Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 25, 2006, 80—84.

К применению теории графов при исследовании телекоммуникационных сетей.

Карен А. Мкртчян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА
e-mails kamkrtchyan@ipia.sci.am, kamkrtchyan@yahoo.com

Аннотация

С целью описания и последующего исследования методами теории графов моделей телефонных и других телекоммуникационных сетей систематизируются, уточняются соответствующие понятия. Рассматриваются практические примеры.

1.Введение

В статье излагается этап исследований, посвященных методам борьбы с нарушениями в телефонных сетях. Однако приводимые модели и терминология могут быть полезны при изучении разнообразных телекоммуникационных сетей.

В работе [1] была продемонстрирована возможность выявления нарушений путем их моделирования с использованием статистических методов. Такой подход позволяет выявлять нарушителей, не зарегистрированных при аппаратном мониторинге, опосредствованно, путем систематизации и анализа параметров и характеристик поведения других аналогичных абонентов, попавших в поле зрения при мониторинге. В свою очередь это дает возможность с одной стороны выявлять абонентов нарушителей, не замеченных при мониторинге, с другой стороны экономить на затратах, связаных с аппаратными методами.

В работе [2] была продемонстрирована возможность получения финансовых оценок убытков от нарушений и тем самым обосновать необходимость затрат, связаных с проведением организационно-технических мероприятий (приобретение специализированного оборудования, обучение персонала и т.д.) для оказания противодействия этим нарушениям, то есть оценить соизмеримость расходов на борьбу с величиной убытков.

Математическая модель — это некоторое описание объектов, их свойств и особенностей, на языке математики. Известны различные критерии классификации моделей [3, 4, 9, 11, 12]. В данной статье используются язык и методы теории графов для формализации моделей телефонных сетей и процессов происходящих в них, с целью автоматизации их управления.

2. Систематизация ряда понятий теории графов.

Для исследования структурных моделей телефонных сетей, наиболее подходят методы теории графов [5 — 10], [14].

Перейдем к формулировке и уточнению ряда существенных для наших целей понятий теории графов, включая такие, которые ранее мы в литературе не встречали.

Графом $G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ принято называть совокупность конечного множества вершин $\mathcal{V} = \{v_i : i = 1, 2, ..., I\}$ и множества $\mathcal{E} = \{(i - j), (i \rightarrow j) : i, j = 1, 2, ..., I\}$ ребер $(i - j)$ и дуг $(i \rightarrow j)$ — линий, попарно соединяющих некоторые из этих вершин. В дуге учитывается ориентированность соединенных вершин, отмеченная стрелкой. Граф называется ориентированным или орграфом, если $\mathcal{E} = \{(i \rightarrow j) : i, j = 1, 2, ..., I\}$, то есть множество $\mathcal{E}$ содержит только дуги. Соответственно граф называется неориентированным, если множество $\mathcal{E}$ содержит только ребра, $\mathcal{E} = \{(i - j) : i, j = 1, 2, ..., I\}$.

Разные дуги, соединяющие одну и ту же пару вершин, называются параллельными, а их семейство — мультидугой. Обозначим мультидугу, соединяющую вершины v_i и v_j через $(i \rightarrow j, \{K\})$, а ее поддуги — $(i \rightarrow j, k)$, $k = 1, 2, ..., K$. Аналогично определяются понятия: параллельные ребра (подребра) — $(i - j, l)$, $l = 1, 2, ..., L$ и мультиребро — $(i - j, \{L\})$.

Учитывая введенные понятия мультиребра и мультидуги, дадим более полное определение графа: графом $G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ будем называть совокупность конечного множества вершин $\mathcal{V} = \{v_i : i = 1, 2, ..., I\}$ и множества $\mathcal{E} = \{(i - j, \{L\}), (i \rightarrow j, \{K\}) : i, j = 1, 2, ..., I\}$, мультиребер $(i - j, \{L\})$ и мультидуг $(i \rightarrow j, \{K\})$, при $L = 1$ имеем одно ребро $(i - j)$, а при $K = 1$ одну дугу $(i \rightarrow j)$.

Дуги, соединяющие одну и ту же пару вершин и имеющие противоположное направление, будем называть оппозитными. Например дуга $(i \rightarrow j)$ оппозитна дуге $(j \rightarrow i)$ (или $(i \leftarrow j)$). Будем говорить, что множество дуг $\mathcal{E}_1$ оппозитно $\mathcal{E}_2$, если $\forall (i \rightarrow j)((i \rightarrow j) \in \mathcal{E}_1 \Rightarrow (j \rightarrow i) \in \mathcal{E}_2)$. Соответственно вводятся понятия оппозитных мультидуг, графов и др.

Иногда бывают полезны понятия симметричности, антисимметричности, частичной симметричности. Граф называется симметрическим, если $\forall \{K\}((i \rightarrow j, \{K\}) \in \mathcal{E} \Rightarrow (j \rightarrow i, \{K\}) \in \mathcal{E})$. Назовем граф антисимметрическим, если $\forall \{K\}((i \rightarrow j, \{K\}) \in \mathcal{E} \Rightarrow (j \rightarrow i, \{K\}) \notin \mathcal{E})$. Граф называется частичносимметрическим, если $\exists k((i \rightarrow j, k) \in \mathcal{E} \wedge (j \rightarrow i, k) \in \mathcal{E}) \wedge \exists k((i \rightarrow j, k) \in \mathcal{E} \wedge (j \rightarrow i, k) \notin \mathcal{E})$. Оппозитные графы являются антисимметрическими.

Две вершины называются смежными, если они соединены ребром (дугой). Эти вершины и соответствующее ребро (дуга) называются инцидентными друг другу.

Два ребра называются смежными, если они имеют общую вершину.

Дугу $(i \rightarrow j)$ считаем исходящей от вершины v_i и входящей в v_j.

Две дуги называются смежными, если они имеют одну общую вершину и одинаковую направленность, то есть одна дуга является входящей для этой вершины, а другая исходящей. Например, дуга $(i \rightarrow j)$ смежна дуге $(j \rightarrow m)$. Будем называть две дуги оппозитно смежными, если они имеют общую вершину и противоположную направленность, например, дуга $(i \rightarrow j)$ оппозитно смежна дуге $(m \rightarrow j)$, а $(j \rightarrow i)$ оппозитна $(j \rightarrow m)$.

Смежные вершины ребра (дуги) будем называть граничными. Последовательность попарно смежных вершин в графе будем называть цепью.

Путем от вершины v_i к вершине v_j в графе называется последовательность смежных дуг от v_i к v_j. Простой путь, это путь, в котором ни одна дуга не встречается дважды. Элементарный путь, это путь, в котором вершины не встречаются дважды.

Замкнутая цепь называется циклом. Если любые две вершины графа можно соединить цепью, граф называется связным. Если в орграфе две любые вершины можно соединить путем, то он называется сильно связным.

В графе степенью вершины называется число инцидентных ей ребер, а степенью исхода и степенью входа называются, соответственно, количество исходящих и входящих инцидентных ей дуг.

Вершина, не имеющая инцидентных ребер (дуг), называется изолированной, а вершина, имеющая одно инцидентное ребро (дугу), называется висячей.

Подграфом называется часть графа, образованная подмножеством вершин вместе со всеми ребрами (дугами), соединяющими вершины этого подмножества. Если из графа удалить часть ребер (дуг), то получим частичный граф.

Пусть графы $G_1(\mathcal{V}_1, \mathcal{E}_1)$ и $G_2(\mathcal{V}_2, \mathcal{E}_2)$ не пересекающиеся, то есть $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = 0$, сочленением этих графов назовем граф $G(\mathcal{V}, \mathcal{E})$, множество вершин и ребер (дуг) которого является объединением, соответственно, множеств вершин и ребер (дуг) графов G_1 и G_2, с добавлением ребер (дуг), соединяющих попарно некоторые вершины графа G_1 с вершинами графа G_2. Добавленные ребра (дуги) сочленения графов назовем ребрами (дугами) сочленения, а вершины графов, соединенные новыми дугами, — вершинами сочленения.

Цепью (путем) сочленения графов G_1 и G_2 назовем цепь (путь) между вершинами сочленения этих графов. Вершины и ребра (дуги) цепи (пути) сочленения, кроме вершин сочленения, не принадлежат ни одному из сочленяемых графов. Эти вершины и ребра (дуги) могут быть добавлены, либо взяты из другого графа.

Припишем каждому ребру $(i - j)$, дуге $(i \to j)$ графа, соответственно некоторое число $D(i - j)$, $D(i \to j)$ называемое весом (длиной, стоимостью, пропускной способностью и так далее). Аналогично, могут быть приписаны веса каждому подребру $D(i - j, l)$, поддуге $D(i \to j, k)$, мультиребру $D(i - j, \{L\})$, мультидуге $D(i \to j, \{K\})$ графа. Такой граф будем называть графом со взвешенными ребрами (дугами).

Может быть приписан вес $D(i)$ каждой вершине v_i, и такой граф называется графом со взвешенными вершинами. Если в графе веса приписаны и ребрам, и дугам, и вершинам, то он называется взвешенным.

Могут быть рассмотрены различные типы вершин, дуг, ребер, графов: стабильные (нестабильные), стационарные (нестационарные), случайные, постоянные (временные), периодические и так далее.

В следующей статье мы рассмотрим понятие многокомпонентных вершин (состоящих из подвершин), действия над ними и графами — расщепление, стягивание, объединение, пересечение а также матричное представление [9, 13] самих графов.

3. Примеры.

Телефонные сети условно могут быть разделены по территориальному признаку на: локальные, ведомственные, сельские, городские, внутризоновые, междугородные, региональные и так далее. Отдельный абонент описывается как висячая вершина. Самая территориально малая сеть (локальная АТС) может быть представлена частичносимметрическим графом. Каждая следующая более крупная сеть, представляющая собой объединение более мелких подсетей, может быть представлена как сочленение графов. Следовательно образованная таким образом сеть тоже представляется в виде частичносимметрического графа. Сеть региональной связи нескольких операторов в свою очередь может быть представлена как сочленение частичносимметрических графов соответствующих компаний.

Соединение в пределах одного оператора, исходящее от абонента A к абоненту B, есть путь в графе. В случае принадлежности абонентов A и B к разным операторам, путь от A к B будет состоять из суммы путей: от A к вершине сочленения оператора абонента A, далее пути сочленения графов операторов абонентов A и B, и наконец от вершины сочленения графа оператора абонента B до абонента B. Стоимость организации такой связи между абонентами A и B может быть определена, если сочленение частичносимметрических графов взвешено.

Радиотрансляционная сеть может быть описана периодическим графом, характеризуемым периодами наличия передач.

Сеть абонентов телевизионной компании описывается как временной граф, характеризуемый выбором телезрителями телевизионных каналов.

Граф активности абонентов локальной компьютерной сети в заданное время является случайным графом.

Прохождения пакетов в интернете также может быть представлено как случайный граф, поскольку путь прохождения зависит от многих факторов — приоритетность, загруженность каналов, адрес получателя и так далее.

При планировке дорог города учитываются различные факторы: число жителей районов города, количество дорог, связывающих эти районы, пропускные возможности этих дорог, их рядность, направленность, протяженность и так далее. Наиболее наглядное и одновременно полное описание всей этой информации также целесообразно производить методами теории графов [11]. Например, можно описать пропускную способность участка дороги с многосторонним и многорядным движением, как частичносимметрическую мультидугу. Фактически мы имеем количество поддуг, их веса (направление движения и ограничение скорости в каждой полосе, длина описываемого участка дороги). Перечисленной информации достаточно для формализации модели движения на исследуемом участке дороги и подсчета его пропускной способности. К примеру, можно определить длину пути, как число составляющих его дуг, или сумму их длин.

Рассмотрим графовое описание путей движения потоков людей в многоэтажном строении (например здании супермаркета), между этажами которого имеются лестницы, эскалаторы, лифты. Этажи это вершины графа, соединяющие их лестницы — ребра, эскалаторы — дуги, лифты — симметрические дуги.

References

[1] Mkrtchyan K, Application of statistical approach in detecting fraud cases in telephone networks, Mathematical Problems of Computer Science, 24, pp.125—132, 2005.

[2] Mkrtchyan K, Application of statistical approach fighting fraud cases in telephone networks, proceedings of CSIT in Yerevan, September 22, 2005.

[3] Скворцова М. Математическое моделирование. 2003. http://archive.1september.ru/mat/2003/14/no14_1.htm

[4] Арутюнян Е. и другие. Вероятность и прикладная статистика. (на армянском языке), Издательство "Гитутюн" НАН РА, Ереван 2000.

[5] Носов В. Комбинаторика и теория графов. Москва 1999.

[6] Оре О. Теория графов. Москва, Наука, 1968.

[7] Харрари Ф. Теория графов. Москва, Мир, 1973.

[8] Чернобаев А. Систематический указатель терминов и определений теории графов. v.990916. 2004. http://www.carawan.ru/ alex/graphs/Graphs_Terms_and_Definitions.htm

[9] Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М., Мир, 1978.

[10] Нечепуренко М.И. Попков В.К. Майнагашев С.М. и др. Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях. Новосибирск, Наука (сибирское отделение), 1990.

[11] Форд Л.Р. Фалкерсон Д.Р. Потоки в сетях. Москва, Мир, 1966.

[12] Клейнрок Л. Коммуникационные сети. Москва, Наука, 1970.

[13] Матрицы и определители. 2006. http://dit.vov.ru/md/md-1.htm

[14] Ralph P. Grimaldi. Discrete and combinatorial mathematics. Addison – Wesley publishing company, 1985.

Հեռահաղորդակցական ցանցերի հետազոտման համար գրաֆների տեսության կիրառության վերաբերյալ:

Կ. Մկրտչյան

Ամփոփում

Գրաֆների տեսության մեթոդներով հեռախոսային և այլ հեռահաղորդակցական ցանցերի մոդելների նկարագրման և հետագա հետազոտման նպատակով համակարգվում, ճշգրտվում և համալրվում են համապատասխան գաղափարները: Դիտարկվում են կիրառական օրինակներ: