Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 26, 2006, 97 – 100.

Многокомпонентные вершины графов телекоммуникационных сетей.

Карен А. Мкртчян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА
e-mails kamkrtchyan@ipia.sci.am, kamkrtchyan@yahoo.com

Аннотация

С целью исследования методами теории графов моделей телефонных и других телекоммуникационных сетей вводятся понятия связанные с многокомпонентностью вершин и операций над ними.

1.Введение

Данная статья является продолжением работ [1, 2, 3]. В процессе формализации моделей различных сетей, для объектно-ориентированного их описания, появилась необходимость уточнения ряда понятий теории графов. Для этого вводится понятие многокомпонентности вершин. Рассматриваются связи между такими вершинами и их компонентами, операции проводимые над ними и содержащими их графами. Использование понятия многокомпонентности вершин позволяет при необходимости отойти от структурных сложностей описываемых сетей и их компонент и сосредоточиться на их свойствах, характеристиках (внутренних, внешних). С применением вводимых новых понятий рассматриваются примеры из [3].

2. Однокомпонентные и многокомпонентные вершины.

В работе [3] были уточнены определения графа и его элементов. Графом $G(\mathcal{V},\mathcal{E})$ называется совокупность конечного множества вершин $\mathcal{V}=\{v_i : i \in [I]\}$ и множества $\mathcal{E}=\{(i-j,[L]),(i \to j,[K]) : i,j \in [I]\}$, мультиребер $(i-j,[L])=\{(i-j,l) : l \in [L]\}$ и мультидуг $(i \to j,[K])=\{(i \to j,k) : k \in [K]\}$, при $L=1$ имеем обычное ребро $(i-j)$, а при $K=1$ – дугу $(i \to j)$.

Определение 1. Многокомпонентной вершиной (мультивершиной) назовем, вершину $v_i^{[M_i]}$ состоящую из M_i связаных между собой компонент (подвершин), $v_i^{[M_i]}=\{v_i^m : m \in [M_i]\}$. Связь (отношение) между подвершинами v_i^m и v_i^n обозначим через $(i^m - i^n)$, если она не ориентированная, $(i^m \to i^n)$ – в случае ее ориентированности и $(i^m \leftrightarrow i^n)$, если она симметричная. Обозначим через $\mathcal{E}_i$ множество связей между подвершинами v_i^m мультивершины $v_i^{[M_i]}$. То есть $\mathcal{E}_i=\{(i^m-i^n),(i^m \to i^n),(i^m \leftrightarrow i^n) : m,n \in [M_i]\}$.

Обозначим ребро с номером l инцидентное подвершинам v_i^m, v_j^n вершин $v_i^{[M_i]}$, $v_j^{[M_j]}$, через $(i^m - j^n, l)$. Соответственно, дугу с номером k инцидентную тем же подвершинам $(i^m \to j^n, k)$.

Определение 2. С учетом введенных понятий, графом $G(\mathcal{V},\mathcal{E})$ будем называть совокупность конечного множества вершин $\mathcal{V} = \{v_i^{[M_i]} : i \in [I]\}$, где $v_i^{[M_i]} = \{v_i^m : m \in [M_i]\}$ и $\mathcal{E} = \{(i^m - j^n,[L]),(i^m \to j^n,[K]) : i,j \in [I], m \in [M_i], n \in [M_j]\}$, множества мультиребер $(i^m - j^n,[L])$ и мультидуг $(i^m \to j^n,[K])$, при $L = 1$ имеем одно ребро $(i^m - j^n)$, а при $K = 1$ одну дугу $(i^m \to j^n)$, соединяющие подвершины v_i^m и v_j^n вершин v_i, v_j.

Припишем каждому ребру $(i - j)$, дуге $(i \to j)$ графа, соответственно некоторое число $D(i - j)$, $D(i \to j)$ называемое весом (длиной, количеством, стоимостью, ценой, пропускной способностью и так далее). Аналогично, могут быть приписаны веса каждому подребру $- D(i - j, l)$, поддуге $- D(i \to j, k)$, мультиребру $- D(i - j, [L])$, мультидуге $- D(i \to j, [K])$ графа. Такой граф будем называть графом со взвешенными ребрами (дугами).

Может быть приписан вес $D(i)$ каждой вершине v_i, и такой граф называется графом со взвешенными вершинами. Если в графе веса приписаны всем его компонентам (ребрам, дугам, вершинам), то он называется взвешенным.

Аналогично веса могут быть присвоены подвершинам и их внутренним связям в мультивершине. Такая мультивершина также называется взвешенной.

Определение 3. Характеристикой графа $D(G)$ будем называть набор весов его компонент. Аналогично, характеристикой мультивершины будем называть набор весов ее подвершин и связей между ними. Различные наборы весов компонент графа образуют его характеристики. Соответственно, характеристики мультивершины это различные набор весов ее подвершин и связей между ними.

Под отщеплением подвершины v_i^m от мильтивершины $v_i^{[M_i]}$, где $v_i^{[M_i]} = \{v_i^m : m \in [M_i]\}$ будем понимать, представление мультивершины $v_i^{[M_i]}$ в виде графа с мультивершиной $v_i^{[M_i]} - v_i^m = \{v_i^n : n = 1, 2, ..., m-1, m+1, ..., M_i\}$ и однокомпонентной вершиной v_i^m, а также дугами, и ребрами между v_i^m и другими подвершинами мультивершины $(v_i^{[M_i]} - v_i^m)$ таким образом, что характеристика образовавшегося графа совпадает с характеристикой $v_i^{[M_i]}$. То есть подвершина v_i^m становится однокомпонентной вершиной v_t с некоторым номером t, а ее связи $\{(i^m - i^n), (i^m \to i^n), (i^m \leftrightarrow i^n) : n = 1, 2, ..., m-1, m+1, ..., M_i\}$ заменяются ребрами и дугами $\{(t - i^n), (t \to i^n), (t \leftrightarrow i^n) : n \in [M_i] - m\}$.

Под расщеплением мильтивершины $v_i^{[M_i]}$ будем понимать представление ее в виде графа, вершинами которого являются группы подвершин, ранее входящих в $v_i^{[M_i]}$, соединенных ребрами и дугами таким образом, что характеристика графа совпадает с характеристикой $v_i^{[M_i]}$. То есть расщеплением мильтивершины будем называть ее замену графом, (группой вершин и соединяющих их ребер и дуг) характеристика которого, совпадает с характеристикой исходной мультивершины.

В результате полного расщепления мультивершины все ее подвершины становятся однокомпонентными. То есть граф приводится к обычному виду, следовательно на графы с мультивершинами могут быть распространены результаты теории графов.

Стягиванием вершин называется действие обратное расщеплению мильтивершины, то есть замена некоторого множества вершин и соединяющих их ребер (дуг) мультивершиной, без изменения характеристики графа, которому они принадлежат.

Под объединением двух графов $G_1(\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ и $G_2(\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ будем понимать граф $G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, множество вершин и ребер (дуг) которого является объединением соответственно множества вершин и ребер (дуг) графов G_1 и G_2. То есть $G = G_1 \cup G_2$, если

$\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ и $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$. Заметим, что множества $\mathcal{V}_1$ и $\mathcal{V}_2$, $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ могут пересекаться. Объединение графов с однокомпонентными элементами представляет обычное объединение множеств их элементов. В случае объединения графов с многокомпонентными элементами, предварительно производится полное расщепление их мультивершин, то есть они приводятся к обычному виду, а далее производится их объединение. Фактически характеристика графа $G = G_1 \cup G_2$, полученного объединением графов G_1 и G_2, является объединением их характеристик, $D(G) = D(G_1 \cup G_2) = D(G_1) \cup D(G_2)$.

Под пересечением графов $G_1(\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ и $G_2(\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ будем понимать граф $G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, множество вершин и ребер (дуг) которого является пересечением соответственно множеств вершин и ребер (дуг) графов G_1 и G_2. То есть $G = G_1 \cap G_2$ если $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ и $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$. Фактически, характеристика графа $G = G_1 \cap G_2$, полученного пересечением графов G_1 и G_2, является пересечением их характеристик, $D(G) = D(G_1 \cap G_2) = D(G_1) \cap D(G_2)$.

Операция сочленения графов и понятия цепи сочленения и пути сочленения были введены в работе [3].

Пусть графы $G_1(\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ и $G_2(\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ не пересекающиеся, то есть $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = 0$, сочленением этих графов назовем граф $G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, множество вершин и ребер (дуг) которого является объединением соответственно множеств вершин и ребер (дуг) графов G_1 и G_2, с добавлением ребер (дуг), соединяющих попарно некоторые вершины графов G_1 и G_2. Добавленные ребра (дуги) сочленения графов назовем ребрами (дугами) сочленения, а вершины графов, соединенные новыми дугами, вершинами сочленения.

Цепью сочленения графов G_1 и G_2 назовем цепь между вершинами сочленения этих графов. Вершины и ребра (дуги) цепи сочленения, кроме вершин сочленения, не принадлежат ни одному из сочленяемых графов.

Путем сочленения графов G_1 и G_2 назовем путь между вершинами сочленения этих графов. Вершины и дуги пути сочленения, кроме вершин сочленения, не принадлежат ни одному из сочленяемых графов. Эти вершины и дуги могут быть добавлены, либо взяты из другого графа.

Исходя из необходимости создания модели адекватной моделируемому объекту (процессу), могут быть рассмотрены следующие типы определений (мультивершин, подвершин и их связей), данных ранее для графов и его компонент: стабильный (нестабильный), стационарный (нестационарный), случайный, постоянный (временный), периодический и так далее.

3. Примеры.

При разработке различных сетей, программных комплексов, архитектурных строений и так далее принято использовать так называемое объектно-ориентированное проектирование. Это позволяет отойти от структурных сложностей компонент проектируемых комплексов и сосредоточиться на их свойствах.

Рассмотрим пример с телефонными сетями, приведенный в [3]. Телефонные сети условно могут быть разделены по территориальному признаку на: локальные, ведомственные, сельские, городские, внутризоновые, междугородние, региональные и так далее. Отдельный абонент описывается как висячая вершина. Самая территориально малая сеть (локальная АТС) может быть представлена частичносимметрическим графом. Каждая следующая более крупная сеть, представляющая собой объединение более мелких подсетей, может быть представлена как сочленение графов. Следовательно, образованная таким образом сеть тоже представляется в виде графа. Сеть региональной связи, с участием нескольких операторов, в свою очередь может быть представлена как сочленение графов соответствующих компаний.

Рассмотрим пример процесса проектирования региональной сети с применением понятий мультивершины, мультидуг, графов и операций над ними.

При проектировании графа региональной телекоммуникационной сети легче оперировать крупными единицами. Например, на первом этапе проекта, сети операторов связи могут быть представлены как многокомпонентные вершины графа, а каналы связи между ними как мультиребра и мультидуги. Далее, в процессе проектирования, производится расщепление очередной мильтивершины, то есть замена ее графом (группой вершин, мультивершин и соединяющих их ребер и дуг), в результате которой, характеристика вновь образованого графа совпадает с характеристикой исходной мультивершины. Расщепление продолжается до тех пор, пока все вершины графа станут однокомпонентными. После этого можно приступать к непосредственной реализации проекта. Характеристика графа такой сети может быть получена либо независимым подсчетом весов его компонент, либо последовательностью операций над характеристиками графов, аналогичной последовательности операций над самими графами.

В дальнейшем, при необходимости изменения уже функционирующей сети, на любом ее уровне, аналогично должна быть спроектирована сеть, которая исходя из требований, предъявляемых к ней, может быть представлена в виде графа. Переход от уже созданной сети к модифицированной, представляется как операции над мультивершинами, мультидутами, графами (расщепление, стягивание, объединение, пересечение, сочленение). Аналогично могут быть рассмотрены и другие примеры приведенные в [3].

References

[1] Mkrtchyan K, Application of statistical approach in detecting fraud cases in telephone networks, Mathematical Problems of Computer Science, 24, pp. 125 – 132, 2005.

[2] Mkrtchyan K, Application of statistical approach fighting fraud cases in telephone networks, proceedings of CSIT in Yerevan, September 22, pp. 213–218, 2005.

[3] Мкртчян К, К применению теории графов при исследовании телекоммуникационных сетей, Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники, 25, стр. 80 – 85, 2006.

Հեռահաղորդակցական ցանցերի գրաֆների բազմաբաղադրիչ գագաթները

Կ. Մկրտչյան

Ամփոփում

Գրաֆների տեսության մեթոդներով հեռախոսային և այլ հեռահաղորդակցական ցանցերի մոդելների հետազոտման նպատակով ներմուծվում են գագաթների բազմաբաղադրիչ լինելու և նրանց միջև գործողությունների հետ կապված գաղափարները: Դիտարկվում են կիրառական օրինակներ: