Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 23, 2004, 144-146.

Распознавание по пересечениям множеств

Сейран М. Варданян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА
e-mail seyranv@ipia.sci.am

Аннотация

В статье рассматриваются задачи распознавания по пересечениям множеств и доказывается минимальность и тупиковость некоторых систем.

В данной статье рассматриваются задачи, подобные рассмотренным в [1,2,3]. Рассмотрим конечное множество $[n]=\{1,2,...n\}$, $n\geq 3$. Через $R[n]$ обозначим множество подмножеств множества $[n]$. Пусть n^* является подмножеством множества $R[n]$.

Определение. Будем говорить, что элемент $i\in[n]$ распознаваем в n^*, если в n^* существуют такие подмножества множества $[n]$ (как элементы множества n^*), пересечение которых равняется $\{ i \}$.

Определение 2. Будем говорит, что n^* является распаснающим $[n]$, если любой элемент $i\in[n]$ распознаваем в n^*.

В противном случае, если существуют попарно различные такие $j_1, j_2 ,..., j_k$, что $k<n$ и $j_1, j_2 ,..., j_k$ распозноваемы в n^*, а осталные - нераспознаваемы, то будем говорить, что n^* является частично распознащим $[n]$. А если в $[n]$ не существует хотя бы одного элемента, распознаваемого в n^*, то будем говорить, что n^* является нераспознающим $[n]$.

С формальной точки зрения, так как $R[n]$ является распознающим множество $[n]$, то класс распознающих систем не является пустым. Определим классические понятия минимальности и тупиковости для вышеупомянутых обьектов.

Определение 3. Множество n^*, распознающее $[n]$, называется тупиковым, если любое подмножество множества n^* не является распознающим $[n]$.

Определение 4. Множество n^*, распознащюее $[n]$, называется минимальным, если не существует распознающее множество с мощностью меньшей, чем $|n^*|$.

А если рассматривается минимум не в классе всех распознающих систем, а только в определенном подклассе, то такие минимумы часто будем называть локальными минимумами.

Аналогичным образом определяются понятия минимальности и тупиковости для частично распознающих систем.

В статье рассматриваются такие распознающие системы, элементами которых являются k- элементные подмножества множества $[n]$ при фиксированном k, причем $1<k<n$.

Теорема1. *При любом* k, $1<k<n$, *существует тупиковая распознающая система* n^* *с мощностью* $|n^*| = n$.

Доказательство, рассмотрим следующее множество множеств:

$\{ \{1,2, ..., k-1, k\}, \{ 2,3, ..., k, k+1\}, \{3,4, ..., k+1, k+2\}, ...,$
$\{ n-k+1, n-k+2, ..., n-1,n\}, \{ n-k+2, n-k+3, ..., n, 1 \} , ... \{ n, 1, 2, ..., k-1\}\}$.

Заметим, что каждое множество получается из своего предыдушего единичным циклическим поворотом по часовый стрелке. Покажем, что эта система удолетворяет требованиям теоремы. Разместим числа от 1 до n на окружности по порядку натуральных чисел, по часовой стрелке. Для любого j, $1 \le j \le n$, рассмотрим следующие множества

$J_i = \{j-(k-1)+i,\ j-(k-2)+i,\ \ldots,\ j-1+i,\ j+i\}$, $i=0, \ldots, k-1$, причем все операции выполняются по mod (n), и только роль 0 играет n. Легко убедиться, что при фиксированном j задаются все множества, которые содержат j, причем при $i=0$ получается первое множество $J_0=\{j-(k-1),\ j-(k-2),\ \ldots,\ j-1,\ j\}$, а для каждого последующего значения i получается единичный циклический сдвиг предыдущего по часовой стрелке. J_1 является единичным циклическим сдвигом для J_0 и не содержит элемент $j-(k-1)$, написанный на первом месте J_0. Следовательно, $J_0 \cap J_1$ также не содержит элемент $j-(k-1)$, написанный на первом месте J_0. J_2 является единичным циклическим сдвигом для J_1 и не содержит элемент $j-(k-2)$, написанный на первом месте J_1 или написанный на втором месте J_0. Следовательно, $J_0 \cap J_1 \cap J_2$ тоже не содержит элемент, написанный на первом месте J_1 или написанный на втором месте J_0. И так далее J_{k-1} не содержит элемент $j-(k-1)+(k-2)=j-1$, написанный на первом месте J_{k-2}. Следовательно, $J_0 \cap J_1 \cap \ldots \cap J_{k-1}$ также не содержит $j-1$. В результате получается, что $J_0 \cap J_1 \cap \ldots \cap J_{k-1} = \{ j \}$. Получили, что любое значение j распознаваео со стороны рассмотренной системы. Следовательно, расмотренная система является распознающей. Докажем, что она тупиковая.

Предположим, что из системы удалено некоторое множество. Понятно, что удаленное множество будет иметь следующий вид $\{j-(k-1),\ j-(k-2),\ \ldots,\ j-1,\ j\}$ для некоторого значения j. Покажем, что элемент j не будет распознан со стороны рассмотренной системой. Так как любое множество, содержащее j, будет содержать также $j+1$, следовательно любое пересечение, содержащее j, будет содержать также $j+1$. Так как удалено множество $\{j-(k-1),\ j-(k-2),\ \ldots j-1,\ j\}$, то множества, содержащие j, будут $\{j-(k-2),\ j-(k-3), \ldots, j-1,\ j,\ j+1\}, \ldots, \{j, j+1, \ldots, j+(k-1)\}$, и все они вместе с j, будут содержать также $j+1$. Следовательно, j не будет распознаваема.

Следствие. В частности, при $k = 2$ получим, что система $\{1,2\}, \{2,3\}, \ldots, \{n-1,n\}$, $\{n,1\}$ в классе двухэлементных подмножеств является распознающей и тупиковой.

Теорема 2. *Для любой распознающей системы* n^*, *элементы которого взяты из класса двухэлементных подмножеств, имеет место неравенство* $|n^*| \ge n$.

Доказательств. Так как любое $i \in [n]$ распозноваемо в n^*, то для любого i сушествует по крайней мере два множества, пересечение которых равняется $\{ i \}$. Если любому i сопоставим некую вершину, а паре $\{ i, j \}$-- ребро между вершинами i и j, то получим граф, локальная степень каждой вершины которого будет ≥ 2. Опираясь на известный результат теории графов, число ребер в таком графе будет больше или равно половины суммы локальных степеней всех вершин графа, которое в данном случае равняется n. Теорема доказана.

С другой стороны легко убедиться, что система $\{1,2\}, \{1,3\}, \ldots, \{1,n-1\}, \{2,n\}, \{3,n\}, \ldots, \{n-1,n\}$ распознающая и тупиковая, а мощность системы равняется $2(n-2)$. Следовательно, только в классе двухэлементных подмножеств система $\{1,2\}, \{2,3\}, \ldots, \{n-1,n\}, \{n,1\}$ является распознающей и локально минимальной.

Теорема 3. *Пусть* $n = m^2$. *Тогда существует распознающая тупиковая система* n^* *из* m- *элементных подмножеств мощностью* $2m$.

Действительно, рассмотрим разбиение множества $[n]$ на m равномощных частей. В результате получим m штук m- элементных множеств. Пусть эти множества будут следующие : $A_1 = \{a^1_1, a^1_2, \ldots, a^1_m\}$, $A_2 = \{a^2_1, a^2_2, \ldots, a^2_m\}, \ldots, A_m = \{a^m_1, a^m_2, \ldots, a^m_m\}$. Не трудно видеть, что все элементы множества $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$ попарно разные и их количество равняется m^2. Далее построим следующие множества :

$B_1 = \{a^1_1, a^2_1, \ldots, a^m_1\}$, $B_2 = \{a^1_2, a^2_2, \ldots, a^m_2\}, \ldots, B_m = \{a^1_m, a^2_m, \ldots, a^m_m\}$.

Легко видеть, что в B_j включены только элементы a^i_j из множеств A_i, $i=1,\ldots,m$. Убедимся, что система $\{A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_m\} = n^*$ распознающая. Действительно, при любых i и j $\{a^i_j\} = A_i \cap B_j$ $i=1,...,m$, $j=1,...,m$, что следует из специфики построения B_j, так как каждый B_j включает только один элемент из каждого A_i. С другой стороны, элемент, взятый в каждом B_j, отличается от элементов, взятых в остальных множествах B, а множества $A_1, A_2, ..., A_m$ попарно не пересекаются друг с другом. Следовательно, построенная система n' является распознающей и ее мощность равняется 2m.

Покажем, что построенная система является тупиковой. Действительно, если из системы удалить множество A_i, то следующие элементы $a^i_1, a^i_2, ..., a^i_m$ не будут распознаны, так как они распознавались только с помощью пересечений $A_i \cap B_j$. Аналогичным образом, если удалить множество B_i, то следующие элементы $a^1_i, a^2_i, ..., a^m_i$ не будут распознаны. Следовательно, рассмотренная система является тупиковой.

Как частный случай теоремы 1 рассмотрим случай $k = n-1$ со своим специфическим доказательством.

Теорема [illegible] *Все n-1-элементные подмножества n-элементного множества вместе составляют тупиковую распознающую систему.*

То что система является распознающей, следует из того, что для любого i все множества, за исключением одного, содержат i, и пересечение всех этих множеств есть { i }. Покажем, что эта система тупиковая. Будем исходить от противного.

Предположим, из системы удалено множество, не содержащее элемент i, и оставшаяся система опять распознающая. Понятно, что все оставшиеся множества содержат элемент i. Рассмотрим некий элемент j из удаленного множества. Это возможныо. так как $n \geq 3$. По предположению, система осталась распознающей и, в частност, элемент j распознаваем. Следовательно, в системе существуют множества, пересечение которых есть { j }. Но все остальные множества этой системы содержат и элемент i . Следовательно, любое пересечение, которое содержит элемент j, будет содержать также и элемент i . А отсюда следует, что элемент j не распознаваем, так как вместе с j одновременно этому пересечению принадлежит и i. Полученное противоречие является следствием ошибочного предположения. Следовательно, эта распознающая система тупиковая.

Литература

[1] П. Эрдеш, Дж. Спенсер. Вероятностные методы в комбинаторике, Москва, Мир, 1976.

[2] С.М.Варданян. Об одной задаче распознавания множеств, Доклады Академии наук Арм. ССР, том. 72, с.141-143, 1981г.

[3] С.М.Варданян. Алгоритм построения обобщенных тестов. Моделирование, оптимизация, управление. Вып.4, с.74-77, Ереван 2001г.

Ճանաչում ըստ բազմությունների հատումների

Ս. Վարդանյան

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է ճանաչման խնդիր ըստ բազմությունների հատումների: Ցույց է տրվում որոշ ճանաչող համակարգերի մինիմալությունը և փակուղայնությունը: