Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 29, 2007, 85–88.

О близости максимальных тупиковых распознающих систем в классе двухэлементных подмножеств

Сейран М. Варданян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА
e-mail: seyranv@ipia.sci.am

Аннотация

В статье определяется понятие близости распознающих систем и доказываются некоторые теоремы о количестве максимальных тупиковых распознающих систем данной близости.

Используемые определения и факты можно найти в [1,2,3,4]. Рассмотрим конечное множество $[n]=\{1,2,...n\}$, $n\geq5$. Через $R[n]$ обозначим множество подмножеств множества $[n]$. Пусть n^* является подмножеством множества $R[n]$.

Определение 1. Будем говорить, что элемент $i\in[n]$ распознаваем в n^*, если в n^* существуют такие подмножества множества $[n]$ (как элементы множества n^*), пересечение которых равняется $\{i\}$.

Определение 2. Будем говорить, что n^* является распознающим $[n]$, если любой элемент $i\in[n]$ распознаваем в n^*.

Так как $R[n]$ является распознающим множеством для $[n]$, то класс распознающих систем не является пустым. Определим классические понятия минимальности (максимальности) и тупиковости для вышеупомянутых обьектов.

Определение 3. Множество n^*, распознающее $[n]$, называется тупиковым, если любое подмножество множества n^* не является распознающим $[n]$.

Определение 4. Множество n^*, распознающее $[n]$, называется минимальным, если не существует распознаюшее множество с мощностью меньше чем $|n^*|$.

Определение 5. Тупиковое распознающее множество n^* называется максимальным если, любое распознающее множество мощностью большей, чем $|n^*|$ не является тупиковой.

Если рассматривается минимум (максимум) не в классе всех распознающих систем, а только в определенном подклассе, то такие минимумы (максимумы) часто будем называть локальными минимумами (максимумами).

Пусть, n^* является распознаюшей системой, причем все ее элементы взяты только из класса двухэлементных подмножеств. Таким распознающим системам можно следующим образом сопоставить граф: каждому элементу i поставим в соответствие вершину с номером i, а элементу $\{i, j\} \in n^*$ поставим в соответствие ребро между вершинами с номерами i и j. В [1] доказано, что длина минимальной распознающей системы в классе двухэлементных подмножеств $|n^*| \geq n$. Там же приведен пример распознающей тупиковой системы $n^*_0=\{\{1,3\}, \{1,4\}, \ldots, \{1,n1\}, \{1,n\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \ldots, \{2, n-1\}, \{2, n\}\}$ длиною 2(n-2). В [3] доказано, что, мощность максимальной тупиковой распознающей системы в классе двухэлементных подмножеств равна 2(n -2). Более того там же доказано, что граф соответствующий максимальной тупиковой системе является полным двудольным графом. Через R_0 обозначим множество всех двухэлементных подмножеств. Через R_1 обозначим множество всех тех двухэлементных подмножеств, которые содержатся в данной максимальной тупиковой распознающей системе n^*_0.

Теорема 1. Множество $R_0 - R_1$ не содержит тупиковой распознающей системы мощностью 2(n-2).

Доказательство. Сначала заметим, что мощность множества $R_0 - R_1$ равно (n(n-1)/2)-2(n-2). То есть по существу доля R_1 в R_0 является нулевой, так как $2(n-2)/(n(n-1)/2) \to 0$, при $n \to \infty$. Докажем что, тем не менее множество $R_0 - R_1$ не содержит тупиковую распознающую систему мощностью 2(n-2). Пусть $R_0 - R_1$ содержит такую распознающую систему. На основе [3] граф соответствующий такой системе является полным двудольным графом на множествах вершин V_1, V_2 причем $|V_1| = n-2$, $|V_2| = 2$, где локальная степень каждый вершины из V_1 равна 2, а локальная степень каждой вершины из V_2 равна n-2. Пусть множество V_2 состоит из элементов i и j, то есть $V_2 = \{ i, j \}$ $i \neq j$. Тогда все остальные элементы множества [n] , кроме i и j принадлежат V_1. Далее, если хотя бы один из элементов i и j совпадает с некоторым элементом из V_2 распознающей системы n^*_0, то на основе того, что граф соответствующей системы является полным двудольным графом, следовало бы, что n-2 элемента первой системы совпали с элементами второй системы. Следовательно, $i \neq 1$, $j \neq 2$ или $j \neq 1$, $i \neq 2$. Далее, по той же причине, что соответствующий граф является полным двудольным — следовало бы, что элементы 1 и 2 принадлежат множеству V_1. Но тогда ребра (i,1), (i,2), (j,1), (j,2) принадлежали бы обоим распознающим системам. А последнее невозможно, так как, эти ребра не принадлежат множеству $R_0 - R_1$.

Следствие. Локальный максимум на множестве $R_0 - R_1$ содержит 2(n--4) ребра.

Доказательство. Множество V_2 для множества $R_0 - R_1$ ребер не может содержать элементы 1 и 2, так как пересечение с R_1 содержало бы n-2 элемента. Следовательно, для V_2 можно брать любые два других элемента множества [n], кроме 1 и 2. А для множества V_1 придется не брать как элементы V_2 так и элементы 1 и 2. Следовательно, локальный максимум, для множества $R_0 - R_1$ будет содержать 2(n-2)- 4 =2(n-4) ребер. Через R_2 обозначим множество всех двухэлементных подмножеств некоторой максимальной тупиковой распознающей системы в множестве $R_0 - R_1$. На основе следствия теоремы 1 следует, что R_2 содержит 2(n-4) элементов. Рассмотрим индуктивный процес построения множеств R_m, $m=1,2,...$ Пусть уже построено R_m и $R_0 - R_1 - \ldots - R_m \geq n+4$.

Теорема 2. Множество $R_0 - R_1 - \ldots - R_m$ содержит единственный локальный максимум, причем мощность последнего на 4 меньше, чем аналогичный максимум для множества $R_0 - R_1 - \ldots - R_{m-1}$.

Доказательство. Как видно из процесса доказательства теоремы 1 на втором шаге множество V_2 не может содержать некий элемент множества V_2 первого шага. Аналогичным образом на m-том шаге множество V_2 не может содержать некий элемент множества V_2 предыдущего шага. После того, как на m-том шаге выбирается $V_2 = \{i_m, j_m\}$, то множество V_1 того же шага не может содержать как эти элементы так и элементы множества V_2 предыдущего шага. Следовательно, на m-том шаге локальный максимум будет содержать на 4 ребра меньше предыдущего. Пусть на m-том шаге зафиксирован некий локальный максимум на множествах V_1^m и V_2^m. При другом выборе множеств V_1 и V_2 с целью построения двудольного полного графа придется включать элементы множества V_2^m в состав множества V_1, иначе число ребер будет на 4 меньше начального. То есть невозможно построить новый локальный максимум без пересечения с уже построенным. Теорема 2 доказана.

Рассмотрим две распознающие системы π^*_1 и π^*_2.

Определение. Близостью двух распознающих систем π^*_1 и π^*_2 называется число $|\pi^*_1 \cap \pi^*_2|$, то есть число общих подмножеств в них.

Если говорить в терминах близости, то теорему 1 можно сформулировать следующим образом: множество R_0 не содержит больше одной максимальной тупиковой распознающей системы, попарная близость которых равна нулю. А теорему 2 можно сформулировать аналогичном образом, только не для множества R_0, а для множества $R_0 - R_1 - \ldots - R_m$.

Теорема 3. В R_0 существуют $\lfloor n/2 \rfloor$ (целая часть) максимальных тупиковых распознающих систем, попарная близость которых равняется 4.

Ясно, что n-элементное множество можно разбить на двухэлементные подмножества, но при нечетном n последнее подмножество будет одноэлементное. Число двухэлементных подмножеств будет $\lfloor n/2 \rfloor$. Пусть для некоторых двух двудольных полных графов $V_2^1 = \{i_1, j_1\}$ и $V_2^2 = \{i_2, j_2\}$, причем элементы i_1, j_1, i_2, j_2 попорно разные. Тогда элементы i_2, j_2 принадлежат V_1^1, а элементы i_1, j_1 принадлежат V_1^2. Так как тупиковым максимальным распознающим системам соответствуют полные двудольные графы, то оба графа будут содержать ребра (i_1, j_2), (i_2, j_1), (i_1, i_2), (j_1, j_2). Следовательно, близость этих двух систем будет равна 4. Так как мы рассмотрели две случайные системы, то утверждение имеет место для каждой пары и тем самым теорема 3 даказана.

Литература

[1] С. М. Варданян. Распознавание по пересечениям множеств, Труды Института проблем информатики и автоматизации, "Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники", том 24, с. 144-146, 2005г.

[2] S. M. Vardanyan. "Recognizing sets (systems)". Computer science and information technologies. Proceedings of the conference CSIT, Yerevan, Armenia 2005, pp 161- 162.

[3] С. М. Варданян. О длинах тупиковых распознающих систем в классе двухэлементных подмножеств. ДАН РА, том 107, вып. 1, стр. 37-43. 2007.

[4] F. Harary, "*Graph theory*". Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.

Երկու տարրանոց ենթաբազմությունների դասում մաքսիմալ փակուղային ճանաչող համակարգերի մոտիկության մասին

Ս. Մ. Վարդանյան

Ամփոփում

Սահմանվում է երկու ճանաչող համակարգերի մոտիկության գաղափարը և ապացուցվում են թեորեմներ տրված մոտիկության մաքսիմալ փակուղային ճանաչող համակարգերի քանակների վերաբերյալ: