Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 29, 2007, 66−84.

О вершинной панцикличности направленных графов с большими полустепенями

С. Х Дарбинян и И. А Карапетян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА
e-mail: sam_darbin@ipia.sci.am, isko@ipia.sci.am

Аннотация

Пусть G есть p-вершинный ($p \geq 13$) направленный граф с минимальними полустепенями, не меньшими, чем $(p-3)/2$. Тогда для каждого целого k, где $3 \leq k \leq 5$ или $9 \leq k \leq p-3$ через любую вершину графа G проходит контур длины k.

1.Введение и основные определения

Будем рассматривать конечные ориентированные графы (орграфы) без петель и кратных дуг. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в книгах [1] и [2].

Через $V(G)$ обозначается множество вершин орграфа G, а через $E(G)$− множество его дуг (иногда вместо $V(G)$ и $E(G)$ будем писать G). Дугу, исходящую из вершины x в вершину y, обозначим через xy и будем говорить, что вершина x выигрывает вершину y, а вершина y проигрывает из вершины x.

Пусть G −орграф, $A,B \subseteq V(G)$ и $x \in V(G)$. Обозначим

$$E(A \to B) = \{yz \in E(G) / y \in A, z \in B\};$$
$$E(A,B) = E(A \to B) \cup E(B \to A);$$
$$O(x) - \{y \in V(G) / xy \in E(G)\}; \qquad I(x) = \{y \in V(G) / yx \in F(G)\};$$
$$O(x,A) = A \cap O(x); \qquad I(x,A) = A \cap I(x);$$
$$od(x,A) = |O(x,A)|; \qquad id(x,A) = |I(x,A)|.$$

Число $od(x)=|O(x)|$ ($id(x)=|I(x)|$) называется полустепенью исхода (захода) вершины x, а число $d(x)=id(x)+od(x)$ называется степенью вершины x. Запись $A\to B$ означает, что если $y\in A$ и $z\in B$, то $yz\in E(G)$. Если $H\subseteq V(G)$, $A\to B$ и $B\to H$, то будем писать $A\to B\to H$. В этих обозначениях, если $A=\{u\}$ или $B=\{u\}$, где u – вершина орграфа G, то вместо $\{u\}$ пишем u. Орграф, порожденный подмножеством вершин A, обозначается через $\langle A\rangle$. Если G – орграф, то $\overline{G}$ – орграф обратный к орграфу G, т.е. орграф $\overline{G}$ получается из G после переориентации каждой дуги. $E(x,y)=\varnothing$, означает что вершины x и y не смежны между собой. Запись $D\subseteq G$ означает, что орграф D является подорграфом G. Путь, состоящий из вершин $x_1,x_2,\dots,x_k$ и дуг $x_i x_{i+1}$, $1\le i\le k-1$, обозначим через $x_1x_2\dots x_k$, а контур, полученный из этого пути после добавления дуги x_kx_1 – через $x_1x_2\dots x_kx_1$. Как обычно, C_k означает контур длины k, а $[m,n]$ – множество целых чисел, не больших n и не меньших m. Если $C_k=x_1x_2\dots x_kx_1$, то всюду индексы вершин контура C_k берутся по mod(k), т.е $x_{k+i}=x_i$, $i\ge 1$.

Орграф G с p вершинами ($p\ge 3$) называется панциклическим (соответственно, вершинно панциклическим), если он содержит контур длины k (соответственно, если любая вершина орграфа G находится на контуре длины k) для всех k, $3\le k\le p$.

Орграф G называется направленным, если он не содержит контур длины 2.

Многие авторы (см [3–7]) исследовали гамильтоновость, панцикличность и вершинно панцикличность направленных графов. В частности, в [4] и [7] доказаны следующие теоремы.

Теорема A [4]. Пусть G есть p-вершинный ($p\ge 9$) направленный граф. Если для любой вершины $x\in V(G)$ степень $d(x)\ge p-2$ и для любых различных вершин $x,y\in V(G)$ имеет место $xy\in E(G)$ или $od(x)+id(y)\ge p-3$, то G является вершинно панциклическим.

Теорема B [7]. Любой p-вершинный ($p\ge 10$) направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими, чем $(p-3)/2$, является панциклическим.

Теорема C [7]. Пусть G есть p-вершинный ($p\ge 10$) направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими, чем $(p-1)/2-k\ge 6k-2$, где $k\ge 1$. Тогда любая вершина графа G находится на контуре любой длины $r\in[3,5]$.

Учитывая теоремы A, B и C, мы предполагаем, что справедлива следующая

Гипотеза. Пусть G есть p-вершинный ($p\ge 10$) направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими, чем $(p-3)/2$. Тогда G является вершинно панциклическим.

В настоящей работе мы докажем, что если p-вершинный направленный граф G удовлетворяет условиям теоремы B, то любая вершина графа G находится на контуре любой длины k, $9\le k\le p-3$.

2. Вспомогательные результаты

Очевидно, имеет место следующая

Лемма 1. Пусть G есть p-вершинный $(p \geq 2)$ направленный граф. Тогда G содержит такую вершину x, которая не выигрывает (не проигрывает) по крайней мере $(p-1)/2$ вершину.

Лемма 2. Пусть $C_k = x_1 x_2 ... x_k$ −контур в направленном графе G и $y \notin C_k$. Если вершина y не смежна не более чем двум вершинам контура C_k, $od(y,C_k) \geq 2$ и $id(y,C_k) \geq 2$, то существует такое $i \in [1,k]$, что $x_i y \in G$ и $yx_{i+1} \in G$ или $yx_{i+3} \in G$.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не справедливо, т.е. для любого $i \in [1,k]$, если $x_i y \in G$, то

$$E(y \to \{x_{i+1}, x_{i+3}\}) = \varnothing. \tag{1}$$

Пусть, для определенности, $x_k y \in G$ и $x_1 y \notin G$. Тогда, из (1), следует, что вершины y и x_1 не смежны между собой. Если вершины y и x_2 также не смежны между собой, то из (1) и из условия леммы следует, что $\{x_3, x_4, ..., x_k\} \to y$. Значит, $od(y,C_k) = 0$, а это противоречит условию $od(y,C_k) \geq 2$. Следовательно, вершины y и x_2 смежны между собой.

Пусть $x_2 y \in G$. Тогда, пользуясь (1), получим, что вершины y и x_3 не смежны и $\{x_5, x_6, ..., x_k\} \to y$. Значит, $od(y,C_k) \leq 1$, что невозможно.

Пусть теперь $yx_2 \in G$. Тогда из $x_k y \in G$ и из (1) следует, что $yx_3 \notin G$ и $x_{k-1} y \notin G$. Следовательно, $x_3 y \in G$ или $yx_{k-1} \in G$.

Если $E(y,x_3) = \varnothing$, то $yx_{k-1} \in G$. Вновь пользуясь (1), получим, что $y \to \{x_4, x_5, ..., x_{k-1}\}$. Отсюда $id(y,C_k) = 1$, а это является противоречием. Поэтому будем предполагать, что $x_3 y \in G$. Нетрудно убедиться, что $x_4 y \notin G$, т.е. $E(y,x_4) = \varnothing$. Тогда yx_{k-1}, $x_6 y \in G$. Поэтому для некоторого $j \in [6, k-2]$ имеет место $x_j y, yx_{j+1} \in G$, а это противоречит нашему предположению. Лемма 2 доказана.

3. Основной результат

Теорема. Пусть G есть p-вершинный $(p \geq 13)$ направленный граф с минимальными полустепенями, не меньшими, чем $(p-3)/2$. Тогда любая вершина графа G находится на контуре любой длины k, $9 \leq k \leq p-3$.

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы не верно. Тогда для некоторого k, $9 \leq k \leq p-3$, направленный граф (в дальнейшем, граф G) содержит такую вершину u, которая не принадлежит контуру длины k. Из теоремы А следует, что $p=2n+1$, а из теоремы В следует, что граф G содержит контур длины k. Пусть $C_k=x_1x_2...x_kx_1$ и $A=V(G)-V(C_k)$.

В дальнейшем вместо $E(G)$ (соответственно вместо $V(C_k)$) будем писать G (соответственно C_k).

В ходе доказательства теоремы будем доказывать некоторые свойства для контура C_k и для вершины u в виде лемм.

Лемма 3. Пусть $u_1u_2...u_s-$ путь в подорографе $\langle A\rangle$, где $1\le s\le k-1$, который содержит вершину u, тогда, если для некоторого $i\in[1,k]$ имеет место $x_iu_1\in G$, то $u_sx_{i+s+1}\notin G$.

Доказательство леммы 3 следует из предположения, что вершина u не находится на контуре длины k.

Из леммы 3 непосредственно вытекает следующая.

Лемма 4. Пусть вершина u смежна со всеми вершинами множества $B=\{x_i,x_{i+1},...,x_{i+l}\}$ где $l\ge 3$, и $x_iu\in G$ (соответственно, $u\,x_{i+l}\in G$), то $\{x_i,x_{i+2},...,x_{i+2s}\}\to u$, где $i+2s=l-1$ или $i+2s=l$ (соответственно, $u\to\{x_{i+l},x_{i+l-2},...,x_{i+l-2s}\}$, где $i+l-2s=i+1$ или $i+l-2s=i$). В частности, если $x_iu,ux_{i+l}\in G$, то $l-$ нечетное и

$$\{x_i,\ x_{i+2},\ ...,\ x_{i+l-1}\}\to u\to\{x_{i+1},\ x_{i+3},\ ...,\ x_{i+l}\}.$$

Лемма 5. $od(u,C_k)\ge 2$ и $id(u,C_k)\ge 2$.

Доказательство. Докажем, что $od(u,C_k)\ge 2$. Допустим противное, т.е. $od(u,C_k)\le 1$. Так как $k\ge 9$ и вершина u не смежна не более чем двум вершинам контура C_k, то $id(u,C_k)\ge k-3\ge 6$.

Пусть

$$B=\{x_i\,/\,x_{i-3}u\in G \text{ и } ux_i\notin G\}.$$

Очевидно, что $|B|\ge k-4\ge 5$. По лемме 3 имеем $E(O(u,A)\to B)=\varnothing$. Отсюда и из леммы 1 следует, что для некоторой вершины $y\in B$ имеет место $id(y)\le n-2$, а это противоречит условию $id(y)\ge n-1$.

Аналогичным образом получим, что $od(u,C_k)\ge 2$. Лемма 5 доказана.

Контур длины k, который содержит вершину u, обозначается через C.

Лемма 6. Вершина u не смежна с некоторой вершиной контура C_k.

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не справедливо, т.е. вершина u смежна со всеми вершинами контура C_k. Из леммы 3 и 5 следует, что k-чётное и

$$\{x_2,x_4,...,x_k\}\to u\to\{x_1,x_3,...,x_{k-1}\}. \tag{2}$$

Очевидно, что для любого $i\in[1,k]$ имеет место $x_ix_{i+2}\notin G$.

Случай 1. $I(u,A)\ne\varnothing$ и $x_{k-1}y\in G$, где $y\in I(u,A)$.

Из леммы 3 и из (2) следует, что

$$E(\{x_k,x_2,x_4,...,x_{k-2}\}\to y)=\varnothing. \tag{3}$$

Если $yx_k\in G$, то $C=x_{k-1}yx_kux_3...x_{k-1}$, а если $yx_2\in G$, то $C=x_{k-1}yx_2ux_3...x_{k-1}$. Получили, что вершина u принадлежит контуру длины k, а это противоречит нашему предположению. Поэтому

$$E(y_1,\{x_2,x_{k-1}\})=\varnothing. \tag{4}$$

Отсюда и из (3) следует, что $yx_{k-2}\in G$ и вершина y смежна со всеми вершинами множества $\{x_3,x_4,\dots,x_{k-2}\}$. Если $x_sy\in G$, где $3\le s\le k-3$, то для некоторого i, $3\le i\le k-3$, имеет место x_iy, $yx_{i+1}\in G$. В результате получили контур $C=x_1ux_3\dots x_i\,yx_{i+1}\dots x_k$ длины k, который содержит вершину u, что невозможно. Следовательно, $y\to\{x_3,x_4,\dots,x_{k-2}\}$. Кроме того, $x_1y\notin G$, так как в случае $x_1y\in G$, аналогично (4), получим $E(y,x_4)=\varnothing$, т.е. вершина y не смежна с вершинами x_{k-1}, x_2 и x_4, что невозможно. В результате имеем, что $id(y,A)\ge n-2$. Поэтому, так как $ux_5\in G$, то, по лемме 3, $E(x_1\to \mathrm{I}(y,A))=\varnothing$. Отсюда и из $E(x_1\to\{u,y,x_k,x_3\})=\varnothing$ получим, что $od(x_1)\le n-2$, а это противоречит условию $od(x_1)\ge n-1$.

Случай 2. $\mathrm{I}(u,A)\neq\varnothing$ и $E(x_{k-1}\to \mathrm{I}(u,A))=\varnothing$.

Учитывая рассмотренный случай 1, можем предполагать, что

$$E(\{x_1,x_3,\dots,x_{k-1}\})\to I(u,A))=\varnothing.$$

Отсюда и из (3) имеем, что для $y\in \mathrm{I}(u,A)$ имеет место $\mathrm{I}(y)\subseteq A$. Из $ux_3\in G$ и из леммы 3 следует, что $E(x_1\to \mathrm{I}(y))=\varnothing$, а это, так как $id(y)\ge n-1$ и $E(x_1\to\{u,y,x_k\})=\varnothing$, противоречит условию $od(x_1)\ge n-1$.

Случай 3. $\mathrm{I}(u,A)=\varnothing$.

Учитывая рассмотренные случаи 1 и 2, можем предполагать, что $O(u,A)=\varnothing$, поскольку иначе, если $O(u,A)\neq\varnothing$, то в обратном орграфе $\overline{G}$ имеет место случай 1 или 2.

Тогда $|A|\le 3$ и если $z\in A-\{u\}$, то $id(z,C_k)\ge 2$ и $od(z,C_k)\ge 2$. Поэтому по лемме 2, существует такое $i\in[1,k]$, что $x_iz\in G$ и $zx_{i+1}\in G$ или $zx_{i+3}\in G$.

Пусть $x_iz\in G$ и $zx_{i+1}\in G$. Тогда, если $x_i\in\{x_1,x_3,\dots,x_{k-1}\}$, то контур $C=x_i\,z\,x_{i+1}\,u\,x_{i+4}\dots x_i$ длины k содержит вершину u, а если $x_i\in\{x_2,x_4,\dots,x_k\}$, то $C=x_i\,z\,x_{i+1}\,x_{i+2}\,u\,x_{i+5}\dots x_i$ есть контур длины k, который содержит вершину u.

Пусть теперь $x_iz\in G$ и $zx_{i+3}\in G$. В этом случае вновь легко найти контур длины k, который содержит вершину u.

Итак, всевозможные случаи рассмотрены. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Вершина u не смежна двум вешинам контура C_k.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно. Тогда, по лемме 6, некоторая вершина контура C_k не смежна с вершиной u. Пусть, для определенности, вершина u не смежна с вершиной x_1. Имеем, что вершина u смежна со всеми вершинами множества $\{x_2,x_3,\dots,x_k\}$.

Рассмотрим следующие возможные случаи.

Случай 1. x_2u, $ux_k\in G$.

Тогда, по лемме 4, имеем $k-$нечетное и

$$\{x_2,x_4,\dots,x_{k-1}\}\to u\to\{x_3,x_5,\dots,x_k\}. \tag{7}$$

Сначала докажем

Утверждение 1^0. Для любой вершины $z \in A-\{u\}$, если для некоторого $i \in [1,k]$ имеет место $x_i z \in G$, то $zx_{i+1} \notin G$ и $zx_{i+3} \notin G$.

Доказательство 1^0. Предположим, что $x_i z \in G$ и $zx_{i+1} \in G$ или $zx_{i+3} \in G$.

Пусть $x_i z$, $zx_{i+1} \in G$. Тогда, если $5 \le i \le k+1$, то $C = x_i zx_{i+1} \dots x_2 u x_3 \dots x_i$, а если $2 \le i \le 4$, то $C = x_i zx_{i+1} \dots x_{k-3} ux_k x_1 \dots x_i$, а это является противоречием.

Пусть теперь $x_i z$, $zx_{i+3} \in G$. Тогда, если $3 \le i \le k-1$, то $C = x_i zx_{i+3} \dots x_2 u x_3 \dots x_i$, а если $x_i \in \{x_k, x_1, x_2\}$, то $C = x_i zx_{i+3} \dots x_{k-1}$ $u x_k x_1 \dots x_i$.

Итак, вновь имеем, что вершина u принадлежит контуру длины k, а это противоречит нашему предположению. Полученное противоречие доказывает утверждение 1^0:

Из леммы 2 и из утверждения 1^0 следует, что для любой вершины $z \in A-\{u\}$, если $id(z,C_k) \ge 2$, то $od(z,C_k) \le 1$, а если же $od(z,C_k) \ge 2$, то $id(z,C_k) \le 1$.

Пусть $od(z,C_k) \le 1$. Тогда $od(z,A) \ge n-2$. Так как $E(\{x_1, x_3, \dots, x_k\} \to u) = \varnothing$ $(k \ge 9)$, то для некоторого $y \in O(z, A-\{u\})$ имеет место $yu \in G$. Отсюда и из (7), по лемме 2 получим

$$E(\{x_1, x_3, x_5, x_{k-1}\} \to z) = \varnothing.$$

Поэтому, так как $od(z,C_k) \le 1$, то вершина z не смежна по крайней мере трем вершинам контура C_k. Пришли к противоречию.

Аналогичным образом получим, что для любой $z \in A-\{u\}$ имеет место $id(z,C_k) \ge 2$. Следовательно, случай 1 не имеет места.

Случай 2. $u \to \{x_2, x_k\}$ или $\{x_k, x_2\} \to u$.

Будем рассматривать только случай $u \to \{x_2, x_k\}$, так как, если $\{x_k, x_2\} \to u$, то в обратном орграфе $\overline{G}$ имеет место случай $u \to \{x_2, x_k\}$.

По лемме 5 имеем $od(u,C_k) \ge 2$ и $id(u,C_k) \ge 2$. Отсюда и из $ux_k \in G$, с помощью леммы 4 получим, что x_{k-1} $u \in G$ и

$$u \to \{x_k, x_{k-2}, x_{k-4}, \dots, x_{k-2s}, x_2\}, \tag{8}$$

где $k-2s=4$ или $k-2s=3$. Из (8) следует, что $id(u,C_k) < od(u,C_k)$. Поэтому $I(u,A) \ne \varnothing$, т.е. для некоторой вершины $y \in A$ имеет место $yu \in G$. Из (8) и из леммы 3 следует, что $E(\{x_{k-1}, x_{k-3}, x_{k-5}, x_{k-7}\} \to y) = \varnothing$. Следовательно, $od(z,C_k) \ge 2$.

Теперь покажем, что $id(z,C_k) \ge 2$. Допустим противное, т.е. $od(z,C_k) \le 1$. Тогда $id(y,A) \ge n-2$ и, по лемме 3, имеет место

$$E(B \to O(y,A)) = \varnothing, \tag{9}$$

где $B = \{x_i \,/\, u\, x_{i+4} \in G\}$. Так как $|B| \ge 5$, $|O(y,A)| \ge n-2$ и $zy \notin G$ или $zu \notin G$, где $z \in B$, то, по лемме 1, для некоторой вершины $x \in B$ имеет место $od(x) \le n-2$, что противоречит условию теоремы.

Из $id(z,C_k) \ge 2$, $od(z,C_k) \ge 2$ и из леммы 2 следует, что для некоторого $i \in [1,k]$ имеет место $x_i y, yx_{i+1} \in G$ или $x_i y, yx_{i+3} \in G$.

Допустим, что $x_i y, yx_{i+1} \in G$. Тогда из $zu, ux_2 \in G$ и из леммы 3 следует, что $i \neq k-1$. Учитывая (8) и $x_{k-3}u \in G$, получим, что, если $2 \le i \le k-2$, то $C = x_i z x_{i+1} \dots x_2 \dots x_{k-3}\, u\, x_k$, т.е. $C = x_i z x_{i+1} \dots x_{k-1}\, u\, x_2 \dots x_i$, а если $x_i \in \{x_1, x_k\}$, то вершина u находится на контуре длины k, что является противоречием.

Пусть теперь $x_i z, zx_{i+3} \in G$. Так как $u \to \{x_2, x_4\}$, то из леммы 3 следует, что $i \neq k-1$ и $i \neq k-3$. Если $x_i \in \{x_k, x_1, x_2, \dots, x_{k-4}\}$, то $C = x_{k-1} u x_k \dots x_i z x_{i+3} \dots x_{k-1}$, а если $x_i = x_{k-2}$, то $C = x_{k-2} z x_1 x_2 \dots x_{k-3}\, u\, x_{k-2}$. Вновь пришли к противоречию.

Итак, во всех возможных случаях мы пришли к противоречию. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Если вершина u в подорграфе $\langle A \rangle$ не принадлежит контуру длины 3, то $A = \{y, z, u\}$ и $yu, zu \in G$.

Доказательство. Имеем, что

$$E(O(u,A) \to I(u,A)) = \varnothing.$$

Предположим, что $yz \in G$ и $y, z \in O(u,A)$. Тогда из леммы 3 следует, что если $x_i u \in G$, то $zx_{i+4} \in G$ и

$$E(\{y,z\} \to x_{i+3}) = \varnothing. \tag{10}$$

Следовательно,

$$E(z \to I(u,A) \cup B \cup \{u,y\}) = \varnothing,$$

где $B = \{x_j \,/\, x_{j-3}u \in G$ или $x_{j-4}u \in G\}$. Поэтому, так как $|I(u,A) \cup B| \ge n$, то $od(z) \le n-2$, а это противоречит условию $od(z) \ge n-1$.

Теперь предположим, что подорграф $\langle O(u,A) \rangle$ не содержит дуг. Нетрудно убедиться, что $|O(u,A)| \le 2$. Допустим, что $y, z \in O(u,A)$. Тогда $od(z, C_k) \ge n-1$. Если $v \in I(u,A)$, то, по лемме 3, имеет место, если $zx_i \in G$, то $x_{i-4}v \notin G$. Следовательно

$$E(B \cup \{u,y,z\} \to v) = \varnothing,$$

где $B = \{x_j \,/\, zx_{j+4} \in G\}$. Из $od(z, C_k) \ge n-1$ следует, что $|B \cup \{u,y,z\}| \ge n-2$. Значит, $id(v) \le n-2$, что является противоречием.

Итак, получили, то $I(u,A) = \varnothing$, т.е. $id(u, C_k) \ge n-1$. Отсюда и из (10) следует что

$$x_i u \in G \text{ тогда и только тогда, когда } vx_{i+3} \notin G, \tag{11}$$

где $v \in \{y, z\}$. Поэтому $O(y) = O(z)$.

Случай 1. Для некоторого $j \in [1,k]$ имеет место $\{x_j, x_{j+1}\} \to u$ и $x_{j+2}u \notin G$.

Пусть для определенности $\{x_k, x_1\} \to u$ и $x_2 u \notin G$. Тогда, по лемме 3, имеем $ux_3 \notin G$ и

$$E(x_2, u) = E(\{y,z\} \to \{x_3, x_4\}) = \varnothing, \tag{12}$$

а, по (11), $\{y,z\} \to x_5$. Из (12) и из $E(y,z) = \varnothing$ следует, что $E(x_4 \to \{y,z\}) \neq \varnothing$. Отсюда, если $ux_4 \in G$, то $C = x_k x_1 u x_4 v x_5 \dots x_k$, где $v \in \{y,z\}$, а это невозможно. Поэтому будем предполагать, что $ux_4 \notin G$.

Так как $ux_3 \notin G$, то $x_3u \in G$ или $E(x_3,u)=\varnothing$.

Подслучай 1.1. $x_3u \in G$.

Если $ux_4 \in G$, то $\{x_3,x_4,...,x_l\} \to u$, где $4 \le l \le k-1$, $E(u,x_{l+1})=\varnothing$, $x_{l+2}u \in G$ и для любого $i \in [l+2,k-1]$ имеет место $|E(u \to \{x_i,x_{i+1}\})| \le 1$. Отсюда и из $\{x_k,x_1,x_3,x_4\} \to u$ следует, что $id(u,C_k) \ge od(u,C_k)+4$, а это является противоречием. Следовательно $E(u,x_4)=\varnothing$. Из $E(u,\{x_1,x_4\})=\varnothing$ и из $x_3u \in G$ следует, что $x_5u \in G$. Отсюда имеем

$$\{x_3,x_5,x_7,...,x_{k-1},x_k,x_1\} \to u.$$

Значит $id(u) > od(u)$, что невозможно.

Подслучай 1.2. $E(u,x_3)=\varnothing$.

Тогда $x_4u \in G$ и

$$\{x_4,x_6,...,x_{k-2},x_k\} \to u \to \{x_5,x_7,...,x_{k-1}\}.$$

Поэтому, так как $k \ge 10$, то $C = x_6ux_9...x_kx_1...x_4vx_5x_6$, где $v \in \{y,z\}$, что является противоречием.

Случай 2. Для любого $j \in [1,k]$ имеет место $|E(\{x_j,x_{j+1}\} \to u)| \le 1$.

Поскольку $id(u,C_k) \ge n-1$ и $k=2n-2$, то

$$\{x_1,x_3,...,x_{k-1}\} \to u; \ \{z,y\} \to \{x_1,x_3,...,x_{k-1}\}$$

и для любого $l \in [1,n-1]$ имеет место $E(x_{2l} \to \{z,y\}) \ne \varnothing$,Очевидно, что для некоторого $i \in [1,n-1]$ имеет место $ux_{2i} \in G$. В результате имеем $C = x_{2i-3}ux_{2i}vx_{2i+1}...x_{2i-3}$, где $v \in \{y,z\}$, а это противоречит нашему предположению, что вершина u не находится на контуре длины k.

Таким образом, доказали, что $|O(u,A)| \le 1$. Аналогичным образом получим, что $|I(u,A)| \le 1$. Следовательно, $|A|=3$ и если $A=\{y,z,u\}$, то $yu,uz \in G$. Лемма 8 доказана.

Лемма 9. Для любого $i \in [1,k]$ имеет место $E(u,\{x_i,x_{i+1}\}) \ne \varnothing$.

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы не верно, т.е. для некоторого $i \in [1,k]$ имеет место $E(u,\{x_i,x_{i+1}\})=\varnothing$. Пусть, для определенности, i=1, т.е. $E(u,\{x_1,x_2\})=\varnothing$.

Случай 1. $x_3u \in G$.

Из леммы 4 следует, что

$$\{x_3,x_5,x_7,...,x_{2l+1}\} \to u, \tag{13}$$

где $2l+1=k-1$ или $2l+1=k$. Так как $od(u,C_k) \ge 2$, то $ux_4,ux_6 \in G$. Отсюда, поскольку вершина u не находится на контуре длины k, получим, что для любого $i \in [1,k]$ имеет место

$$x_ix_{i+2} \notin G. \tag{14}$$

Из (13) следует, что для некоторой вершины $z \in A$ имеет место $uz \in G$. По лемме 3 имеем, что если $x_iu \in G$, то $zx_{i+3} \notin G$. Следовательно, так как $id(u,C_k) \ge 4$, то $id(z,C) \ge 2$.

Докажем, что $od(z,C_k) \ge 2$.

Предположим противное, т.е. $od(z,C_k)\le 1$. Тогда $|O(z,A)|\ge n-2$. Учитывая (13), по лемме 3 получим

$$E(O(z,A)\to\{x_4,x_7,x_9,x_{11}\})=\varnothing, \tag{15}$$

(возможно, что $x_{11}\in\{x_1,x_2\}$). Так как $E(\{x_8,x_5,u\}\to x_7)=\varnothing$ и $|O(z,A)\cup\{x_8,x_5,u\}|\ge n+1$, то $x_{11}x_7\in G$. Следовательно, по (14) и (15) имеем

$$E(O(z,A)\cup\{u,x_{12},x_7,x_9\}\to x_{11})=\varnothing.$$

Значит, $id(x_{11})\le n-2$, а это является противоречием. Итак, доказали, что $od(z,C_k)\ge 2$.

Имеем $id(z,C_k)\ge 2$ и $od(z,C_k)\ge 2$. Следовательно, по лемме 2, для некоторого $i\in[1,k]$ имеет место $x_iz\in G$ и $zx_{i+1}\in G$ или $zx_{i+3}\in G$.

Пусть $x_iz\in G$ и $zx_{i+3}\in G$. Легко заметить, что $i\ne 3$. Если $x_i\notin\{x_1,x_2\}$, то $C=x_3ux_4...x_izx_{i+3}...x_3$, а если $x_i\in\{x_1,x_2\}$, то $C=x_izx_{i+3}...x_5ux_8...x_k...x_i$, а это противоречит нашему предположению.

Пусть теперь $x_iz\in G$ и $zx_{i+1}\in G$. Из $x_3u,uz\in G$ и из леммы 3 следует, что $i\ne 5$. Тогда, если $x_i\notin\{x_3,x_4\}$, то $C=x_izx_{i+1}...x_3ux_8...x_i$, а если $x_i\in\{x_3,x_4\}$ и $ux_8\in G$, то $C=x_izx_{i+1}...x_5x_8...x_i$, что невозможно.

Очевидно, что $x_kx_3\notin G$, так как в случае $x_kx_3\in G$ имеем $C=x_kx_3...x_izx_{i+1}...x_5ux_8...x_k$, что невозможно.

Теперь предположим, что $ux_8\notin G$. Тогда $\{x_7,x_8,...,x_k,x_3,x_5\}\to u$, $od(u,C_k)=2$, и $|O(u,A)|\ge n-3$. Отсюда, по лемме 3, имеем

$$E(O(u,A)\cup\{u\}\to\{x_1,x_2,x_3,x_8\})=\varnothing. \tag{16}$$

Поэтому, так как $E(\{x_k,x_1,x_4\}\to x_3)=\varnothing$, то $x_8x_3\in G$. Отсюда, из (16) и из $E(\{x_9,x_6\}\to x_8)=\varnothing$ вытекает, что $x_5x_8\in G$. Поэтому, если $x_3z,zx_4\in G$, то $C=x_3uzx_4x_5x_8...x_3$, а если $x_4z,zx_5\in G$, то $C=x_3ux_4zx_5x_8...x_3$, что невозможно. Случай 1 рассмотрен.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих утверждений, которыми в дальнейшем часто будем пользоваться.

Утверждение 2[0]. Если $x_ku,ux_3\in G$ и для некоторого $i\in[3,k-2]$ имеет место $x_iu,ux_{i+1}\in G$, то $x_{k-1}x_1\notin G$, $x_1x_3\notin G$, $x_kx_2\notin G$ и $x_2x_4\notin G$.

Утверждение 3[0]. Если $x_ku,ux_3\in G$, то для любого $i\in[3,k-1]$ и для каждой $x\in\{x_1,x_2\}$ имеет место, если $x_ix\in G$, то $xx_{i+1}\notin G$.

Утверждение 4[0]. Если $x_ku,ux_3\in G$ и вершина x_1 (соответственно вершина x_2) смежна со всеми вершинами множества $\{x_3,x_4,...,x_{k-1}\}$ (соответственно множества $\{x_4,x_5,...,x_k\}$), то

$$|E(x_3\to x_1)|+|E(x_1\to x_{k-1})|\le 1,$$

$$(|E(x_2\to x_k)|+|E(x_2\to x_4)|\le 1).$$

Теперь рассмотрим

Случай 2. $x_k u, ux_3 \in G$ и вершина u в подорграфе $\langle A \rangle$ принадлежит контуру $C_3 = uzyu$.

Пусть для определенности

$$R = \{x_k, x_{k-1}, ..., x_{k-s}\} \to u \to \{x_3, x_4, ..., x_m\} = F, \qquad (17)$$

где m и s с этими свойствами являются максимальними и m≥3, s ≥0.

Подслучай 2.1. | F | ≥ 3 и | R | ≥ 3, т.е. m≥5 и s ≥2.

Из (17) и из леммы 3 следует, что

$$E(z, x_1) = E(y, x_2) = \varnothing \text{ и } yx_1, x_2 z \in G.$$

Отсюда имеем, что вершина x_1 смежна со всеми вершинами множества $\{x_3, x_4, ..., x_k\}$. Если $x_1 x_3 \in G$, то $C = x_{k-2} uzyx_1 x_3 ... x_{k-2}$, а если $x_{k-1} x_1 \in G$, то $C = x_{k-1} x_1 x_2 zyux_5 ... x_{k-1}$, что невозможно. Значит, $x_3 x_1, x_1 x_{k-1} \in G$, а это противоречит утверждению 4^0.

Подслучай 2.2. | F | ≥ 4 и | R | =2, т.е. m≥6 и s =1 .

Тогда из (17) и из леммы 3 следует, что $E(x_2, z) = \varnothing$ и $yx_2 \in G$. Отсюда, если $x_2 x_4 \in G$, то контур $C = x_{k-1} uzyx_2 x_4 ... x_{k-1}$ длины k содержит вершину u. Значит $x_4 x_2 \in G$. Отсюда и из утверждений 3^0 и 4^0 вытекает, что $\{x_4, x_5, ..., x_k, x_1\} \to x_2$ и $|O(x_2, A)| \geq n-2$. По лемме 3 имеем, что $E(O(x_2, A) \to u) = \varnothing$. Отсюда, так как $u \to \{x_3, x_4, x_5, x_6\}$, получим $id(u) \leq n-2$, что противоречит условию $id(u) \geq n-1$.

Подслучай 2.3. $|F| \geq 4$ и $|R| = 1$, т.е. m≥6 и s=0.

Тогда $ux_{k-1} \in G$. Так как $k \geq 9$ и $id(u, C_k) \geq 2$, то $x_{k-2} u \in G$. Отсюда, по лемме 3, имеем $E(x_1, z) = \varnothing$. Следовательно, вершина x_1 смежна со всеми вершинами множества $\{x_3, x_4, ..., x_k\}$. Из $x_{k-2} u$, $ux_{k-1} \in G$, и из утверждения 2^0 следует, что $x_1 x_{k-1} \in G$ и $x_3 x_1 \in G$, а это противоречит утверждению 4^0.

Подслучай 2.4. | F | =3 и | R | =2, т.е. m=5 и s=1.

Тогда $ux_{k-2} \in G$ и $x_6 u \in G$. Отсюда, так как $k \geq 9$, то $x_{k-3} u \in G$. Поэтому, учитывая (17), по лемме 3 получим $E(x_1, y) = \varnothing$ и вершина x_1 смежна со всеми вершинами множества $\{x_2, x_3, ..., x_k\}$. Так как $x_{k-3} u$, $ux_{k-2} \in G$, то по утверждению 3^0 имеем $x_1 x_{k-1} \in G$ и $x_3 x_1 \in G$, что противоречит утверждению 4^0.

Подслучай 2.5. | F | =3 и | R | =1, т.е. m=5 и s=0.

Тогда ux_{k-1}, $x_6 u \in G$. Из $x_6 u$, $ux_{k-1} \in G$ с помощью леммы 4 получим $x_{k-2} u \in G$. Отсюда, по лемме 3, имеем $E(x_1, z) = \varnothing$ и вершина x_1 смежна со всеми вершинами множества $\{x_3, x_4, ..., x_{k-1}\}$. Кроме того, так как $x_{k-2} u, ux_{k-1} \in G$, то по утверждению 2^0 имеет место $x_1 x_{k-1}$, $x_3 x_1 \in G$, а это противоречит утверждению 4^0.

Подслучай 2.6. | F | = | R | =2, т.е. m=4 и s=1.

Тогда $x_5 u, ux_{k-2} \in G$. Следовательно, по лемме 4, $x_{k-3} u \in G$. Отсюда, по лемме 3, $E(x_1, y) = \varnothing$ и вершина x_1 смежна со всеми вершинами множества $\{x_3, x_4, ..., x_{k-1}\}$. Так как $x_{k-3} u$, $u x_{k-2} \in G$, то, по утверждению 2^0 имеем $x_1 x_{k-1}$, $x_3 x_1 \in G$, а это противоречит утверждению 4^0.

Подслучай 2.7. | F | =2 и | R | =1, т.е. m=4 и s=0.

Тогда $x_5 u, ux_{k-1} \in G$, и по лемме 4

$$\{x_5, x_7, \ldots, x_{k-2}\} \to u \to \{x_4, x_6, \ldots, x_{k-1}\} \qquad (18)$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что $zx_1 \notin G$ и $x_2z \notin G$. Кроме того, так как $x_{k-2}u, ux_{k-1} \in G$, то с помощью утверждений 2^0 и 3^0 получим, что вершина x_1 (x_2) не смежна с некоторой вершиной множества $\{x_3, x_4, \ldots, x_k\}$. Следовательно, $x_1z, zx_2 \in G$, по (18), имеем, что $C = x_3ux_8 \ldots x_kx_1zx_2 \ldots x_5$ есть контур длины k, который содержит вершину u, а это невозможно.

Подслучай 2.8. $|F| = |R| = 1$, т.е. m=3 и s=0.

Тогда имеем, что $ux_3, x_4u, x_ku, ux_{k-1} \in G$. По лемме 4 имеем

$$\{x_4, x_6, \ldots, x_k\} \to u \to \{x_3, x_5, \ldots, x_{k-1}\}.$$

Отсюда, учитывая утверждение 2^0 и 3^0, получим $x_1z, yx_2 \in G$ и $C = x_{k-2}uzyx_2 \ldots x_{k-2}$ есть контур длины k, который содержит вершину u, а это противоречит нашему предположению.

Таким образом, всевозможные подслучаи случая 2 рассматрены (учитывая и обратный орграф $\overline{G}$). Случай 2 рассмотрен.

Случай 3. $x_k u$, $u x_3 \in G$ и вершина u в подорграфе $\langle A \rangle$ не принадлежит контуру длины 3..

Тогда, по лемме 8 имеем, что $A = \{y, u, z\}$, $uz \in G$ и $z \in G$ и $zy \notin G$.

Подслучай 3.1. $x_4u \in G$.

Из $od(u) = id(u) = n - 1 \geq 5$ и из леммы 4 следует, что

$$\{x_4, x_6, \ldots, x_k\} \to u \to \{x_3, x_5, \ldots, x_{k-1}\}. \qquad (19)$$

Очевидно, что $id(z, C_k) \geq 2$ и $od(z, C_k) \geq 2$. Следовательно, по лемме 2, для некоторого $i \in [1, k]$ имеет место $x_iz \in G$ и $z x_{i+1} \in G$ или $z x_{i+3} \in G$.

Пусть x_iz, $z x_{i+1} \in G$. Так как $x_k u \in G$, то, по лемме 3, имеем $i \neq 2$. Учитывая (19) получим, если $x_i \notin \{x_1, x_k\}$, то контур $C = x_kux_3 \ldots x_izx_{i+1} \ldots x_k$ длины k содержит вершину u, а если же $x_i \in \{x_1, x_k\}$, то контур $C = x_iz x_{i+1} \ldots x_4u x_7 \ldots x_i$ длины k содержит вершину u, а это противоречит нашему предположению.

Пусть теперь x_iz, $z x_{i+3} \in G$. Тогда легко заметить, что $i \neq 4$. Пользуясь (19) получим, если $x_i \notin \{x_2, x_3\}$, то контур $C = x_iz x_{i+3} \ldots x_4u x_5 \ldots x_i$, длины k содержит вершину u, а если $x_i \in \{x_2, x_3\}$, то контур $C = x_1z x_{i+3} \ldots x_6u x_7 \ldots x_1$ содержит вершину u. Итак, получили, что вершина u принадлежит контуру длины k, а это противоречит нашему предположению.

Подслучай 3.2. $ux_4 \in G$.

Можем предполагать, что $x_{k-1}u \in G$ (в случае $u x_{k-1} \in G$ для орграфа $\overline{G}$ имеет место рассмотренный случай $x_4u \in G$).

Нетрудно убедиться, что справедливо

Утверждение 5^0. $x_iy \subset G$ тогда и только тогда, когда $z x_{i+4} \notin G$.

Действительно, по лемме 3 имеем, если $x_iy \in G$, то $z x_{i+4} \notin G$, а из $id(y, C_k) \geq n - 1$, и из $E(z \to \{u, y\} \cup B) = \varnothing$, где $B = \{x_i / x_{i-4}y \in G\}$, следует, что если $zx_{i+4} \notin G$, то $x_iy \in G$.

Так как $u \to \{x_3, x_4\}$, то по лемме 3 имеем $E(\{x_k, x_1\} \to y) = \varnothing$. Отсюда и из утверждения 5^0 следует, что $z \to \{x_4, x_5\}$. Аналогичным образом получим, что

$\{x_{k-1}, x_{k-2}\} \to y$. Отсюда и из $\{x_{k-1}, x_k\} \to u \to \{x_3, x_4\}$ с помощью леммы 3 нетрудно убедиться, что

$$E(z, x_3) = E(x_k, y) = \varnothing, \tag{20}$$

$$z x_2 \in G \text{ и } x_1 y \notin G. \tag{21}$$

Подслучай 3.2.1. $E(x_2, z) = \varnothing$.

Тогда

$$E(x_2, \{u, z\}) = \varnothing \text{ и } E(z, \{x_2, x_3\}) = \varnothing.$$

Следовательно, вершина x_2 (вершина z) смежна со всеми вершинами множества $\{x_3, x_4, \ldots, x_k\}$ (множества $\{x_4, x_5, \ldots, x_k, x_1\}$). Очевидно, что для любого $i \in [4, k-1]$ имеет место, если $x_i z \in G$, то $z x_{i+1} \notin G$, так как если $x_i z \in G$ и $z x_{i+1} \in G$, то контур $C = x_k u x_3 \ldots x_i z x_{i+1} \ldots x_k$ длины k, проходит через вершину u, что невозможно. Отсюда получим, что $z \to \{x_4, x_5, \ldots, x_{n+2}\}$ и $u \to \{x_3, x_4, \ldots, x_{n-1}\}$. Имеем, что $x_n u \in G$ или $x_{n+1} u \in G$. Поэтому, если $x_2 x_5 \in G$, то $C = x_2 x_5 x_6 \ldots x_n u z x_{n+1} \ldots x_2$ или $C = x_2 x_5 x_6 \ldots x_{n+1} u z x_{n+2} \ldots x_2$ есть контур длины k, который проходит через вершину u. Значит $x_2 x_5 \notin G$. Отсюда и из утверждения 3^0 следует, что $\{x_5, x_6, \ldots, x_k\} \to x_2$. Следовательно, $od(x_2) \le 3$, а это противоречит условию $od(x_2) \ge n-1$.

Подслучай 3.2.2. $E(x_2, z) \ne \varnothing$.

Тогда, по (21), $x_2 z \in G$. Из $z x_5 \in G$ следует, что для любого $i \in [5, k-3]$, если $x_i u \in G$, то $u x_{i+1} \notin G$, так как иначе контур $C = x_2 z x_5 \ldots x_i u x_{i+1} \ldots x_2$ длины k содержит вершину u. Следовательно,

$$\{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_k\} \to u \to \{x_3, x_4, \ldots, x_n\}. \tag{22}$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что

$$E(\{x_k, x_1, x_2, \ldots, x_{k-3}\} \to y) = \varnothing. \tag{23}$$

Так как $E(y, x_k) = \varnothing$ (по(20)), то $E(y \to \{x_1, x_2\}) \ne \varnothing$. Из (23) и из утверждения 5^0 имеем, что

$$z \to \{x_4, x_5, \ldots, x_{n+1}\}. \tag{24}$$

Покажем, что

$$E(\{x_2, x_3, \ldots, x_n\} \to x_k) = \varnothing. \tag{25}$$

Предположим, что для некоторого $j \in [2, n]$ имеет место $x_j x_k \in G$. Тогда с помощью (22) и (24) получим, если $j \in [2, n-2]$ и $y x_1 \in G$, то $C = x_j x_k u x_{j+2} \ldots x_{k-2}\, y x_1 x_2 \ldots x_j$, а если $j \in [2, n-2]$ и $y x_2 \in G$, то $C = x_j x_k u x_{j+1} \ldots x_{k-2}\, y x_2 \ldots x_j$, если $j = n-1$, то $C = x_{n-1} x_k x_1 x_2 z x_{n+1} \ldots x_{k-2} u x_3 \ldots x_{n-1}$, если $j = n$, то $C = x_n x_k x_1 x_2 z x_{n+1} \ldots x_{k-2} u x_4 \ldots x_n$.

Таким образом во всех случаях получили контур длины k, который содержит вершину u, а это является противоречием. Итак, (25) доказано.

Из (25) и из $E(\{u, y, x_1\} \to x_k) = \varnothing$ следует, что $id(x_k) \le n-2$, а это противоречит условию $id(x_k) \ge n-1$.

Итак, рассмотрены всевозможные случаи. Лемма 9 доказана.

Лемма 10. Если для любого $i \in [1, k]$ имеет место $E(u, \{x_i, x_{i+1}\}) \ne \varnothing$, то вершина u в подорграфе $\langle A \rangle$ находится на контуре длины 3.

Доказательство. По лемме 7 имеем, что вершина u не смежна двум вершинам контура C_k. Пусть, для определенности, $E(u, \{x_1, x_l\}) = \varnothing$. Имеем, что $l \ne 2$ и $l \ne k$.

Предположим, что утверждение леммы неверно, т.е. вершина u в подорграфе $\langle A\rangle$ не находится на контуре длины 3. Тогда, по лемме 8, $A=\{u,y,z\}$, т.е. $k=2n-2$, yu, $uz\in G$ и $zy\notin G$. Так как $id(z,C_k)\geq 2$ и $od(z,C_k)\geq 2$, то по лемме 2, для некоторого $i\in[1,k]$ имеет место $x_iz\in G$ и $zx_{i+1}\in G$ или $zx_{i+3}\in G$.

Случай 1. $x_ku\in G$. Тогда легко заметить, что $x_2u\in G$.

Нетрудно убедиться, что $ux_{l-1}\in G$. Действительно, в противном случае имеем $x_{l-2}u\in G$, $x_{l-1}u\in G$ и для любого j, где $3\leq j\leq l$-1 или $l+1\leq j\leq k-1$, имеет место $|E(u\to\{x_j, x_{j+1}\}|\leq 1$. Следовательно, $id(u,C_k)>od(u,C_k)$, а это противоречит равенству $id(u,C_k)=od(u,C_k)$.

Так как $ux_{l-1}\in G$, то $l\geq 4$ и по лемме 4 имеет место

$$\{x_2,x_4,\dots,x_{l-2}\}\to u\to\{x_3,x_5,\dots,x_{l-1}\}.$$

Отсюда и из $id(u)=od(u)$ следует, что $l\leq k$-2 и l– четное число. Очевидно, что $ux_{l+1}\in G$, так как в случае $x_{l+1}u\in G$ получим, что $id(u)>od(u)$.

Пусть x_iz, $zx_{i+1}\in G$. Тогда из $x_{l-2}u\in G$ и из леммы 3 следует, что $i\neq l$. Если $x_i\notin\{x_{l-2}, x_{l-1}\}$, то, так как $x_{l-2}u$, $ux_{l+1}\in G$, контур $C=x_{l-2}u\,x_{l+1}x_{l+2}\dots$ $x_iz\,x_{i+1}\dots x_{l-2}$ проходит через вершину u и имеет длину k Если $x_i=x_{l-1}$ или $x_i=x_{l-2}$ и $l-2\geq 3$, то $C=x_ku\,x_3\dots x_iz\,x_{i+3}\dots x_k$ есть контур длины k, а если $x_i=x_{l-2}$ и l=4, то $zx_3\in G$, а это, так как $x_ku\in G$ противоречит лемме 3.

Допустим, что если $x_jz\in G$, то $zx_{j+1}\notin G$.

Пусть теперь x_iz, $zx_{i+3}\in G$. Так как x_ku, $x_2u\in G$, то по лемме 3, имеем, что $x_i\notin\{x_k, x_2\}$. Если $x_i\neq x_1$, то контур $C=x_2u\,x_3\dots x_iz\,x_{i+3}\dots x_2$ длины k проходит через вершину u, что невозможно. Значит, $x_i=x_1$, т.е. x_1z, $zx_4\in G$. Если $l\geq 6$, то $C=x_1z\,x_4u\,x_5\dots x_kx_1$. Поэтому будем предполагать, что l=4. Легко заметить, что для всех $j\in[6, k$-2$]$ имеет место, если $x_ju\in G$, то $ux_{j+1}\notin G$. Отсюда, если $x_5z\in G$, то нетрудно убедиться, что

$$|E(z\to\{x_5, x_6, \dots, x_k, x_1, x_2\})|\leq 1.$$

Следовательно, $od(z)\leq 2$, что невозможно. Значит, $x_5z\notin G$ и $E(z, x_5)$=∅. Из $x_{k-1}u\in G$ и из леммы 3 следует, что $zx_2\notin G$. Далее, легко заметить, что (так как $k\geq 10$)

$z\to\{x_6,x_7,\dots,x_{n+3}\}$.

Допустим, что $x_jx_1\in G$, где $3\leq j\leq$n+2. Тогда, если $5\leq j\leq$n+2, то $C=x_jx_1x_2z\,x_{j+1}\dots x_ku\,x_5\dots x_j$, если j=3, то $C=x_3x_1x_2z\,x_6\dots x_ku\,x_3$, а если j=4, то $C=x_4x_1z\,x_6\dots x_ku\,x_3x_4$. Таким образом, получили, что существует контур длины k, который проходит через вершину u, а это является противоречием.

Случай2. $ux_k\in G$.

Можем предполагать, что $x_2u\in G$, так как в случае $ux_2\in G$ в обратном орграфе $\overline{G}$ имеет место рассмотренный случай 1.

Если $ux_{k-1}\in G$, то легко заметить, что $u\to\{x_{l+1},x_{l+2},\dots,x_k\}$ и $ux_{l-1}\in G$. Следовательно, в орграфе $\overline{G}$ для вершины x_l имеет место рассмотренный случай 1. Поэтому будем предполагать, что $ux_{k-1}\notin G$. Аналогичным образом получим, что $x_3u\notin G$. Если l=3 или $l=k$-2, то $x_4u\in G$ или $ux_{k-2}\in G$ и в орграфе G или в обратном орграфе $\overline{G}$ имеем рассмотренный случай 1. Поэтому будем предполагать, что $4\leq l\leq k$-2. Тогда легко заметить, что ux_3, $x_{k-1}u\in G$ и

$$\{x_2,x_4,...,x_{l-2},x_{l+1},x_{l+3},...,x_{k-1}\} \to u \to \{x_3,x_5,...,x_{l-1},x_{l+2},x_{l+4},...,x_k\}. \quad (26)$$

Так как $k \geq 10$, то можем предполагать, что $l \geq 6$.

Пусть $x_i z \in G$ и $z x_{i+1} \in G$. Тогда из $x_2 u \in G$ и из леммы 3 следует, что $i \neq 4$. С помощью (26) получим, что если $x_i \notin \{x_2, x_3\}$, то $C = x_2 u x_5 ... x_i z x_{i+1} ... x_2$, если $x_i \in \{x_2, x_3\}$ и $l \leq k-4$, то $C = x_i z x_{i+1} ... x_{k-3} u x_k ... x_i$, а если $x_i \in \{x_2, x_3\}$ и $l = k-2$, то $C = x_i z x_{i+1} ... x_4 u x_7 ... x_i$, т.е. имеем, что вершина u принадлежит контуру длины k.

Пусть теперь $x_i z \in G$ и $z x_{i+3} \in G$. Тогда $i \neq 2$. Если $x_i \notin \{x_1, x_k\}$, то $C = x_2 u x_3 ... x_i z x_{i+3} ... x_2$, а если $x_i \in \{x_1, x_k\}$, то $C = x_i z x_{i+3} ... x_{k-1} u x_k$. Вновь получили, что вершина u находится на контуре длины k, а это противоречит нашему предположению. Лемма 10 доказана.

Лемма 11. Если для любого $x_i \in [1,k]$ имеет место $E(u,\{x_i,x_{i+1}\}) \neq \varnothing$, то вершина u в подорграфе $\langle A \rangle$ не принадлежит контуру длины 3.

Доказательство. По лемме 7 имеем, что вершина u не смежна двум вершинам контура C_k. Пусть, для определенности, $E(u,\{x_1,x_l\}) = \varnothing$, где $3 \leq l \leq k-1$.

Предположим, что утверждение леммы не верно и пусть $u \in C_3 \subseteq \langle A \rangle$, где $C_3 = uzyu$.

По лемме 5 имеем, что $id(u,C_k) \geq 2$ и $od(u,C_k) \geq 2$.

Случай 1. $x_k u \in G$.

Тогда очевидно, что $x_2 u \in G$.

Подслучай 1.1 $\{x_2, x_3, ..., x_{l-1}\} \to u$.

Тогда $x_{l+1} u \in G$. Из $od(u,C_k) \geq 2$ имеем

$$E(u \to \{x_{l+1},x_{l+2},...,x_k\}) \geq 2.$$

Отсюда, с помощью леммы 4 получим

$$\{x_{l+1},x_{l+3},...\} \to u \to \{x_{l+2},x_{l+4}\}. \quad (27)$$

Так как $x_k u \in G$, то $|\{x_{l+1},x_{l+2},...,x_k\}| = k - l \geq 5$.

Нетрудно убедиться, что

$$x_l x_{l+2} \notin G \text{ и } x_{l-2} x_l \notin G. \quad (28)$$

Действительно, если $x_j x_{j+2} \in G$, где $j = l$ или $j = l-2$, то контур $C = x_1 x_2 ... x_j x_{j+2} ... x_{j+3} u x_{j+4} ... x_k x_1$ имеет длину k и содержит вершину u, а это противоречит нашему предположению.

Из $x_{l-1} u$, $u x_{l+2} \in G$ следует, что для любого $i \in [1, k]$ и $i \notin [l-2, l+1]$ имеет место, если

$$x_i x_l \in G, \text{ то } x_l x_{i+1} \notin G. \quad (29)$$

Действительно, если для некоторого $x_i \in [1, k]$ и $i \notin [l-2, l+1]$ имеет место $x_i x_l$, $x_l x_{i+1} \in G$, то $C = x_i x_l x_{i+1} ... x_{l-1} u x_{l+2} ... x_i$, а это противоречит нашему предположению.

Из (27) и из (29) легко получим, что вершина x_l не смежна с некоторой вершиной из множества $V(C_k) - \{x_{l-1}, x_l, x_{l+1}\}$. Значит, x_l смежна со всеми вершинами множества $A - \{u\}$. В частности, $x_l z \in G$ или $z x_l \in G$. Очевидно, что $x_l z \notin G$, так как в случае $x_l z \in G$, имеем $C = x_l z y u x_{l+4} ... x_l$, а это является противоречием. Следовательно, $z x_l \in G$. Отсюда и из леммы 3 следует, что $l = 4$. Если $x_1 z \in G$, то $C = x_1 z y u x_5 ... x_k x_1$, а если $x_2 z \in G$, то $C = x_2 z y u x_6 ... x_k x_1 x_2$, а это невозможно.

Пусть $E(x_1, z)=\varnothing$. Так как $E(x_1, u)=\varnothing$, то вершина x_1 смежна со всеми вершинами контура C_k. Легко заметить, что $x_1 x_{k-1} \in G$, так как в случае $x_{k-1} x_1 \in G$ имеем контур $C= x_{k-1} x_1 x_2 u\, z\, x_4 \ldots x_{k-1}$ длины k, который проходит через вершину u. Если для некоторого $i \in [4, k-2]$ имеет место $x_i x_1$, $x_1 x_{i+1} \in G$, то $C = z\, x_1\ldots$ $x_i x_1 x_{i+1} \ldots x_k u\, z$, что невозможно. Поэтому $x_1 \to \{x_{k-1}, x_{k-2}, \ldots, x_4\}$ и $x_3 x_1 \in G$. Отсюда, если $z\, x_2 \in G$, то $C = x_k u\, z\, x_2 x_3 x_1 x_6 \ldots x_k$. Следовательно, $E(x_2, z)=\varnothing$. Поэтому вершины z и x_3 смежны между собой. Из леммы 2 следует, что $x_3 z \in G$. В результате получили $C = x_3 z x_4 x_5 u x_8 \ldots x_k x_1 x_2 x_3$. Вновь имеем контур длины k, который проходит через вершину u, а это невозможно.

Пусть теперь $z\, x_1 \in G$. Тогда $u x_{k-2} \in G$ и $\{x_{k-3}, x_{k-1}, x_k\} \to u$. Из леммы 3 следует, что $E(z \to \{x_k, x_2, x_3\}) = \varnothing$. Если $x_j z \in G$, где $x_j \in \{x_k, x_3\}$, то $C = x_j z\, x_{j-1} \ldots x_5 u\, x_8 \ldots x_k \ldots x_j$. Следовательно, $E(z, \{x_k, x_2, x_3\}) = \varnothing$, а это является противоречием.

Подслучай 1.2. $E(u \to \{x_2, x_3, \ldots, x_{l-1}\}) \neq \varnothing$, т.е. для некоторого $j \in [3, l-1]$ имеет место $u\, x_j \in G$.

Тогда из леммы 4 следует, что $u x_3 \in G$ и $l \geq 4$.

Подслучай 1.2.1. $x_{l-1} u \in G$.

Тогда $l \geq 5$ и $x_{l+1} u \in G$. Учитывая рассмотренный подслучай 1.1, можем предполагать, что $E(u \to \{x_{l+1}, x_{l+2}, \ldots, x_k\}) \neq \varnothing$. Отсюда получим, что $u\, x_{l+2} \in G$. Следовательно, для любого $j \in [1, k]$ имеет место $x_j x_{j+2} \notin G$, поскольку, в случае $x_j x_{j+2} \in G$, если $x_j \notin \{x_1, x_2\}$, то $C = x_j x_{j+2} \ldots x_2 u\, x_3 \ldots x_j$, а если $x_j \in \{x_1, x_2\}$, то $C = x_j x_{j+2} \ldots x_{l+1} x_{l+2} \ldots x_j$, что невозможно.

Имеем, что $\{x_2, x_{l-1}, x_{l+1}, x_k\} \to u$. Значит, по лемме 3

$$E(z \to \{x_3, x_5, x_{l+2}, x_{l+4}, x_k\}) = \varnothing.$$

Отсюда получим, что $id(z, C_k) \geq 2$.

Теперь покажем, что $od(z, C_k) \geq 2$.

Предположим, что $od(z, C_k) \leq 1$. Тогда $|O(z, A)| \geq n-2$. Пользуясь леммой 2, получим, что

$$E(O(z, A) \to B) = \varnothing, \tag{30}$$

где $B = \{x_j / x_{j-4} u \in G\}$.

Пусть $l \geq 6$. Тогда $x_4 u \in G$, $u\, x_6 \notin G$, $u\, x_{l+3} \notin G$ и $x_4, x_6, x_{l+3} \in B$. Кроме того, известно, что $E(\{x_2, x_5\} \to x_4) = E(\{x_4, x_7\} \to x_6) = E(\{x_{l+1}, x_{l+4}\} \to x_{l+3}) = \varnothing$.

Отсюда и из (30) получим, что $x_{l+2} \to \{x_4, x_6\}$. Следовательно, $id(x_{l+2}) \leq n-2$, что является противоречием. Итак, показали, что $od(z, C_k) \geq 2$.

Так как $od(z, C_k) \geq 2$ и $id(z, C_k) \geq 2$, то по лемме 2 имеем, что для некоторого $i \in [1, k]$ имеет место, если $x_i z \in G$, то $z\, x_{i+1} \in G$ или $z\, x_{i+3} \in G$. Тогда, если $x_i \notin \{x_{l-1}, x_l, x_{l+1}\}$, то имеем $C = x_i z x_{i+1} \ldots x_{l-1} u x_{l+2} \ldots x_i$ или $C = x_i z x_{i+3} \ldots x_{l+1} u x_{l+2} \ldots x_i$, а если $x_i \in \{x_{l-1}, x_l, x_{l+1}\}$, то имеем $C = x_i z x_{i+1} \ldots x_k u x_3 \ldots x_i$ или $C = x_i z x_{i+3} \ldots x_k x_1 x_2 u x_3 \ldots x_i$, соответственно, при $z\, x_{i+1} \in G$ и при $z\, x_{i+3} \in G$.

Итак, во всех возможных случаях мы пришли к противоречию. Подслучай 1.2.1. рассмотрен.

Подслучай 1.2.2. $ux_{l-1} \in G$ и $l \geq 4$.

Имеем, что $x_k u$, $x_2 u$, $ux_3 \in G$ и

$$\{x_2, x_4, ..., x_{l-2}\} \to u \to \{x_3, x_5, ..., x_{l-1}\}. \tag{31}$$

Для этого случая $ux_{l-1} \in G$ сначала докажем утверждения 6^0-9^0.

Утверждение 6^0. Если $x_i z \in G$, то $z x_{i+1} \notin G$, где $i \in [1,k]$.

Доказательство. Допустим, что $x_i z \in G$ и $z x_{i+1} \in G$. Так как $x_k u, u x_3 \in G$, то из леммы 3 следует, что $x_i \neq x_2$. Если $x_i \notin \{x_k, x_1\}$, то контур $C = x_k u x_3 ... x_i z x_{i+1} ... x_k$ длины k содержит вершину u. Следовательно, $x_i \in \{x_k, x_1\}$. Если $u x_5 \in G$, то имеем $C = x_i z x_{i+1} ... x_2 u x_5 ... x_i$, что невозможно.

Значит, $u x_5 \notin G$. Отсюда и из (31) следует, что l=4 и $x_5 u \in G$. Если $u x_8 \in G$, то $C = x_i z x_{i+1} ... x_5 u x_8 ... x_i$, что невозможно. Поэтому будем предполагать, что $x_8 u \in G$. Отсюда с помощью леммы 3 получим $\{x_7, x_8, ..., x_k\} \to u$. В результате имеем $x_{i-2} u, x_{i+1} z \in G$ и $C = x_{i-2} u z x_{i+1} ... x_{i-2}$, а это противоречит нашему предположению.

Утверждение 7^0. Если $x_i z \in G$, то $z x_{i+3} \notin G$, где $i \in [1,k]$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $i \in [1,k]$ имеет место $x_i z, z x_{i+3} \in G$. Из $x_k u, x_2 u \in G$, с помощью леммы 3, получим, что $x_i \notin \{x_k, x_2\}$. Если $3 \leq i \leq k-1$, то контур $C = x_2 u x_3 ... x_i z x_{i+3} ... x_2$ имеет длину k и проходит через вершину u. Поэтому $x_i = x_1$, т.е. $x_1 z, z x_4 \in G$. Легко заметить, что $u x_5 \notin G$, так как если $u x_5 \in G$, то $C = x_1 z y u x_5 ... x_k x_1$. Значит, $x_5 u \in G$ и l=4. Из $od(u, C_k) \geq 2$ следует, что $u x_6 \in G$ и $C = x_1 z x_4 z_5 u x_6 ... x_k x_1$, а это противоречит нашему предположению. Таким образом, утверждение 7^0 доказано.

Утверждение 8^0. Если $id(z, C_k) \geq 1$ и для некоторого $i \in [1,k]$ имеет место $z \to \{x_i, x_{i+1}\}$, то $id(z, C_k) = 1$, $x_{i-4} z \in G$, $z \to \{x_i, x_{i+1}, ..., x_{i-5}, x_{i-2}\}$, и $E(z, \{x_{i-1}, x_{i-3}\}) = \varnothing$.

Доказательство. Для определенности предположим, что $z \to \{x_i, x_{i+1}\}$ и $z x_{i-1} \notin G$. Из утверждений 6^0 и 7^0 следует, что

$$E(x_{i-1}, z) = E(\{x_{i-3}, x_{i-2}\} \to z) = \varnothing. \tag{31}$$

Если $E(z, x_{i-2}) = \varnothing$, то, по (31), $z x_{i-3} \in G$. Отсюда с помощью утверждения 6^0 получим, что $z \to \{x_i, x_{i+1}, ..., x_{i-3}\}$. В результате получим $id(z, C_k) = 0$, что противоречит условию $id(z, C_k) \geq 1$. Значит, $z x_{i-2} \in G$.

Теперь покажем, что $E(z, x_{i-3}) = \varnothing$.

Допустим противное, т.е. $E(z, x_{i-3}) \neq \varnothing$. Тогда из (31) следует, что $z x_{i-3} \in G$ и пусть $z \to \{x_{i-2}, x_{i-3}, ..., x_{i-s}\}, z x_{i-s-1} \notin G$, где s≥ 3. Из утверждений 6^0 и 7^0 имеем, что $E(z, x_{i-s-1}) =$ $\varnothing$ и $id(z, C_k) = 0$, что противоречит условию $id(z, C_k) \geq 1$. Следовательно, $E(z, x_{i-3}) = \varnothing$. Из $id(z, C_k) \geq 1$ и из утверждений 6^0 и 7^0 следует, что $x_{i-4} z \in G, z \to \{x_i, x_{i+1}, ..., z_{i-5}\}$ и $id(z, C_k) = 1$. Таким образом, утверждение 8^0 доказано.

Утверждение 9^0. Для любого $j \in [3, k-2]$ имеет место, если $x_j x_1 \in G$, то $x_1 x_{j+1} \notin G$.

Действительно, если $x_j x_1, x_1 x_{j+1} \in G$, то имеем контур $C = x_k u x_3 ... x_j x_1 x_{j+1} ... x_k$, что невозможно.

Рассмотрим отдельно случай l≥6 и случай l=4.

Случай. $l\geq 6$.

Тогда из $\{x_k, x_2, x_4\}\to u$ с помощью леммы 3 получим, что $id(z,C_k)\geq 1$. Кроме того легко убедуться, что $x_{k-1}x_1\notin G$ и $x_1x_3\notin G$. Отсюда и из утверждения 9^0 следует, что вторая вершина, которая не смежна с вершиной x_1, принадлежит контуру C_k. Значит, $E(x_1,z)\neq\varnothing$ и $zx_1\in G$, поскольку в случае $x_1z\in G$ имеем $C=x_1zyux_4...x_kx_1$, что невозможно.

Пусть $id(z,C_k)\geq 2$. Тогда из утверждений 6^0-8^0 следует, что $E(z,x_k)=\varnothing$ и $zx_2\notin G$. Кроме того, так как uz, zy, yu, $ux_3\in G$ то, по лемме 3, имеем $x_{k-1}z\notin G$. Следовательно, $E(z,x_{k-1})=\varnothing$ и $zx_{k-1}\in G$.

Допустим, что $E(z,x_{k-1})=\varnothing$.Тогда из утверждения 7^0 вытекает, что $zx_{k-2}\in G$. Поэтому, так как $E(z,\{x_k,x_{k-1}\})=\varnothing$ и $id(z,C_k)\geq 1$, то для некоторого $j\in[2, k\text{-}3]$ имеет место $x_jz, zx_{j-1}\in G$, а это противоречит утверждению 6^0.

Теперь допустим, что $zx_{k-1}\in G$. Из утверждений 6^0-8^0 следует, что $E(z,x_{k-2})=\varnothing$, $zx_{k-1}\in G$ и $id(z,C_k)\leq 1$, а это противоречит предположению $id(z,C_k)\geq 2$.

Пусть теперь $id(z,C_k)=1$. Тогда из (30) следует, что l=6 и $I(u,C_k)=\{x_k,x_2,x_4\}$. Отсюда $u\to\{x_7,x_8,...,x_{k-1}\}$. Так как $id(z,C_k)=1$ и $E(z\to\{x_3,x_5,x_7\})=\varnothing$, то $z\to\{x_2,x_4,x_6\}$ и, по утверждению 6^0 имеем, что $E(z,\{x_3,x_5\})=\varnothing$. Кроме того, поскольку, $x_7z\in G$, то для некоторого $j\in[7, k\text{-}1]$ имеет место x_jz , $z\,x_{j+1}\in G$, а это противаречит утверждению 6^0.

Итак, случай $l\geq 6$ рассмотрен.

Случай. l =4 и $x_5u\in$G.

Тогда имеем, что $\{x_2, x_5, x_7, x_k\}\to u$. Отсюда с помощью леммы 3 имеем, что $E(z\to\{x_3, x_5, x_8, x_{10}\})$=∅. Поэтому $id(z,C_k)\geq 2$. Следовательно, из леммы 2 и из утверждений (6^0), (7^0) следует, что $od(z,C_k)\leq 1$, т.е. $|O(z , A)|\geq$n-2. Из $od(u,C_k)\geq 2$ и из $x_5u\in G$, с помощью леммы 3, получим, что $ux_6\in G$. Отсюда, легко убедиться, что для любого $j\in[1, k]$ имеет место $x_jx_{j+2}\notin G$. Кроме того, так как $\{x_2, x_5, x_7, x_k\}\to u$,то

$$E(O(z , A)\to\{x_4, x_6, x_9, x_{11}\})=\varnothing.$$

Имеем, что

$$E(O(z , A)\cup\{u , x_{j+1}, x_{j-2}\}\to x_j)=\varnothing,$$

где $x_j\in\{x_4, x_9\}$, и значит $id(x_4)\leq n-2$ или $id(x_9)\leq n-2$, а это противоречит условию теоремы.

Случай. $l=4$ и $x_5u\notin G$, т.е. $u\,x_5\in G$.

Из $u\,x_5\in$G и из леммы 3 следует, что $x_1z\notin G$.

Пусть $E(x_1,z)=\varnothing$. Тогда вершина x_1 смежна со всеми вершинами контура C_k. Значит $x_1x_{k-1}\in G$ и, по утверднению 9^0, $x_1\to\{x_2, x_3, ..., x_{k-1}\}$. Из $x_1x_3\in G$ следует, что для любого $i\in[6, k\text{-}2]$, если $x_1u\in G$, то $u\,x_{i+1}\notin G$. Отсюда легко получим, что

$$u\to\{x_5, x_6, ..., x_m\} \text{ и } \{x_{m+1}, x_{m+2}, ... , x_k\}\to u,$$

где $5\le m\le k-1$. Если $yx_1\in G$, то $C=x_1x_5\ldots x_k u\, z\, y\, x_1$. Значит $x_1y\in G$. Имеем, что $D=\mathrm{I}(x_1A)\subseteq A-\{u,y,z\}$ и $|D|\ge n-2$. Если $ux\in G$, где $x\in D$, то $C=x_k u\, x\, x_1x_4\ldots x_k$, что невозможно. Следовательно, $E(u\to D)=\varnothing$. Отсюда и из $E(u\to\{y,x_1,x_2,x_4,x_k\})=\varnothing$ следует, что $od(u)\le n-2$, а это противоречит условию $od(u)\ge n-1$.

Пусть теперь $zx_1\in G$.

Сначала докажем, что $id(z,C_k)\ge 2$.

Предположим, что $id(z,C_k)\le 1$. Тогда $od(u,C_k)\le 3$ и $|\mathrm{I}(z,A-\{u\})|\ge n-3$.

Допустим, что $ux_6\in G$. Тогда $E(x_1\to B)=\varnothing$, где $B=\mathrm{I}(z,A-\{u\})$, так как если $x_1x\in G$, то $C=x_1x\,z\,y\,u\,x_6\ldots x_kx_1$, где $x\in B$. Отсюда, из $|B|\ge n-3$ и из $E(x_1\to\{x_k,u,z,x_4\})=\varnothing$, следует, что $x_1x_3\in G$ и $u\to\{x_5,x_6,\ldots,x_{k-1}\}$. Поэтому, с помощью леммы 3 получим

$$E(x_3\to B\cup\{u,x_1,x_2,x_5,z,y\})=\varnothing.$$

Отсюда $od(x_3)\le n-2$, что является противоречием.

Теперь допустим, что $x_6u\in G$. Так как $od(u,C_k)\le 3$, то $u\to\{x_7,x_8,\ldots,x_{k-1}\}$. Если $x_kz\in G$ или $x_kx\in G$, где $x\in B$, то $C=x_kz\,x_1x_2u\,x_5\ldots x_k$ или $C=x_kx\,z\,y\,u\,x_5\ldots x_k$, соответственно для $x_kz\in G$ и для $x_kx\in G$. В результате имеем, что

$$E(x_k\to B\cup\{x_{k-1},x_2,y,z\})=\varnothing.$$

Поэтому $x_k\to\{x_3,x_4,\ldots,x_{k-2}\}$. Если $x_4x\in G$, где $x\in B$, то $C=x_4x\,z\,y\,u\,x_7\ldots x_kx_3$, если $x_4z\in G$, то $C=x_4z\,y\,u\,x_5\ldots x_kx_4$, а если $x_4x_6\in G$, то $C=x_1x_2u\,x_3\ldots x_4x_6\ldots x_kx_1$. Следовательно, $E(x_4\to B\cup\{x_3,x_k,u,x_6,z\})=\varnothing$.
что приводит к противоречию. Итак, доказали, что $id(z,C_k)\ge 2$.

Так как $id(z,C_k)\ge 2$ и $zx_1\in G$, то из утверждений 6^0-8^0 следует, что $E(z,x_k)=\varnothing$, $zx_2\notin G$, $x_{k-2}z\notin G$. Если $x_{k-1}z\in G$, то $C=x_{k-1}z\,y\,u\,x_3\ldots x_{k-1}$. Значит, $x_{k-1}z\notin G$. Если $E(z,x_{k-1})=\varnothing$, то $zx_{k-2}\in G$ и для некоторой вершины x_j имеет место x_jz, $zx_{j+1}\in G$, а это противоречит утверждению 6^0. Значит, $zx_{k-1}\in G$ и $E(z,x_{k-2})=\varnothing$. Вновь получили, что для некоторой вершины x_j имеет место $x_jz\in G$ и $zx_{j+1}\in G$ или $zx_{j+3}\in G$, а это противоречит утверждению 6^0 или 7^0.

Таким образом, случай 1 рассмотрен.

Случай 2. $ux_k\in G$.

Будем предполагать, что x_2u, $ux_{l-1},x_{l+1}u\in G$, так как в противном случае в обратном орграфе $\overline{G}$ имеет место рассмотренный случай 1. Отсюда и из того, что вершина u не принадлежит контуру длины k следует, что

$$\begin{aligned}&\{x_2,x_4,\ldots,x_{l-2},x_{l+1},x_{l+3},\ldots,x_{k-1}\}\to u,\\ &u\to\{x_3,x_5,\ldots,x_{l-1},x_{l+2},x_{l+4},\ldots,x_k\}.\end{aligned}\qquad(32)$$

Легко заметить, что l и k являются четными числами. Из (32) следует, что $k\ge 10$ и

$$id(u,C_k)=od(u,C_k)=(k-2)/2\ge 4.\qquad(33)$$

Поскольку uz, zy, $yu\in\langle A\rangle$, то по лемме 3 имеем, что

$$\begin{aligned}&\text{если } x_iu\in G, \text{ то } zx_{i+3}\notin G,\\ &\text{если } ux_i\in G, \text{ то } x_{i-4}z\notin G.\end{aligned}\qquad(34)$$

Отсюда и из (33) получим, что $id(z,C_k)\ge 2$ и $od(z,C_k)\ge 2$. Следовательно, по лемме 2, существует такое $i\in[1,k]$, что $x_iz\in G$ и $zx_{i+1}\in G$ или $zx_{i+3}\in G$.

Пусть x_iz, $zx_{i+3}\in G$. Тогда, по (32), имеем, если $1\le i\le k-4$ или $i=k$, то $C=x_2ux_3...x_izx_{i+3}...x_2$, а если $k-3\le i\le k-1$, то $C=x_{k-1}ux_kx_1...x_izx_{i+3}...x_{k-1}$. Таким образом, получили, что вершина u находится на контуре длины k, а это противоречит нашему предположению.

Пусть теперь x_iz, $zx_{i+1}\in G$. Тогда из (34) следует, что $x_i\notin\{x_1,x_4\}$. Если $5\le i\le k$, то по (32) имеем $C=x_2ux_5...x_izx_{i+1}...x_1x_2$. Значит, $x_i\in\{x_2,x_3\}$. Тогда, если $k-l\ge 4$, то по (32), имеем $C=x_1x_2...x_izx_{i+1}...x_{l+3}ux_{l+4}...x_kx_1$. Следовательно $k-l\le 3$, т.е. $k-l=2$ и $l\ge 8$. Отсюда, по (32), имеем $C=x_1x_2...x_izx_{i+1}...x_4ux_7...x_kx_1$. Вновь получили, что вершина u принадлежит контуру длины k, а это противоречит нашему предположению.

Таким образом, все возможные случаи рассмотрены. Лемма 11 доказана.

Поскольку $|A|\ge 3$, то леммы 9-11 противоречат друг другу. Из полученного противоречия вытекает справедливость теоремы. Теорема доказана.

Литература

[1] Ф. Харари, Теория графов, Мир, Москва, 1973.

[2] J.Bang-Jensen and G.Gutin, Digraphs. Theory, Algorithms and Applications. Springer, 2001.

[3] Z.M.Song, Pancyclic oriented graphs. J.Graph Theory 18 (1994) 461-468.

[4] J.Bang-Jensen and Y.Guo, A Note on Vertex Pancyclic Oriented Graphs, Odense Universitet, Preprint 20 (1997).

[5] G.Gutin, Characterizations of Vertex Pancyclic and Pancyclic Ordinary Complete Multipartite Digraphs. Discrete Math. 141. (1995) 153-162.

[6] С.Х. Дарбинян, К.М. Мосесян, О панцикличности регулярных орграфов. ДАН Арм. ССР, 1978, т. LXVII, № 4, 208-211.

[7] С.Х. Дарбинян, О панцикличности направленных графов с большими полустепенями . Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники. № 14, Ереван (1985) 55-74.

Մեծ կիսաաստիճաններով ուղղորդված գրաֆների գագաթային պանցիկլիկության մասին

Ս. Դարբինյան և Ի. Կարապետյան

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում ապացուցվում է, որ երբ p-գագաթանի ($p\ge 13$) ուղղորդված G գրաֆի ցանկացած գագաթի լոկալ կիսաաստիճանները փոքր չեն $(p-3)/2$ թվից, ապա ցանկացած k, $9\le k\le p-3$, ամբողջ թվի համար, G գրաֆի յուրաքանչյուր գագաթ գտնվում է k երկարության կողմնորոշված ցիկլի վրա: