Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 22, 2001, 131–134.

# Описание дефицита моделью массового обслуживания

Атом С. Джанджугазян, Владимир Г. Саакян

**Аннотация**

**В данной работе описывается и изучается модель образования и ликвидации бюджетного дефицита в терминах системы массового обслуживания.**

При изучении экономических задач обычно требуется построить математическую модель и предложить методы нахождения значений ее основных параметров. Рассмотрим процесс планирования бюджета. Составим план прихода и расхода средств. В условиях нестабильной экономики, как правило расходы превышают доходы и приходится пополнять бюджет за счет выпуска ценных бумаг. Полученная сумма используется для выплат по плану. Однако, спустя некоторое время приходится осуществлять выкуп ценных бумаг. Процесс возникновения отрицательной разности между суммой поступлений и суммой выплат в текущий момент назовем дефицитом, а абсолютное значение этой разности — величиной дефицита.

В данной работе опишем процесс образования и ликвидации дефицита в терминах системы массового обслуживания.

Рассмотрим модель с одним обслуживающим прибором. Будем считать, что промежутки между соседними поступлениями требований независимы и одинаково распределены. Обозначим функцию распределения такого промежутка $A(t)$. Каждое требование при обслуживании получает (забирает) некоторый случайный ресурс обслуживающего прибора. Функция распределения этого ресурса $B(t)$. Обслуживающий прибор имеет возможность восстановления потраченного ресурса в некоторые случайные моменты времени на случайную величину.

Пусть промежутки между соседними восстановлениями ресурса независимы и одинаково распределены. Это распределение описывается функцией распределения $C(t)$, а величины восстановлений ресурса прибора-функцией распределения $R(t)$.

Пусть в момент времени $t=0$ ресурс прибора равен $r_0$. Если поступившее на обслуживание требование потребует для своего обслуживания ресурс меньший, чем в этот момент имеет прибор, то оно обслужится, а если величина требуемого ресурса будет больше, чем ресурс прибора, то требование будет ждать в очереди пока ресурс прибора не возрастет до требуемой величины.

Все поступающие за это время требования, независимо от требуемого для них ресурса станут в очередь в порядке поступления. Допускается неограниченная очередь.

Построенная модель массового обслуживания несколько отличается от стандартной тем, что здесь допускается мгновенное обслуживание неограниченного числа требований (в момент востановления ресурса обслуживающего прибора).

В обычной модели обслуживание происходит линейно во времени. Примеров, описываемых подобной моделью можно привести много. Например, поступление и расходование продукции в магазине, на складе, когда имеется дефицит продукции. При этом временем отпуска продукции пренебрегается.

Введем в рассмотрение следующие случайные величины:

$r(t)$ -остаточный ресурс прибора в момент времени t, $r(0)=r_0$;
$\nu(t)$ -число требований в очереди в момент времени t, $\nu(0) = 0$;
$l(t)$ -число требований, поступивших в систему до момента времени t, $l(0)=0$;
$h(t)$ -число восстановлений ресурса прибора до момента времени t; $h(0)=0$;
$\beta_i$, $i=1,2,...$-величина ресурса, требуемого для обслуживания i-го требования;
$l_i$, $i=1,2,...$-промежуток времени между поступлениями (i-1)-го и i-го требований;
$r_i$, $i=1,2,...$-величина восстановления ресурса прибора при i-ом восстановлении;
$h_i$, $i=1,2,...$-промежуток времени между поступлениями (i-1)-го и i-го восстановлений;

Составим уравнения, описывающие основные параметры системы в терминах случайных величин:

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \max\{n : n \ge 0, \sum_{i=1}^{n} h_i < t\} \\
l(t) &= \max\{n : n \ge 0, \sum_{i=1}^{n} l_i < t\} \\
\nu(t) &= \min\{n : 0 \le n \le l(t), \sum_{i=1}^{l(t)-n} \beta_i < \sum_{i=1}^{h(t)} r_i \\
r(t) &= \sum_{i=1}^{h(t)} r_i - \sum_{i=1}^{l(t)-\nu(t)} \beta_i
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Полученная система случайных величин может служить основой для построения имитационной модели по моментам поступлений требований и восстановлений ресурса прибора.

В определенных случаях может потребоваться распределение длины очереди и остаточного ресурса прибора:

$$P(\nu(t)=n, r(t)<x) \qquad (2)$$

Эта функция полностью описывает поведение очереди системы после любого заданного момента $t_0$, при условии того, что известны $\nu(t_0)$ и $r(t_0)$, и не зависит от поведения системы до момента $t_0$, т.е.

$$P(\nu(t)=n, r(t)<x / \nu(t_0)=n_0, r(t_0)=x_0) = P(\nu(t-t_0)=n, r(t-t_0)<x / \nu(0)=n_0, r(0)=x_0)$$

Используя соотношения (1) получим выражение для функции (2)

$$P(\nu(t)=n, r(t)<x) = P\left(\sum_{i=1}^{l(t)-n} \beta_i \le \sum_{i=1}^{h(t)} r_i < \sum_{i=1}^{l(t)-n+1} \beta_i, \sum_{i=1}^{h(t)} r_i - \sum_{i=1}^{l(t)-n} \beta_i < x\right) =$$

$$= \sum_{\substack{m \ge n \\ k \ge 0}} P(l(t)=m, h(t)=k) \cdot P\left(\sum_{i=1}^{m-n} \beta_i \le \sum_{i=1}^{k} r_i < \sum_{i=1}^{m-n+1} \beta_i, \sum_{i=1}^{k} r_i - \sum_{i=1}^{m-n} \beta_i < x\right)$$

В последнем соотношении использована независимость величин $l(t)$ и $h(t)$ от величин требуемого и восстанавливаемого ресурсов. Далее так же

$P(\nu(t)=n, r(t)<x)=$

$$= \sum_{\substack{m \ge n \\ k \ge 0}} P(l(t)=m) \cdot P(h(t)=k) \int_{y=0}^{\infty} P\left(y < \sum_{i=1}^{k} r_i < y + \beta_{m-n+1}, \sum_{i=1}^{k} r_i < x + y\right) d_y P\left(\sum_{i=1}^{m-n} \beta_i < y\right) =$$

$$=\sum_{\substack{m\ge n\\ k\ge 0}} P(l(t)=m)P(h(t)=k)\int_{y=0}^{\infty}\int_{z=y}^{z+y} P(z<y+\beta_{m-n+1})d_z P\left(\sum_{i=1}^{k} r_i<z\right)d_y P\left(\sum_{i=1}^{m-n}\beta_i<y\right)= \quad (3)$$

$$=\sum_{\substack{m\ge n\\ k\ge 0}} P(l(t)=m)P(h(t)=k)\int_{y=0}^{\infty}\int_{z=y}^{z+y}\int_{u=0}^{\infty}\chi(z<y+u)dB(u)d_z P\left(\sum_{i=1}^{k} r_i<z\right)d_y P\left(\sum_{i=1}^{m-n}\beta_i<y\right)$$

Здесь использована функция-индикатор

$$\chi(A)=\begin{cases} 1, \text{ если событие А истинно,}\\ 0, \text{ если событие А ложно.}\end{cases}$$

Распределения величин $l(t)$, $h(t)$, $\sum_{i=1}^{k} r_i$ и $\sum_{i=1}^{m-n}\beta_i$ являются свертками распределений (т.е. распределениями сумм случайных величин).

Введем обозначения $(0\le z\le 1, s>0)$:

$$L(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P(l(t)=n), \quad (4)$$

$$H(z,t)=\sum_{n=0}^{\infty} z^n P(h(t)=n),$$

и

$$p(z,s)=\int_0^{\infty} e^{-st} L(s,t)dt, \quad (5)$$

$$q(z,s)=\int_0^{\infty} e^{-st} H(z,t)dt$$

Преобразования (4) являются производящими функциями распределений $l(t)$ и $h(t)$, а (5)- их преобразованиями Лапласа.

Если мы найдем эти преобразования, то они однозначно определят исходные распределения ([1,2,3,4]).

Из независимости величин $l_i$, $i=1,2,...$ и $h_i$, $i=1,2,...$ следует ([3])

$$p(z,s)=\frac{1-p(s)}{s[1-zp(s)]}, \quad (6)$$

$$q(z,s)=\frac{1-q(s)}{s[1-zq(s)]},$$

где

$$p(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} d_t P(l_i<t), \quad (7)$$

$$q(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} d_t P(h_i<t).$$

Таким образом, распределения величин $l(t)$ и $h(t)$ однозначно определяются своими производящими функциями (6) и преобразованиями Лапласа (7), а распределения

$$P\left(\sum_{i=1}^{k} r_i < t\right) \text{ и } P\left(\sum_{i=1}^{m-n} \beta_i < t\right)$$

имеют, соответственно, следующие преобразования:

$$\int_0^\infty e^{-st} dP(\sum_{i=1}^{k} r_i < t) = [\int_0^\infty e^{-st} dR(t)]^k$$

и

$$\int_0^\infty e^{-st} dP(\sum_{i=1}^{m-n} \beta_i < t) = [\int_0^\infty e^{-st} dB(t)]^{m-n}$$

Функции, входящие в соотношение (3) полностью определены.

## Литература


[1] Г. П. Климов, Стохастические системы обслуживания, М. Наука, 1966.

[2] Н. Джейсуол, Очереди с приоритетами, М. Мир, 1973.

[3] Б. В. Гнеденко и др., Приоритеты системы обслуживания, М. Московский университет, 1973.

[4] Л. Клейнрок, Теория массового обслуживания, М. Машиностроение, 1979.


### Դեֆիցիտի նկարագրումը զանգվածային սպասարկման մոդելով

*Ա. Մ. Զանջողազյան, Վ. Գ. Սահակյան*


**Ամփոփում**

Աշխատանքում նկարագրվում և ուսումնասիրվում է բյուջեի դեֆիցիտի առաջացման և կրճատման մոդելը զանգվածային սպասարկման տերմիններով: