Phi}{\partial r} = -ib\hat{L}\bar{\sigma}; \qquad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = -ib\frac{\partial \sigma}{\partial r}, \tag{9П}$$

откуда приходим к (9).

Ростовский государственный
университет

## THE MODULATION INSTABILITY OF SPIRAL DENSITY WAVES

V. I. KORCHAGIN, P. I. KORCHAGIN

The modulation instability of tightly wrapped spiral density waves in a differentially rotating flat subsystem of galaxy is considered. The nonlinear equation determing the evolution of the amplitude of spiral density waves is obtained. For the typical parameters of spiral pattern instability occurs if the space scale of modulation is larger than the critical one. The time scale of instability is less or equal to the time of one revolution of the system.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *R. Wielen*, P. A. S. P., 86, 341, 1974.
2. *Л. С. Марочник, А. А. Сучков*, УФН, 112, 275, 1974.
3. *A. Toomre*, Ann. Rev. Astron. Astrophys., 15, 437, 1977.
4. *K. Rohlfs*, Mitt., Astron. Ges., No. 43, 48, 1978.

5. *C. C. Lin*, Astron. Papers Dedicated to Bengt Strömgren, Publ. Copenhagen Univ. Obs., 1978, p. 369.
6. *F. Schweizer*, Ap. J., Suppl. ser., 31, 313, 1976.
7. *M. Fujimoto*, Proc. IAU Symp. 29, 453, 1968.
8. *W. W. Roberts*, Ap. J., 158, 123, 1969.
9. *G. Contopoulos*, Astron. Papers Dedicated to Bengt Stromgren, Publ. Copenhagen Univ. Obs., 1978, p. 387.
10. *R. H. Miller*, Ap. J., 223, 811, 1978.
11. *S. Ikeuchi, T. Nakamura*, Progr. Theor. Phys., 55, 1419, 1976.
12. *В. Л. Поляченко, И. Г.* Шухман, Письма АЖ, 3, 199, 1977.
13. *С. А. Каплан, К. В. Ходатаев, В. Н. Цытович*, Письма АЖ, 3, 13, 1977.
14. *А. Б. Михайловский, В. И. Петвиашвили, А. М. Фридман*, Письма ЖЭТФ, 26, 129, 1977.
15. *C. A. Norman*, M. N., 182, 457, 1978.
16. *L. S. Marochnik, Y. N. Mishurov, A. A. Suchkov*, Astrophys. Space Sci., 19, 285, 1972.
17. *Р. З. Сагдеев, А. А. Галеев*, Вопросы теории плазмы, Атомиздат, М., 7, 1973.
18. *A. Toomre*, Ap. J., 158, 899, 1969.
19. *F. Shu*, Ap. J., 160, 99, 1970.
20. *R. L. Dewar*, Ap. J., 174, 301, 1972.
21. *Дж. Уизем*, Линейные и нелинейные волны, Мир, М., 1977.
22. *Ю. Н. Мишуров, Е. Д. Павловская, А. А. Сучков*, Астрон. цирк., № 972, 1977.
23. *Б. Б. Кадомцев*, Коллективные явления в плазме, Наука, М., 1976.