

Սահմանափակ ուռուցիկության տոմոգրաֆիա և լազրանժյան մոտարկումների մասին

Լևոն Սալանյան, Հասմիկ Սահակյան, Արտյոմ Հովսեփյան

ՀՀ ՊԱՍ Ինֆորմատիկայի և ավտոմատացման պրոբլեմների ինստիտուտ
lasl@sci.am hasmik@ipia.sci.am artiom.hovsepyan@gmail.com

Ամփոփում

Սույն հոդվածում դիտարկվում է դիսկրետ տոմոգրաֆիայի ընդհանուր դասի մի մասնավոր խնդիր, որի լուծման համար առաջարկվում է Լազրանժյան ռելաքսացիայի վրա հիմնված մի մոտավոր մեթոդ համապատասխան ծրագրային իրականացմամբ:

1. Ներածություն

Տոմոգրաֆիան տիրույթ է, որտեղ ուսումնասիրվող խնդիրները վերաբերում է օբյեկտների վերականգնմանը ըստ նրանց պրոեկցիաների: Մովորաբար, դիսկրետ տոմոգրաֆիայում օբյեկտը T -ն, բազմաչափ ցանցում կետերի բազմություն է: T -ն կատարվում են չափումներ, որոնցից յուրաքանչյուրը իր մեջ ներառում է պրոեկտում, որ հաշվում է T -ի կետերի քանակը պրոեկտման ուղղությամբ զուգահեռ ուղիղների վրա: Տրված են վերջավոր թվով այդպիսի չափումներ, պահանջվում է վերականգնել T օբյեկտը: Եթե հնարավոր չէ միարժեքորեն վերականգնել այն, ապա կատարվել և պրոեկցիաներին համապատասխանող որևէ օբյեկտ: Տրված չափումներով օբյեկտ գոյության խնդիրը նույնիսկ երեք ոչ զուգահեռ պրոեկցիաների դեպքում երկու չափաքանցում NP -լիկ խնդիր է ([1]):

Վերջին տարիների ընթացքում դիսկրետ տոմոգրաֆիան մեծ հետաքրքրություն առաջացրել իր մաթեմատիկական ձևակերպումների, ինչպես նաև կիրառությունների բազմազանության պատճառով: Դիսկրետ տոմոգրաֆիայի ընդհանուր տեսությունը լսօգտագործվում է մասնավորապես թժշկական պատկերների մշակման ժամանակ, որ համար հիմք է հանդիսանում այսպես կոչված համակարգչային տոմոգրաֆիան:

Դիտարկենք երկու չափանի ցանցը և հորիզոնական և ուղղահայաց պրոեկցիաների միայն: T օբյեկտը կարող է ներկայացվել $m \times n$ չափանի $(0,1)$ -մատրիցի տեսքով, որտեղ մեկերը համապատասխանում են T -ի կետերին: Մատրիցի տողերի գումարի վեկտոր համապատասխանում է T -ի հորիզոնական պրոեկցիաներին, սյուների գումարի վեկտորը՝ ուղղահայաց պրոեկցիաներին: Այսպիսով, տրված հորիզոնական և ուղղահայաց պրոեկցիաներով օբյեկտի վերականգնման (գոյության) խնդիրը համարժեք է տրված R և (տողերի և սյուների գումարի) վեկտորներով $(0,1)$ -մատրիցի գոյության խնդրին: Այս խնդիրը լուծումը տրվել է անկախ Գեյլի [8] և Ուայդերի [7] կողմից 1957 թ: Նրանք գտել են մատրից գոյության անհրաժեշտ և բավարար պայմաններ և առաջարկել են մեթոդ (բազմանդամային բարդության) այդպիսի մատրիցների կառուցման համար: Նույն խնդիրը տողերի տարբեր լինելու պայմանով ուսումնասիրվել է [6]-ում:

Շատ դեպքերում, օրոգոնալ պրոեկցիաները օբյեկտի միարժեք վերականգնման համար բավարար տեղեկություն չեն ապահովում:

Այս պատճառով հաճախ դիտարկվում են նմանատիպ խնդիրների տարբեր դասեր, որոնցում ներմուծվում են լրացուցիչ սահմանափակումներ, օրինակ՝ երկրաչափական բնույթի: Այս սահմանափակումները նեղացնում և ճշգրտում են հնարավոր լուծումների դասը, բայց և կա վտանգ, որ խնդիրը կարող է դառնալ դժվար հաշվարկելի: Դիտարկվող սահմանափակումների հիմնական օրինակներն են՝ կապակցվածությունը և ուռուցիկությունը [3,4]:

Մատրիցը օժտված է տողային (կամ հորիզոնական) ուռուցիկության հատկությամբ, եթե բոլոր տողերում 1-երը կազմում են անընդհատ ինտերվալ: Համանման ձևով սահմանվում է սյունային (ուղղահայաց) ուռուցիկությունը: Մատրիցի կապակցվածությունը՝ 1-երի մեկից մյուսին հարևան վանդակների միջոցով անցման հնարավորությունն է: Տվյալ դեպքում հարևանությունը սահմանվում է միայն հորիզոնական, կամ ուղղահայաց, ուղղություններով (ոչ անկյունագծով):

Կապակցված մատրիցների համար գոյության խնդիրը NP-լիվ է ([2]): Գոյության խնդիրը հորիզոնական (ուղղահայաց), ինչպես նաև միաժամանակ հորիզոնական և ուղղահայաց ուռուցիկ մատրիցների համար նույնպես հայտնի է որպես NP-լիվ խնդիր ([3]):

Նույն հեղինակների կողմից ապացուցվել է, որ միաժամանակ հորիզոնական և ուղղահայաց ուռուցիկ և կապակցված մատրիցների վերականգնման խնդիրը կարող է լուծվել բազմանդամային ժամանակում: Բերված նկարագիրը ցույց է տալիս այն զգալիությունը, որ ունեն դիտարկվող դասի խնդիրները նախնական պայմանների նկատմամբ: Տեսնում ենք, որ գոյության խնդրի բարդությունը փոխվում է մուտքային նոր սահմանափակումների ավելացմանը զուգընթաց: Մինևույն ժամանակ կան և խնդրի բազմաթիվ այլ ձևակերպումներ, որոնց դեպքում խնդրի բարդությունը այսօր դեռևս զննահատված չէ: Սա մասնավորապես նշանակում է, որ դրանք էլ լուծման պարզ ալգորիթմներ չունեն:

Այսպիսով, աշխատանքում դիտարկվում են դիսկրետ տոմոգրաֆիայի խնդիրների տարբեր դասեր և առաջարկվում մոտեցումներ, որոնց միջոցով կառուցվում են խնդրի պահանջներին բավարարող (ուռուցիկ կամ համարյա ուռուցիկ, տրված պարամետրերով, կամ նրանց մոտ արժեքներով) մատրիցներ: Ստորև այս դիտարկվող խնդիրները կձևակերպենք որպես օպտիմալացման խնդիրներ և կտանք նրանց լուծման մոտարկման որոշ եղանակներ՝ հիմնված ամբողջարժեք ծրագրավորման խնդրի ռելաքսացիայի մեթոդների վրա: Հարցն այն է, որ ամբողջարժեք գծային ծրագրավորման խնդիրը հայտնի է որպես մոդել, որի օգնությամբ համարժեքորեն ձևակերպվում են հայտնի NP դժվար օպտիմալացման խնդիրները: Այս մոդելի ուսումնասիրումն (ճշգրիտ կամ մոտավոր ալգորիթմների կառուցում) ունի համընդհանուր կարևորություն և հաճախ այս մեթոդներին են դիմում օպտիմալացման խնդիրների մոտարկման ժամանակ [4,6]: Կառուցվող ալգորիթմները և դրանց վրա հիմնված ծրագրային միջավայրը հնարավորություն են տալիս իրականացնել հաշվարկներ, ինչպես տոմոգրաֆիայի, այնպես էլ հարակից խնդիրների կապակցությամբ, և այդ հաշվարկները կողմնորոշում են կամ տալիս են խնդիրների ճշգրիտ կամ մոտավոր լուծումները:

Ներկա աշխատանքում դիտարկելու ենք տոմոգրաֆիայի դասի խնդիրներից մեկը՝ Դորիզոնական տողային սահմանված ուռուցիկության գոյության խնդիրը:

2. Դորիզոնական տողային սահմանված ուռուցիկության գոյության խնդիր

Քանի որ հորիզոնական ուռուցիկ մատրիցի յուրաքանչյուր տողում մեկերը տեղադրված են հաջորդաբար, ապա այստեղից հետևում է, եթե մատրիցի տողերում հաշվենք հարևան մեկերի քանակը, ապա հորիզոնական ուռուցիկ մատրիցում այդ քանակը կլինի առավելագույնը՝ նույն պարամետրերն ունեցող բոլոր մատրիցների համեմատ: Այս կապակցությամբ հաճախ դիտարկում են մի շարք օպտիմալացման խնդիրներ, որոնք բոլորը կապված են հարևան մեկերի քանակների, դրանց սահմանափակումների և օպտիմալացման հետ: Ուշադրությունը կենտրոնացնելու ենք այդ խնդիրներից մեկի վրա:

Գործիքային տողային սահմանված ուռուցիկության գոյության խնդիր

Տրված են $R = (r_1, \dots, r_m) \in Z^m$, $S = (s_1, \dots, s_n) \in Z^n$, $R' = (r'_1, \dots, r'_m) \in Z^m$ վեկտորները: Գոյություն ունի արդյոք $m \times n$ չափանի $X = \{x_{i,j}\}$ այնպիսի մատրից, որ R -ը հանդիսանա տողերի գումարի վեկտոր, S -ը՝ սյուների գումարի վեկտոր, և i -րդ տողում հարևան մեկերի քանակը հավասար լինի r'_i -ի.

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{i,j} = s_i, & i=1, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n x_{i,j} = r_j, & j=1, \dots, m \\ \sum_{j=1}^{n-1} \min(x_{i,j}, x_{i,j+1}) = r'_i, & i=1, \dots, m \\ x_{i,j} \in \{0,1\} \end{cases}$$

Այլ խոսքերով, խնդիրը հետևյալն է. տողերի և սյուների տրված գումարն ունեցող $(0,1)$ -մատրիցների դասում գտնել այն մատրիցը, որն ունի հորիզոնական տողային սահմանված ուռուցիկություն: Այս խնդիրը NP-լիկ է. քանի որ $r'_i = r_i - 1$, $i=1, \dots, m$ մասնավոր դեպքում այն հանգում է հորիզոնական ուռուցիկ մատրիցի գոյության խնդրին: Նշված մասնավոր դեպքը սոսկ պահանջում է, որ մատրիցը լինի հորիզոնական ուռուցիկ՝ տողերում հաջորդական մեկերի տեսքով:

Ինչպես արդեն նշել ենք, շատ կոմբինատոր օպտիմալացման խնդիրներ հարմար է ներկայացնել որպես ամբողջարժեք գծային ծրագրավորման խնդիր: Վերածնակերպ ենք մեր խնդիրը որպես ամբողջարժեք ծրագրավորման խնդիր:

Սահմանենք $y_{i,j} \in \{0,1\}$ այնպիսի փոփոխականներ, որ նրանց մեկ արժեքը ապահովի i -րդ տողում j և $j+1$ վանդակներում հարևան մեկերի առկայությունը.

$$(y_{i,j} = 1) \Leftrightarrow (x_{i,j} = 1) \& (x_{i,j+1} = 1), \quad i=1, \dots, m; \quad j=1, \dots, n-1:$$

Դա հնարավոր է ապահովել

$$\begin{cases} y_{i,j} \leq x_{i,j}, \\ y_{i,j} \leq x_{i,j+1}, \\ y_{i,j} \geq x_{i,j} + x_{i,j+1} - 1, \end{cases}$$

պայմանների միաժամանակյա տեղի ունենալով:

Այսպիսով, խնդիրը վերածնակերպվում է հետևյալ կերպ: Տրված են $R = (r_1, \dots, r_m)$,

$S = (s_1, \dots, s_n)$, $R' = (r'_1, \dots, r'_m)$ վեկտորները: Գոյություն ունեն արդյոք $m \times n$ չափանի

$X = \{x_{i,j}\}$, և $m \times (n-1)$ չափանի $Y = \{y_{i,j}\}$ այնպիսի մատրիցներ, որ.

$$\begin{cases}
 (1) \sum_{j=1}^{n-1} x_{i,j} = s_i, i=1, \dots, n, \\
 (2) \sum_{j=1}^n x_{i,j} = r_i, i=1, \dots, m, \\
 (3) \begin{cases} y_{i,j} \leq x_{i,j}, \\ y_{i,j} \leq x_{i,j+1}, \\ y_{i,j} \geq x_{i,j} + x_{i,j+1} - 1, \end{cases} i=1, \dots, m, j=1, \dots, n-1, \\
 (4) \sum_{j=1}^{n-1} y_{i,j} = r_i, i=1, \dots, m, \\
 (5) x_{i,j} \in \{0,1\}, y_{i,j} \in \{0,1\}:
 \end{cases}$$

3. Լազրանոցային ռեկաքսացիա և փոփոխականների տրոհման եղանակ

Այսպիսով, ունենք հորիզոնական տողային սահմանված ուռուցիկության գոյության խնդիրը՝ վերածակերպված որպես գծային ամբողջարժեք ծրագրավորման խնդիր: Այն նշանակենք I -ով: Գիտենք նաև, որ I խնդիրը NP-լիով է: Խնդրի լուծման համար օգտագործելու ենք Լազրանոցային ռեկաքսացիայի վրա հիմնված մի մոտավոր մեթոդ:

Ընդհանուր դեպքում, I խնդրից հեռացնելով որևէ սահմանափակում, կստանանք խնդրի ռեկաքսացիա: Ենթադրենք սահմանափակումների մեջ կարող ենք առանձնացնել մեկը կամ մի քանիսը, որոնք առավել բարդ են այն իմաստով, որ դրանք հեռացնելուց հետո ստացված ամբողջարժեք ծրագրավորման խնդիրը կարող է լուծվել ավելի հեշտ: Սահմանափակումներից ազատվելու գաղափարը կարող է ներդրվել ավելի ընդհանուր մեթոդի մեջ, որը կոչվում է Լազրանոցային ռեկաքսացիա: Տվյալ խնդիրը կարելի է Լազրանոցային ռեկաքսացիայի ենթարկել տարբեր ճանապարհներով, որոնցից մեկը, որը կօգտագործենք ստորև, հետևյալն է. եթե խնդիրը կարելի է տրոհել ենթախնդիրների, որոնք ունեն ընդհանուր փոփոխականներ, ապա - նախ տրոհել այդ փոփոխականները, և այնուհետև ռեկաքսացնել նրանց նույնականության պահանջը:

Այսպիսով, կրկնօրինակենք $x_{i,j}$ փոփոխականները, ստանալով նոր փոփոխականների երկու

րազմություն $x_{i,j}^h$ և $x_{i,j}^v$: I խնդիրը այժմ ձևակերպվում է հետևյալ կերպ.

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \sum_{j=1}^n x_{i,j}^v = s_j, j = 1, \dots, n, \\
 (2) \quad & \sum_{j=1}^n x_{i,j}^h = r_i, i = 1, \dots, m, \\
 (3) \quad & \begin{cases} y_{i,j} \leq x_{i,j}^h, \\ y_{i,j} \leq x_{i,j+1}^h, \\ y_{i,j} \geq x_{i,j}^h + x_{i,j+1}^h - 1, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n-1, \\
 (4) \quad & \sum_{j=1}^{n-1} y_{i,j} = r_i, i = 1, \dots, m, \\
 (5) \quad & x_{i,j}^h, x_{i,j}^v \in [0,1], y_{i,j} \in \{0,1\}, \\
 (6) \quad & x_{i,j}^h = x_{i,j}^v:
 \end{aligned}$$

Փոփոխականների տրոհման արդյունքում մենք տրոհեցինք խնդիրը երկու ենթախնդիրների, որոնցից յուրաքանչյուրն ունի իր փոփոխականների բազմությունը, և որոնք կլինեն երկու անկախ խնդիրներ, եթե չլինեն (6) սահմանափակումը: Այսպիսով, այս տեսանկյունից «դժվար» սահմանափակումը (6)-ն է: Ուելաքսացնենք (6)-րդ սահմանափակումը օգտագործելով Լագրանժի $\lambda_{i,j}$ գործակիցները: Ստանում ենք հետևյալ խնդիրը, որը կնշանակենք $VSI(\lambda)$ -ով, իսկ նրա օպտիմալ արժեքը՝ $v^{VSI}(\lambda)$ -ով:

$$\begin{aligned}
 & \max(\sum_{i,j} \lambda_{i,j} (x_{i,j}^h - x_{i,j}^v)) \\
 (1) \quad & \sum_{j=1}^n x_{i,j}^v = s_j, j = 1, \dots, n, \\
 (2) \quad & \sum_{j=1}^n x_{i,j}^h = r_i, i = 1, \dots, m, \\
 (3) \quad & \begin{cases} y_{i,j} \leq x_{i,j}^h, \\ y_{i,j} \leq x_{i,j+1}^h, \\ y_{i,j} \geq x_{i,j}^h + x_{i,j+1}^h - 1, \end{cases} \quad i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n-1, \\
 (4) \quad & \sum_{j=1}^{n-1} y_{i,j} = r_i, i = 1, \dots, m, \\
 (5) \quad & x_{i,j}^h, x_{i,j}^v \in [0,1], y_{i,j} \in \{0,1\}:
 \end{aligned}$$

Այնուհետև նույն դաստորություններով խնդիրը կարելի է տրոհել նաև ըստ առանձին տողերի, որն էլ իր հերթին հանգում է ուղղորդված գրաֆում ամենամեծ կշռով և նշված թվով կողերով (պարզ) ճանապարհ գտնելու խնդրին:

Կարելի էր խնդրին մոտենալ նաև այլ տեսանկյունից: Ուելաքսացնելով (3) պայմանները, խնդիրը նորից կտրոհվեր երկու ենթախնդիրների այս անգամ $x_{i,j}$ և $y_{i,j}$ փոփոխականների բազմությամբ: Սակայն, ներկա աշխատանքը սահմանափակվում է միայն առաջին տարբերակով ((6) սահմանափակման ռելաքսացիա):

Պարզ է, որ $VSI(\lambda)$ -ն I խնդրի ռելաքսացիան է, և հետևաբար, $v^{VSI}(\lambda)$ -ն I խնդրի արժեքի համար վերին սահման է: Գտնել լավագույն վերին սահմանը, նշանակում է լուծել լագրանժի երկակի խնդիրը, այն է՝

$$v^{VSD} = \min_{\lambda} v^{VSI}(\lambda)$$

Սա ուռուցիկ ոչ դիֆերենցելի օպտիմալացման խնդիր է: Այսպիսի խնդիրների լուծման համար գոյություն ունեն տարբեր մեթոդներ: Դրանցից մեկը սուբգրադիենտ մեթոդն է: Սուբգրադիենտ օպտիմիզացիան ամեն քայլի ընթացքում պետք է հաշվի $v^{VSI}(\lambda)$ արժեքը տրված λ_j համար, որը տվյալ դեպքում հանգում է m անկախ ենթախնդիրների լուծման, որոնք կարելի է ներկայացնել հետևյալ ընդհանուր տեսքով.

$$\begin{cases} \max(\sum_{j=1}^n c_j x_j) \\ \sum_{j=1}^n x_j = r, \\ \begin{cases} y_j \leq x_j, \\ y_j \leq x_{j+1}, & j=1, \dots, n-1, \\ y_j \geq x_j + x_{j+1} - 1, \end{cases} & (*) \\ \sum_{j=1}^{n-1} y_j = r', \\ x_j \in \{0,1\}, y_j \in \{0,1\}: \end{cases}$$

Այս խնդիրը փորձենք լուծել ացիկլիկ, ուղղորդված գրաֆում ամենամեծ կշռով և նշված թվով կողերով (պարզ) ճանապարհի գտնելու ալգորիթմի միջոցով:

4. Տրոհված խնդիրը գրաֆի տեսքով և նրա լուծումը

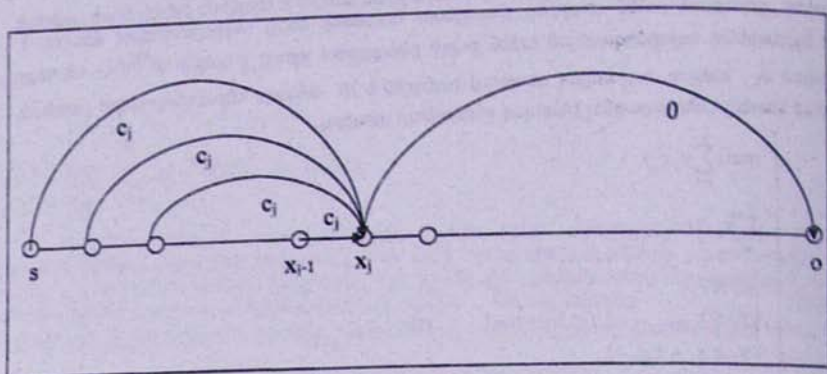
Դիտարկենք $G=(V, E)$ ուղղորդված գրաֆը, որի գագաթների բազմությունը կազմված է՝ գագաթներից յուրաքանչյուր x_j փոփոխականի համար, ավելացրած մուտքային S և ելքային O գագաթները:

Գրաֆի կողերի բազմությունը և նրանց կշիռները սահմանենք հետևյալ ձևով.

$$\begin{aligned} (s, x_j), & \quad c_j \text{ կշռով} \\ (x_i, x_j), & \quad i \leq j-1 \quad c_j \text{ կշռով} \\ (x_j, o), & \quad 0 \text{ կշռով:} \end{aligned}$$

Դիտարկենք գրաֆում S -ից O գնացող ճանապարհները: x_j գագաթներին համապատասխանող փոփոխականներից միայն r հատն է ընդունում 1 արժեք ըստ $(*)$ -ի, և

որանց մեջ էլ հարևան 1-երի քանակը r^* է: Հետևաբար, մեզ հետաքրքրում են S -ից O գնացող միայն այն ճանապարհները, որոնք անցնում են r հատ զագաթով, ընդ որում այդ զագաթների մեջ կան r^* հատ հարևան համարների ունեցող զագաթների զույգեր: Այդ ճանապարհներից պետք է զտնել այն, որի համար կողերի կշիռների գումարը մաքսիմալ է: Այժմ, մաքսիմալ կշռով ճանապարհի զագաթներին համապատասխանող փոփոխականներին 1 վերագրելով, մենք կստանանք (*) խնդրի լուծումը:



Նկար 1: $G = (V, E)$ գրաֆ:

Այժմ բերենք ասվածի ալգորիթմիկ նկարագիրը:

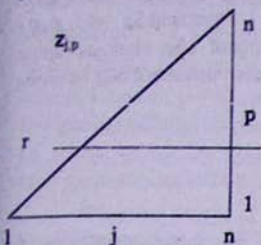
$z(j, p)$ -ն դիցուք S -ից x_j զագաթը գնացող և p հատ զագաթներով անցնող ամենաերկար ճանապարհի կշիռն է: Դիցուք $w(j, p, q)$ -ն S -ից x_j զագաթը գնացող ամենաերկար ճանապարհի կշիռն է, որն անցնում է p հատ զագաթներով, որոնց մեջ կա q հատ հարևան համարների ունեցող զագաթների զույգեր: Այդ դեպքում $z(j, p)$ -ն և $w(j, p, q)$ -ն կարող են հաշվվել հետևյալ ձևով: Նախ դիտարկենք $z(j, p)$ -երը:

$$z(j, 1) = c_j$$

$$z(j, p) = \max_{u < x_j} (z(u, p-1) + c_j)$$

Փնտրվող օպտիմալ արժեքն էլ կլինի՝ $z(o, r) = \max_j z(x_j, r)$ -ը: Խնդրի այս մասը պրակտիկորեն լուծվում է հետևյալ ձևով:

Տրված n -ի և r -ի համար կառուցվում է $Z_{j,p} = [z_{j,p}]$ զանգված, որտեղ $j = 1, \dots, n$ և j արժեքի համար $p = 0, \dots, j-1$: Իրականում ֆիքսված r -ի համար բավարար է դիտարկել $p = 1, \dots, r$ շերտերը, սակայն $p = 1, \dots, n$ կբավարարի ըստ բոլոր r -երի տարվող հաշվարկների կարիքները:

Նկար 2: $z(j, p)$ կշիռների մատրից:

Սկզբում հաշվարկվում է $z_{j,1}$ արժեքը: Այն հավասար է c_1 -ի: $p=1$ տողի բոլոր արժեքները հաշվվում են համանման ձևով՝ $z_{j,1} = c_j$: $z_{j,p}$ -ն հաշվարկելու համար ըստ մեր ունեցած բանաձևի հարկ է իմանալ համանման արժեքները $p-1$ և բոլոր $1, \dots, j-1$ ցուցիչների համար: Սակայն $p-1$ տողում առաջին ոչ զրոյական արժեքը դա $j = p-1$ -րդ տեղում է, այսինքն անկունագծի վրա: Չեղանարար հաշվարկները կարելի է տանել $p=1, \dots, r, \dots$ տողերով հաջորդաբար, և տողերում՝ $j = p, \dots, n$ կարգով: Այս կառուցումները անհրաժեշտ են խնդրի ծրագրային իրականացման համար և սրանք թույլ են տալիս գնահատել կատարվող հաշվարկների քանակը: Այն չի գերազանցում n^3 թիվը, ինչը բազմանդամային է մուտքային պարամետրերի նկատմամբ:

Փնտրվող մաքսիմալ կշռով ճանապարհները կարելի է պահել առանձին զանգվածում: Սրանք կարելի է պահել $0,1$ վեկտորների տեսքով և կամ ոչ զրոյական տարրերի համարների ցուցակների տեսքով, ինչը սակայն էական ազդեցություն չի ունենա հաշվարկների նվազեցման վրա:

Այժմ հաշվարկներ $w(j, p, q)$ -երի արժեքները: Նախ դիտարկենք եզրային արժեքները: Ըստ $w(j, p, q)$ -ի, ունենք S -ից x_j գնացող մաքսիմալ կշռով ճանապարհ, որն անցնում է p հատ գագաթներով, որոնց մեջ կա q հատ հարևան համարներով գագաթների զույգ: $q \leq p-1$, և դիցուք՝ p -երը նվազելով հասնում են $q+1$ -ի: $w(j, q+1, q)$ -երը կարող են ոչ զրոյական լինել սկսած $j \geq q+1$ -ից: Ավելի մեծ q -երի և փոքր j -երի համար $w(j, p, q)$ -երը հավասար են զրոյի:

Չեղանարար է, որ q -ն չի կարող մաս շատ փոքր լինել: Եթե $p > \left\lceil \frac{j+1}{2} \right\rceil$ ապա q -ն չի կարող զրո լինել (առնվազն 2 գագաթ պետք է հարևան համարներ ունենան):

Դիցուք՝ $\tau = \left\lceil \frac{j+1}{3} \right\rceil$: Այդ դեպքում τ հատ գագաթների զույգ դեռևս կարող են

հարևան չլինել, որոնք էլ կկազմեն 2τ գագաթ: Դրանից հետո յուրաքանչյուր գագաթի ավելացումը արդեն կավելացնի երկու մոտ զույգ:

Այժմ անցնենք ընդհանուր դեպքին: $w(j, p, q)$ արժեքները հաշվարկելու համար վերցնենք տիրույթ, որտեղ j արժեքի համար $p \leq j$, և j, p զույգի համար $q \leq p-1$: Այս տիրույթը ավելի լայն է, քան անհրաժեշտ է, սակայն այն իրականում շատ չի տարբերվում

արժեքների հաշվարկման համար անհրաժեշտ միմյանից տիրույթից: Եզրային արժեքների հարթ անցման համար տիրույթը հաշվարկից առաջ զրոյացվում է: Ղիտարկենք $w(j, p, q)$ արժեքը: Հաշվարկը շղթայական է, և առաջին քայլում ղիտարկում ենք հետևյալ երկու առանձին դեպքերը՝ $x_{j-1} = 1$ և $x_{j-1} = 0$: Համապատասխանաբար ստանում ենք հետևյալ արժեքները՝

$$w(j-1, p-1, q-1) + c_j \text{ և } \max_{v \in c_j-1} (w(u, p-1, q) + c_j)$$

Մեզ հետաքրքրում է այս արժեքներից մաքսիմալը:

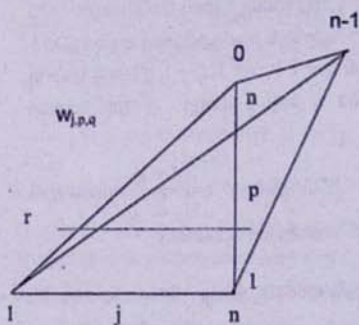
$w(j-1, p-1, q-1) + c_j$ -ում բոլոր ցուցիչների խիստ փոքր են նախնականներից և ենթադրում ենք, որ այս արժեքը արդեն հաշվարկվել է նախորդ քայլերում: $\max_{v \in c_j-1} (w(u, p-1, q) + c_j)$ -ի հաշվարկի համար կատարում ենք շղթայական հաշվարկի հաջորդ քայլը՝

$$w(u-1, p-2, q-1) + c_j, \quad \max_{v \in c_j-1} (w(v, p-2, q) + c_j):$$

Եվ փնտրվող օպտիմալ արժեքը $w(o, r, r') = \max_j w(x_j, r, r')$ -ն է: Այս խնդիրը պրակտիկորեն լուծվում է հետևյալ ձևով:

Տրված n -ի, r -ի և r' -ի համար կառուցվում է վերը նշված տիրույթը՝ $W_{j,p,q} = [w_{j,p,q}]$ զանգվածը, որտեղ $j=1, \dots, n$ և j արժեքի համար $p=1, \dots, j$ և j, p զույգի համար $q=0, \dots, p-1$:

Իրականում ֆիքսված r -ի համար բավարար է ղիտարկել $p=1, \dots, r$ շերտերը և ըստ q -ի բոլոր արժեքները, երբ $q \leq r-1$: Սակայն իրականում կարևոր է հաշվարկները տանել բավարար տիրույթում և այնպիսի հաջորդականությամբ, որ հաշվարկները իրականանալի լինեն:



Նկար 3: $w_{j,p,q}$ կշիռների մատրից:

Սկզբում հաշվարկվում է $w_{1,1,0}$ արժեքը՝ $w_{1,1,0} = c_1$: $p=1$ տողի բոլոր արժեքները հաշվվում են համանման ձևով՝ $w_{j,1,0} = c_j$: Ավելին, $q=0$ արժեքների հաշվարկը արդեն ղիտարկել

էինք: $w_{j,p,q}$ -ն հաշվարկելու համար ըստ մեր ունեցած բանաձևի հարկ է իմանալ համանման արժեքները $p-1$ և բոլոր $1, \dots, j-1$ ցուցիչների համար: Սակայն $p-1$ շերտում ընթացիկ q -ով արժեքը կամ զրո է, կամ էլ այն արդեն հաշվարկված է: Հետևաբար, հաշվարկները կարելի է տանել $p=1, \dots, r, \dots$ շերտերով հաջորդաբար, և շերտերում՝ $j=p, \dots, r$ կարգով: Այս կառուցումները անհրաժեշտ են խնդրի ծրագրային իրականացման համար և սրանք թույլ են տալիս գնահատել կատարվող հաշվարկների քանակը: Այն չի գերազանցում n^4 թվին, ինչը բազմաճանաչում է մուտքային պարամետրերի նկատմամբ:

Փնտրվող մաքիմալ կշռով ճանապարհներն կարելի է պահել առանձին զանգվածում: Սրանք կարելի է պահել $0, 1$ վեկտորների տեսքով և կամ ոչ գրոյական տարրերի համարների ցուցակների տեսքով, ինչը սակայն էական ազդեցություն չի ունենա հաշվարկների նվազեցման վրա:

5. Ծրագրային իրականացումը

Մշակվել է ծրագրային համակարգ օգտագործողի ինտերֆեյսով, որը նախատեսվում է դիսկրետ տոմոգրաֆիայի դասի մի շարք խնդիրների լուծման համար Լազրանման ռելաքսացիայի վրա հիմնված մոտավոր մեթոդներով:

Նկարագրենք աշխատանքային միջավայրը: Դաշտերի մի խումբ նախատեսված է խնդրի մուտքային տվյալների ներմուծման համար: Քանի որ դիտարկում ենք դիսկրետ տոմոգրաֆիայի դասի խնդիրներ, ապա այստեղ մուտքային տվյալները պրոեկցիաներն են, տվյալ դեպքում տողերի և սյուների գումարի վեկտորները: Դասում որոշակի խնդրի նկարագիրը տրվում է լրացուցիչ սահմանափակումների միջոցով: Հետևաբար, ընթացիկ սահմանափակումների ներմուծմամբ: Դաշտերի հաջորդ խումբն էլ ծառայում է այդ նպատակին: Այնուհետև, նախատեսված է դաշտ, որը հնարավորություն է տալիս ներկայացնելու դիտարկվող խնդիրը՝ վերածնակերպված որպես մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդիր: Այնուհետև կարելի է ընտրել մեկ կամ մի քանի սահմանափակումներ, որոնք ուզում ենք ռելաքսացնել, կարելի է կատարել փոփոխականների տրոհում, և այլն: Եվ վերջապես, դաշտերից մեկն էլ նախատեսված է թվային արդյունքների արտածման համար: Օրինակ՝ Լազրանմի երկակի խնդրի արժեքը, կամ փոփոխականների տրոհման արդյունքում կառուցված մատրիցների տարբերությունը գնահատող մեծություններ, և այլն:

The screenshot shows the 'ProblemBase' software interface. It includes several input fields and a list of operations on the right side.

- Row sums vector:** 5, 2, 5, 3, 1, 4
- Column sums vector:** 2, 5, 4, 4, 1, 2
- Auxiliary constraint:**
 - Problem type: Constrained h-convexity
 - 2, 1, 4, 1, 0, 2
- Operations on the right:**
 - Enter data: $\sum_{j=1}^n a_{ij} = r_i, i=1, \dots, 6$
 - Reformulate problem: $\sum_{i=1}^m a_{ij} = s_j, j=1, \dots, 7$
 - Find optima: $\sum_{j=1}^n \min(a_{ij}, a_{i,j+1}) = r_i, i=1, \dots, 6$
 - Results: $a_{ij} \in (0, 1)$
 - Solve
 - Clear
 - Is infeasible
- Results:** (Empty field)

Նկար 4: Ծրագրային իրականացման ընդհանուր տեսք:

Բերված օրինակում որպես ընթացիկ խնդիր ընտրված է Գորիզոնական տողային սահմանված ուռուցիկության գոյության խնդիրը:

Այժմ նկարագրենք ծրագրային իրականացման կարևոր դասերից մեկը՝ ProblemBase վերածական դասը: Այս դասից է ժառանգվում յուրաքանչյուր դիտարկվող խնդիր: Դասը իր մեջ պարունակում է խնդրի տվյալները: Բացի այդ այն ունի մի շարք վիրտուալ ֆունկցիաներ խնդիրը լուծելու համար: Օրինակ, ֆունկցիա, որը վերածակերպում է խնդիրը մաթեմատիկական ծրագրավորման խնդրի տեսքով, ընտրում է ռելաքսացման ենթակա սահմանափակումները, և այլն: ProblemBase դասի կարևոր ֆունկցիաներից է Solve ֆունկցիան, որը կանչում է տվյալ խնդրի լուծման մեթոդը: Քանի որ, դիտարկվող խնդիրների մեծ մասը հանգում են գրաֆների վրա համեմատաբար հեշտ լուծվող խնդիրների, և նրանց լուծման մեթոդները կարող են ընդհանուր լինեն մի քանի խնդիրների համար, ապա այդ մեթոդները առանձնացվել են հատուկ գրադարանում:

6. Գրականություն

1. R. J. Gardner, P. Gritzmann, D. Prangenberg, On the computational complexity of reconstructing lattice sets from their X-rays. Technical Report (970-05012), Techn. Univ. München, Fak. I. Math, 1997.
2. G. J. Woeginger. The reconstruction of polyominoes from their orthogonal projections. Inform. Process. Lett., 77, pp 225-229, 2001.
3. E. Barucci, A. Del Lungo, M. Nivat, and R. Pinzani. Reconstructing convex polyominoes from horizontal and vertical projections. Theoret. Comput. Sci., 155, pp. 321-347, 1996.
4. G. Dahl and T. Flatberg. Lagrangian decomposition for reconstructing hv-convex $(0, 1)$ matrices, Report 303, University of Oslo, pp. 1-13, 2002.
5. M. Guignard and S. Kim. Lagrangian decomposition: a model yielding stronger lagrangian bounds. Math. Prog., 39, pp215-228, 1987.
6. А. А. Саакян, Градиентные алгоритмы синтеза $(0,1)$ -матриц с различными строками. ДАН Арм ССР, LXXXIII, 5, стр. 207-209. 1986.
7. H. J. Ryser. Combinatorial properties of matrices of zeros and ones. Canad. J. Math., 9:pp 371-377, 1957.
8. D. Gale. A theorem on flows in networks. Pacific J. Math., 7, pp 1073-1082, 1957.

On Constrained Convexity Tomography and Lagrangean Approximations

L. Aslanyan, H. Sahakyan, A. Hovsepyan

Abstract

In this paper one particular problem of general type of discrete tomography problems is considered and an approximate algorithm for its solution based on Lagrangean relaxation is introduced. A program's implementation is given as well.