Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 23, 2004, 144 – 149.

# Тестирование длительности периодов в рядах биржевых цен*

Евгений А. Арутюнян, Ирина А. Сафарян и Мушег С. Саакян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА
e-mails evhar@ipia.sci.am, safari@ipia.sci.am, m.sahakianalumni@lse.ac.uk

**Аннотация**

Решается задача тестирования постоянства функции риска рядов динамики цен акций против альтернативы монотонного роста риска. Предложена новая ранговая статистика, являющаяся модификацией статистики лог-ранговых меток. Обосновано ее применение для нестабильных рынков.

## 1.Введение

Изучение финансовых временных рядов показывает, что колебания наблюдаемых значений таких параметров, как процентные ставки, обменные курсы и т. п., имеют тенденцию к образованию кластеров, т. е. в таких временных рядах можно выделить перемежающиеся серии с малыми и большими отклонениями от среднего. Иначе говоря периоды "спокойного" и "возмущенного" состояний рынка чередуются. Катастрофические явления наблюдаются, как правило, в "возмущенном" состоянии рынка и являются, таким образом, в некотором смысле предсказуемыми, поэтому задача менеджера (инвестора) — обнаружение начала кластера нестабильности с наименьшим запаздыванием. Финансовые временные ряды часто изучаются на ARCH- моделях, суть которых в следующем. Рассматривается временной ряд:

$$y_t = x_t\beta + u_t,$$

для которого $\sigma_t^2 = D(u_t|u_{t-1}, ..., u_{t-p})$ — условная дисперсия ошибок $u_t$. Эффект кластеризации может быть объяснен следующей моделью зависимости условной дисперсии ошибок $u_t$ от предыстории: $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \ldots + \alpha_p u_{t-p}^2$. Модель называется авторегрессионной условно-гетероскедастичной моделью порядка $p$ (Autoregressive Conditional Heteroscedastic) ARCH(p). Условное стандартное отклонение в этой модели интерпретируется как мера нестабильности (волатильности) рынка. Нарушение стационарности связано с существованием некоторого момента $\tau$ такого, что $\sigma_t^2 = \sigma_{t+1}^2 = \ldots = \sigma_{\tau-1}^2 \neq \sigma_\tau^2$, причем $\sigma_t^2 < \sigma_\tau^2$ при $t < \tau$. Обнаружение момента $\tau$ в наблюдаемом отрезке временного ряда может служить предвестником предстоящей финансовой катастрофы. Изложение методики, связнной с этим подходом можно найти в [1], [2], [3], где помимо конечного $p$, рассматриваются также ARCH($\infty$) — финансовые

*Работа была частично поддержана фондом INTAS, грант 00-738.

ряды с бесконечной памятью. Обнаружение изменения меры волатильности случайных процессов с бесконечной памятью изучается в [4].

Другой подход предсказания катастрофических явлений основан на анализе функции риска, которая применяется в медицине при обработке данных типа времени жизни (survival data) [5] или анализе длительностей (duration) в экономике [6],[7]. Под длительностью цены (price duration) понимается отрезок времени между последовательными выходами цены (в процентом выражении) за некоторый фиксированный уровень. Интуитивно очевидно, что между длительностью цены (price duration) и мерой волатильности цены (price volatility) существует связь. В частности, такая связь для одномерного диффузионого процесса устанавливается в работе E. Burgayran and S. Darolles [8]. Поэтому катастрофические явления могут быть предсказаны и на основании выборочной оценки функции риска, (hazard function), которая является мерой длительности цены в единицу времени. Наличие точек роста в такой функции (Jump of intensity) может рассматриваться как предвестник катастрофы.

Настоящая работа посвящена нахождению асимптотически оптимального непараметрического критерия для обнаружения момента изменения (точки роста) функции риска. Подход аналогичен примененому в [9] и использует общую теорию обнаружения момента изменения статистических свойств случайной последовательности (change point analysis), разрабатываемую последные годы многими авторами, как например Brodsky and Darkovsky [10], Praagman J [11], Арутюнян, Сафарян [12] и другие. В работе предложена и обоснована модификация лог-ранговой статистики, для апостериорного тестирования гипотезы о постоянстве функции риска против альтернативы ее монотонного роста. Предлагаемое исследование является первым шагом при анализе и управлении рисками некоторого конкрётного объекта. Зная некоторые характеристики объекта, обнаружив момент изменения функции риска, можно на основании общей теории риска [13], [14] оценить вероятность некоторых связанных с этим объектом событий (например, вероятность, разорения страховой компании).

## 2. Анализ поведения функции риска

Пусть $X(t)$-процесс описывающий изменение цен и T-момент наступления события: $\mathcal{A}_c = \{X(t) < c\}$ где $c$ некоторый уровень, выбранный из содержательных соображений на основе априорной информации.

**Определение 1:** Длительностью цены до момента возникновения (сокращенно: длительностью цены (price duration)) называется интервал времени между последовательными наступлениями события $\mathcal{A}_c$.

**Определение 2:** Функцией риска $\lambda(t)$ называется предельная при $\Delta(t) \to 0$ отнесенная к единице времени, условная вероятность осуществления события $\mathcal{A}_c$ в интервале времени от $t$ до $\Delta(t)$ при условии, что до момента $t$ оно не осуществилось, т.е.

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr(t < T \le t + \Delta t | T > 0)}{\Delta t}$$

Для с. в, $T$, имеющей функцию распределения $F(t)$ и плотность $f(t)$ , функция риска может быть записана в виде:

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}, \tag{1}$$

следовательно, она удовлетворяет соотношению

$$-\ln(1-F(t))=\int_0^t \lambda(u)du. \tag{2}$$

Пусть $T_1,\dots,T_N$ —последовательные случайные моменты наступления события $\mathcal{A}_c$, а $\tau_n=T_n-T_{n-1}$, $n=\overline{1,N}$— соответствующие длительности цен. Решаемая в настоящей работе задача состоит в проверке нулевой гипотезы: постоянства функции риска против альтернативы монотонного роста на основании наблюдаемых значений длительностей цен $\tau_1,\dots,\tau_N$.

Рассмотрим некоторые, характерные для финансовых данных, распределения моментов выхода цены за уровень $c$, и соответствующие им функции риска.

| Семейство распределений | $F(t)$ | $f(t)$ | $\lambda(t)$ |
|---|---|---|---|
| Экспоненциальное | $1-e^{-at}$ | $ae^{-at}$ | $a$–const |
| Вейбулла | $1-e^{-(at)^\alpha}$ | $\alpha a(at)^{\alpha-1}e^{(at)^\alpha}$ | $\alpha a(at)^{\alpha-1}$ |
| Релея | $1-e^{-a^2t^2}$ | $2\lambda^2te^{-a^2t^2}$ | $2a^2t$ |

Табл. 1

Пусть функция риска кусочно-постоянна с единственным скачком (jump of intensity) в точке $t^*$ т.е.

$$\lambda(t)=\begin{cases} a, & \text{при} \quad t\le t^* \\ (1-\theta)a, & \text{при} \quad t>t^*, \end{cases}$$

Согласно (2)

$$-\ln(1-F(t))=\int_0^{t^*} adu+\int_{t^*}^t(1-\theta)adu=at^*+(1-\theta)a(t-t^*)$$

и, следовательно, для плотности получаем

$$f(t)=\begin{cases} ae^{-at}, & t\le t^* \\ (1-\theta)ae^{-at^*-(1-\theta)a(t-t^*)}, & t>t^*, \end{cases} \tag{3}$$

Это означает, что $T_n$ а, следовательно, и $\tau_n$ до момента $t^*$ имеют экспоненциальное распределение с параметром $a$, и экспоненциальное распределение с параметром $(1-\theta)a$ после момента $t^*$.

Для нестабильного рынка наиболее походящей моделью распределения длительностей цен можно считать распределение Вейбулла. Как видно из таблицы, при $\alpha<1$ функция риска монотонно убывает, при $\alpha=1$ постоянна и при $\alpha>1$ монотонно возрастает. Это соответствует реальным финансовым временным рядам, в которых между двумя финансовыми катастрофами присутствуют два момента изменения: до $t_1^*$ функция риска убывает, в интервале от $t_1^*$ до $t_2^*$ постоянна и после момента $t_2^*$ монотонно возрастает. Наличие момента $t_2^*$ можно считать предвестником катастрофы.

Заметим, что экспоненциальное распределение и распеделение Релея, являются вложенными для распределения Вейбулла, т.е. они получаются из последнего при различных параметрах $\alpha$: при
$\alpha=1-$ экспоненциальное распределение, а при $\alpha=2-$ распределение Релея.

Таким образом, сформулированная выше задача сводится к проверке гипотезы

$$H_0 : \alpha = 1$$

против альтернативы

$$H_1 : \alpha > 1,$$

и в случае справедливости $H_1$ к оцениванию того номера наблюдения $n^*$ в ряду $\tau_1, ..., \tau_N$ после которого происходит изменение параметра.

Когда такая оценка $\hat{n}$ найдена, то оценка момента роста функции риска $\hat{t}$ определяется как

$$\hat{t} = \tau_1 + ... + \tau_N.$$

## 3. Оптимальный ранговый критерий для обнаружения точки роста.

Непараметрические процедуры проверки гипотезы однородности случайной последовательности, основанные на линейных ранговых статистиках, теоретически обоснованы в [10], [11], [12].

Пусть $R_n$ – ранг (номер в порядке возрастания) наблюдения $\tau_n$, $n = \overline{1, N}$, $J(u)$ – некоторая гладкая функция, определенная вместе со своей первой и второй производной на (0,1), называемая функцией меток, для которой выполнены условия:

$$A(J) = \int_0^1 J(u)du < k < \infty,$$

$$S(J) = \int_0^1 J^2(u)du - \left(\int_0^1 J(u)du\right)^2 > 0.$$

Определим последовательность ранговых статистик

$$W_N(\frac{n}{N}) = \frac{N}{N-n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} J\left(\frac{R_i}{N}\right) - A(J)\right), \ n = \overline{1, N-1}.$$

Тогда, согласно результатам, полученным в [12] статистика $W_N(\frac{n}{N})$ при соответствующем выборе функции меток состоятельна для проверки гипотезы $H_0$ против $H_1$ и, в случае справедливости альтернативы $H_1$

$$\hat{n} = \arg\min_n W_N(\frac{n}{N}),$$

состоятельная оценка номера наблюдения $n^*$.

Под соответствующим выбором понимается различимость $F_1(t)$ – до момента $n^*$ и $F_2(t)$ – после момента $n_2$ в смысле функции $J(u)$, т. е. выполнение для любого $0 < \gamma \leq 1$ неравенства:

$$\int_0^\infty J(\gamma F_1(t) + (1-\gamma)F_2(t))dF_1(t) < \int_0^\infty J(F_1(t))dF_1(t). \quad (4)$$

Для рассматриваемого в настоящей статье случая $F_1(t) > F_2(t)$, поэтому (4) выполняется при любой монотонной функции меток $J(u)$, в частности, при

$$J(u) = u. \quad (5)$$

Это функция меток известного в статистике критерия Вилкоксона.

Однако для скорейшего обнаружения предпочтительно использовать локально наиболее мощный ранговый критерий, т. е. имеющий наибольшую мощность в заданном классе критериев при близких альтернативах.

Предлагаемая в настоящей работе статистика основана на функции меток.

$$J(u) = -\ln(-\ln(1-u))(1-\ln(1-u)). \tag{6}$$

Легко убедиться, что статистика с функцей меток (6) локально наиболее мощна (асимптотически оптимальна) при $\alpha = 1-\theta$ и малых значениях параметра $\theta$.

Действительно, если $\tau_1, ..., \tau_N$ имеют функцию распределения $F(t;\theta)$ и $\theta = 0$ до момента $n^*$ и $\theta < 0$ после момента $n^*$, то как показано в [11] функция меток локально наиболее мощного критерия дается формулой

$$J(u) = \frac{\frac{\partial}{\partial\theta} f(F_0^{-1}(u);\theta)}{f(F_0^{-1}(u);\theta)}\Big|_{\theta=0}, \tag{7}$$

где $F_0^{-1}(u)$ -функция, обратная к $F(t;0)$.

Выполняя в (7) все необходимые преобразования для плотности распределения Вейбулла

$$f(x;\theta) = (1-\theta)a(at)^{-\theta}e^{(-at)^{1-\theta}},$$

получим функцию меток вида (6).

Статистика (6) является модификацией статистики лог-ранговых меток,

$$J(u) = -(1-\ln(1-u)) \tag{8}$$

исследованной в [9] и получаемой подстановкой в (7) экспоненциальной плотности $f(t;\theta) = 1 - e^{a(1-\theta)t}$.

Компьютерное моделирование может показать ее высокую эффективность по сравнению со статистиками (8) и (5).

## References


[1] Genon-Catalot V., Jeantheau T. and Laredo C. "Parameter estimation for discretely observed stochastic volatility models". *Bernoulli*, vol. 4, no. 5, pp. 855-872, 1999.

[2] Kokoszka L., Leipus R."Change-point estimation in ARCH models " . vol. 6 , no. 3, pp. 513-539 , 2000.

[3] Chen J., Gupta A. K. "Testing and locating variance changepoints with application to stock prices". *J. Amer. Statist. Assoc.* , vol. 92 , pp. 739-747 , 1999.

[4] Compte F., Renault E. "Long memory in continuous-time stochastic volatility model " .*Mathematical Finance*, vol. 8, no. 4, pp. 291-323 , 1998.

[5] Кокс Д. Р., Оукс Д. "Анализ данных типа времени жизни". М., Финансы и статистика, 1988.

[6] Heckman J., Singer B. "Econometric duration analysis". *Journal of econometrics 24*, pp. 63-132 , 1984.

[7] Anderson J. E., Thomas A. T. "Survival analysis using a scale shange random effects model". *J. Amer. Statist. Assoc.*, vol. 90, no. 430, pp. 669-679,

[8] Burgayzan E., Darolles S., "Estimation of random time observed diffusions with application to microstructure data". *Prague Stochastics 98*, pp. 67-72.

[9] Matthews D. E., Farewell V. T. and Pyke R. "Asymptotic score-statistic processes and tests for constant hazard against a change-point alternative". *The Annals. of Statistics*, vol. 13, no. 2, pp. 583-591, 1985.

[10] Brodsky B. E., Darkhovsky B., S. "Nonparametric Methods in Change-Point Problems". Dordrecht, Kluwer, 1993.

[11] Praagman J. "Bahadur efficiency of rank test for the change-point problem". *The Annals. of Statistics*, vol. 16, no. 1, pp. 198-217 ,

[12] Арутюнян Е., Сафарян И. "Непараметрическое состоятельное оценивание момента изменения свойств случайной последовательности". *Труды института проблем информатики и автоматизации НАН РА и ЕГУ*, вып. 17, сс. 76-85, 1997.

[13] Grandell J. "Aspects of Risk Theory". Berlin: Springer- Verlag, 1990.

[14] Эмбрехтс П., Клюппельберг К. "Некоторые аспекты страховой математики". Теор. Вероятностей и ее прим., том 38, вып. 3, сс. 374-416, 1993.

## Բորսայական գների շարքերում պարբերությունների երկարության տեստավորում

Ե. Ա. Հարությունյան, Ի. Ա. Սաֆարյան և Մ. Ս. Սահակյան

**Ամփոփում**

Լուծվում է արժեթղթերի գների դինամիկայի շարքերի ռիսկի ֆունկցիայի հաստատուն լինելու վարկածի ստուգման խնդիրը ընդդեմ ռիսկի միընթաց աճի: Առաջարկված է ռանգային նոր վիճականի, որը լոգ-ռանգային նշիչների վիճականու մոդիֆիկացիան է: Հիմնավորված է դրա կիրառությունը ոչ կայուն շուկաների դեպքում: