АКАДЕМИЯ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

АСТРОФИЗИКА

ТОМ 16 ФЕВРАЛЬ, 1980 ВЫПУСК 1

УДК 523.854

НЕЛИНЕЙНЫЕ БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ ЗВЕЗДНОЙ ПЛОТНОСТИ В МОДЕЛИ ОДНОРОДНОЙ СРЕДЫ. II. ТОНКИЙ СЛОЙ

С. Н. НУРИТДИНОВ

Поступила 15 июня 1979

Пересмотрена 2 сентября 1979

Исследованы вопросы существования и свойства бегущих волн плотности конечной амплитуды в модели звездной системы в виде тонкого слоя с двухступенчатой функцией распределения. Последняя является аппроксимацией широкого класса функций распределения равновесных состояний. Найдены зависимости фазовой скорости и длины бегущей волны плотности от амплитуды. С ростом амплитуды длина бегущей волны уменьшается. Область устойчивости на диаграмме длина волны—амплитуда сужается с увеличением фазовой скорости. Полученные волны звездной плотности устойчивы по отношению к колебаниям, вызывающим модуляционную неустойчивость.

В первой части работы [1] мы исследовали поведение бегущей волны плотности с большой амплитудой в сильно сплюснутой эллипсоидальной модели звездной системы с фазовой плотностью в виде одноступенчатой функции распределения. Последняя относится к категории, так называемой, модели «водяного мешка» [2], которая стимулировала исследования в направлениях численных экспериментов [3] и теоретических расчетов [4, 5]. В [1] было показано, что нелинейная бегущая волна звездной плотности ведет себя существенно иначе, чем такая же стационарная волна.

Так как большинство галактик являются относительно плоскими образованиями, то представляет интерес рассмотреть бегущие монохроматические волны звездной плотности в случае системы в виде тонкого слоя. Подробный анализ соответствующей стационарной волны плотности конечной амплитуды нами уже проводился [6]. В данной работе, в отличие от [1, 6], кроме того мы рассматриваем двойной «водяной мешок» с двухступенчатой функцией распределения. К этому побуждает нас то, что реальное равновесное состояние звездной системы описывается более сложной функцией скоростей, в качестве которой можно применять не только максвелловское распределение, но и ряд других функций [7, 8]. При рассмотрении двухступенчатой функции мы имеем возможность варьировать отношение значений ее на этих ступеньках и получать фазовую плотность разной формы.

1. *Равновесное состояние и основные уравнения.* Самосогласуем гравитационный потенциал однородного невращающегося тонкого слоя $\varphi_0(z)$ со следующей двухступенчатой функцией фазовой плотности:

$$f_0(v) = \eta_1\theta(v_1^2 - v^2) + \eta_2[\theta(v - v_1)\theta(v_2 - v) + \theta(-v - v_1)\theta(v + v_2)], \quad (1)$$

где $\theta(v)$ — функция Хевисайда, v — скорость, η_1, η_2, v_1 и v_2 — некоторые постоянные, причем $\eta_1 > \eta_2 > 0$, $v_2 > v_1 > 0$. Тогда имеем

$$\varphi_0(z) = -4\pi G[(\eta_1 - \eta_2)v_1 + \eta_2 v_2]\cdot|z|. \quad (2)$$

Данная модель звездной системы на фазовой плоскости, например, (x, v_x) имеет вид фигуры, состоящей из вложенных друг в друга двух подсистем, фазовые границы которых параллельны оси x и тянутся до бесконечности. При этом фазовая плотность внутренней подсистемы больше внешней. Поскольку направления x и y физически равновероятные, достаточно исследовать поведение бегущей волны звездной плотности, распространяющей по оси x, полагая в (1) $v = v_x$.

Возмущенное состояние модели (1) характеризуется деформацией фазовых границ каждой подсистемы. Обозначим через $w_i(x, t)$ $(i = \overline{1-4})$ значение скорости точки с координатой x на i-той границе в текущий момент времени, причем в исходном состоянии

$$w_1 = -w_2 = v_1, \quad w_3 = -w_4 = v_2. \quad (3)$$

Функции $w_i(x, t)$ удовлетворяют уравнению эволюции фазовой границы [1]

$$\frac{\partial w_i}{\partial t} + w_i\frac{\partial w_i}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

Здесь $\varphi(x, z, t)$ — возмущенный гравитационный потенциал системы, подчиняющийся уравнению Лапласа вне плоскости $z = 0$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (5)$$

при $z = 0$ условию скачка

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = -2\pi G[(\eta_1 - \eta_2)(w_1 - w_2) + \eta_2(w_3 - w_4)] \quad (6)$$

и условию на бесконечности $\lim\limits_{z\to\pm\infty}(\varphi - \varphi_0) = 0$.

Из (4)—(6) выводится следующее дисперсионное уравнение линейного приближения:

$$\frac{v_1(\eta_1-\eta_2)}{k^2v_1^2-\omega^2}+\frac{v^2\eta_2}{k^2v_2^2-\omega^2}-\frac{1}{4\pi Gk}=0, \tag{7}$$

где k — модуль волнового вектора, ω — частота. В (7) от переменной ω можно перейти к фазовой скорости $v_{p_0}=\omega/k$. Тогда длина бегущей волны в линейной теории

$$\lambda_0(v_{p_0})=\frac{1}{2G}\left|\frac{v_1(\eta_1-\eta_2)}{v_1^2-v_{p0}^2}+\frac{v_2\eta_2}{v_2^2-v_{p0}^2}\right|^{-1}. \tag{8}$$

Для любого v_{p_0}, лежащего в интервале

$$0\leqslant v_{p0}<v_1<v_2, \tag{9}$$

согласно (8) найдется свое значение $\lambda_0(v_{p0})$, и легко видеть, что эти значения заполняют отрезок $\lambda_0(v_{p0})\leqslant\lambda_0(0)$, где $\lambda_0(0)=(v_1v_2/2G)[v_1\eta_2+ + v_2(\eta_1-\eta_2)]^{-1}$ — аналог критической длины Джинса. Кроме того существуют еще другие волны, удовлетворяющие неравенству $v_1<v_{p_0}<v_2$, причем значение $\lambda_0(v_{p_0})$ может быть произвольным. Однако в последнем случае задача не имеет своего стационарного решения ($v_{p_0}=0$), и поэтому в данной работе такие волны мы не рассматриваем.

2. *Нахождение фазовой границы возмущенной системы.* Пусть $v_p(\varepsilon)$ — фазовая скорость нелинейной волны с амплитудой ε, причем $v_p>0$, $\varepsilon<1$. Перейдем к системе координат, движущейся вместе с волной, т. е. в (4) заменим $\partial/\partial t$ на $-v_p(\partial/\partial x)$, подразумевая далее под x разность $x-v_pt$. Интегрируя полученное уравнение, возьмем только следующие решения, имеющие физический смысл:

$$w_{1,2}(x)=v_p\pm\sqrt{v_p^2+2(\varphi+q_{1,2})}, \tag{10}$$

$$w_{3,4}(x)=v_p\pm\sqrt{v_p^2+2(\varphi+q_{3,4})}. \tag{11}$$

Здесь q_i — постоянные интегрирования, являющиеся также функциями от амплитуды ε. Вследствие периодичности волны плотности имеет место равенство $q_i(\varepsilon)=q_i(-\varepsilon)$. Решения (10) и (11) определяют возмущенные фазовые границы звездной системы.

Для нахождения $q_i(\varepsilon)$ необходимо выписать условия неизменности импульса и сохранения массы всей звездной системы

$$(\eta_1-\eta_2)\int\limits_0^\lambda dx\int\limits_{w_2(x)}^{w_1(x)} v\,dv+\eta_2\int\limits_0^\lambda dx\int\limits_{w_4(x)}^{w_3(x)} v\,dv=0, \tag{12}$$

$$\int\limits_0^\lambda (w_1-w_2)\,dx=2v_1\lambda,\qquad \int\limits_0^\lambda (w_3-w_4)\,dx=2v_2\lambda, \tag{13}$$

где $\lambda=\lambda(\varepsilon,\,v_p)$ — длина волны плотности конечной амплитуды. Подставляя (10) и (11) в (12) и (13), после некоторых преобразований имеем

$$(\eta_1-\eta_2)(q_1-q_2+2v_1v_p)+\eta_2(q_3-q_4+2v_2v_p)=0. \tag{14}$$

Поскольку нас интересует бегущая волна плотности с амплитудой $\varepsilon<1$, то в данном случае достаточно определять $q_i(\varepsilon)$ с точностью порядка ε^2. Из (14), принимая во внимание условие (3) и вид функций $w_i(x)$ в (10) и (11), получаем

$$q_{1,2}=v_1^2/2\mp v_1v_p+\varepsilon^2 q^{(1)}+o_1(\varepsilon^3), \tag{15}$$

$$q_{3,4}=v_2^2/2\mp v_2v_p+\varepsilon^2 q^{(2)}+o_2(\varepsilon^3), \tag{16}$$

где постоянные $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ уже не зависят от ε и должны определяться из граничного условия (6). Возмущенный гравитационный потенциал $\varphi(x,\,z)$ в случае волн плотности конечной амплитуды имеет вид

$$\varphi(x,z)=\varphi_0(z)+\varepsilon\varphi_1(x,z)+\varepsilon^2\varphi_2(x,z)+\varepsilon^3\varphi_3(x,z)+\cdots \tag{17}$$

Очевидно, бегущая волна плотности в общем случае определяется двумя параметрами. В нашей задаче в качестве одного из них фигурирует амплитуда ε. Кроме амплитуды нужно фиксировать длину волны λ или фазовую скорость v_p. Мы рассмотрим оба варианта в отдельности.

3. *Зависимость фазовой скорости от амплитуды.* Ее мы будем искать в виде

$$v_p(\varepsilon)=v_{p_0}+\varepsilon^2 v_{p_1}+o(\varepsilon^3), \tag{18}$$

считая заданной длину нелинейной волны плотности. В (18) величина v_{p_0} определяется из дисперсионного уравнения (7) и подчиняется неравенству (9).

Подставляя (10), (11), (15)—(17) в (6) и разлагая правую часть последнего по степени ε, получаем следующие граничные условия для нелинейных гармоник гравитационного потенциала:

$$-\frac{1}{4\pi G}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)_{z=0}=\frac{v_1(\eta_1-\eta_2)}{u_1}\left(q^{(1)}+\varphi_2-\frac{\varkappa_1^2}{2u_1^2}\varphi_1^2\right)+$$
$$+\frac{v_2\eta_2}{u_2}\left(q^{(2)}+\varphi_2-\frac{\varkappa_2^2}{2u_2^2}\varphi_1^2\right), \tag{19}$$

$$-\frac{1}{4\pi G}\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial z}\right)_{z=0}=\frac{v_1(\eta_1-\eta_2)}{u_1}\left\{\varphi_3+\frac{\nu_1^2}{2u_1^4}\varphi_1^3+\frac{\varphi_1}{u_1}\left|2v_{p_0}v_{p_1}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\varkappa_1^2}{u_1}(q^{(1)}+\varphi_2)\right|\right\}+\frac{v_2\eta_2}{u_2}\left\{\varphi_3+\frac{\nu_2^2}{2u_2^4}\varphi_1^3+\frac{\varphi_1}{u_2}\left|2v_{p_0}v_{p_1}-\frac{\varkappa_2^2}{u_2}(q^{(2)}+\varphi_2)\right|\right\}, \tag{20}$$

где введены обозначения $u_n=v_n^2-v_{\rho 0}^2$, $\varkappa_n^2=v_n^2+3v_{\rho 0}^2$, $\nu_n^2=v_n^4+$ $+10\,v_n^2v_{\rho 0}^2+5v_{\rho 0}^4$, $(n=1,\ 2)$.

Решение уравнения Лапласа (5) для m-го приближения

$$\varphi_m(x,\ z)=\sum_{j=1}^{m}\mu_{mj}\cos jkx\exp(-jkz),\ z>0,\ m=1,\ 2,\ 3,\ldots . \tag{21}$$

Для удобства далее будем считать, что постоянная μ_{11} содержится в ε.

Тогда из (19), с учетом (21) следует, что

$$\mu_{22}=-\frac{\pi G}{k}\left[v_1(\eta_1-\eta_2)\frac{\varkappa_1^2}{u_1^3}+v_2\eta_2\frac{\varkappa_2^2}{u_2^3}\right], \tag{22}$$

$$\frac{v_1(\eta_1-\eta_2)}{u_1}\left(q^{(1)}-\frac{\varkappa_1^2}{4u_1^2}\right)+\frac{v_2\eta_2}{u_2}\left(q^{(2)}-\frac{\varkappa_2^2}{4u_2^2}\right)=0, \tag{23}$$

а значение постоянной μ_{21} вычисляется из третьего приближения. Для определения $q^{(1)}$ и $q^{(2)}$ заметим, что граничное условие (6) можно было бы написать для каждой подсистемы в отдельности. Точнее, если $\varphi=\psi+\Psi$, где ψ и Ψ — гравитационные потенциалы, соответственно, подсистем с плотностями $\eta_1-\eta_2$ и η_2, то

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)_{z=0}=-2\pi G(\eta_1-\eta_2)(w_1-w_2),$$
$$\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)_{z=0}=-2\pi G\eta_2(w_3-w_4). \tag{24}$$

Отсюда находим,

$$q^{(1)}=\varkappa_1^2/4u_1^2,\quad q^{(2)}=\varkappa_2^2/4u_2^2. \tag{25}$$

Подставляя (21) при $m=3$ в (20), с учетом (22) и (25) получаем $\mu_{21}=\mu_{32}=0$,

$$\mu_{33}=\frac{\pi G}{k}\left[v_1(\eta_1-\eta_2)\left(\frac{\nu_1^2}{4u_1^5}-\frac{\varkappa_1^2}{u_1^3}\mu_{22}\right)+v_2\eta_2\left(\frac{\nu_2^2}{4u_2^5}-\frac{\varkappa_2^2}{u_2^3}\mu_{22}\right)\right], \tag{26}$$

$$v_{p2}=-\frac{1}{16\,v_{p0}}\left[\frac{v_1}{u_1^2}(\eta_1-\eta_2)+\frac{v_2}{u_2^2}\eta_2\right]^{-1}\left[\frac{v_1(\eta_1-\eta_2)}{u_1^5}(v_1^4+18\,v_1^2v_{p0}^2-\right.$$
$$\left.-3v_{p0}^4)+\frac{v_2\eta_2}{u_2^5}(v_2^4+18\,v_2^2v_{p0}^2-2v_{p0}^4)+\frac{4k}{\pi G}\mu_{22}^2\right], \tag{27}$$

причем слагаемые с коэффициентом μ_{31} сокращаются. Из (27) следует, что для всякого $v_{p0}\in[0,\,v_1)$ величина $v_{p2}<0$, поскольку $\eta_1>\eta_2$ и $v_n^4+18\,v_n^2v_{p0}^2-3v_{p0}^4>0$. Это означает, что значение фазовой скорости волны звездной плотности конечной амплитуды (18) меньше соответствующего значения в линейной теории.

4. *Длина волны плотности конечной амплитуды.* Зафиксируем фазовую скорость v_p, считая ее малым параметром, а состояние системы, соответственно, близким к границе устойчивости, что представляет интерес для нелинейного обобщения критерия Джинса. Тогда вследствие периодичности волны имеет место разложение

$$\lambda(\varepsilon,\,v_p)=\lambda_{00}+v_p^2\lambda_{02}+\varepsilon^2\lambda_{20}+\varepsilon^2v_p^2\lambda_{22}+\cdots, \tag{28}$$

где $\lambda_{00}=\lambda_0(0)$ определяется из (8). Сравнивая (28) при $\varepsilon=0$ с (7), находим выражение для второй неизвестной постоянной

$$\lambda_{02}=-2G\left(\frac{\eta_1-\eta_2}{v_1^3}+\frac{\eta_2}{v_2^3}\right)\lambda_{00}^2. \tag{29}$$

С целью нахождения λ_{20} и λ_{22} подставим (17) в (5) и заменим x на $\lambda x^*/\lambda_{00}$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε и опуская звездочку в x^*, получаем

$$L\varphi_1=0,\quad L\varphi_2=0, \tag{30}$$

$$L\varphi_3=2\,(\beta_{20}+v_p^2\beta_{22})\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}, \tag{31}$$

где

$$L=\Delta^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\qquad \Delta^2=1-2v_p^2\beta_{02},\ \ \beta_{ls}=\lambda_{ls}/\lambda_{00}.$$

Теперь в граничных условиях (19) и (20) $v_{p2}=0$, $v_{p0}=v_p$.

Напишем решения уравнений (30) и (31).

$$\varphi_1(x, z) = \cos\frac{kx}{\Delta}\exp(-kz), \qquad \varphi_2(x, z) = \mu_{22}\cos\frac{2kx}{\Delta}\exp(-2kz), \tag{32}$$

$$\begin{aligned}\varphi_3(x, z) = &\left|\mu_{31} + (\beta_{20} + v_p^2\beta_{22})\frac{kz}{\Delta^2}\right|\cos\frac{kx}{\Delta}\exp(-kz) + \\ &+ \mu_{33}\cos\frac{3kx}{\Delta}\exp(-3kz).\end{aligned} \tag{33}$$

Здесь коэффициенты μ_{mj} те же постоянные, которые были найдены в предыдущем пункте, причем коэффициент μ_{11} содержится в ε. Подставляя (32) и (33) в (19) и (20), находим

$$\beta_{20} = \frac{\pi G}{k}\left|\beta_{02}\left(\frac{\eta_1-\eta_2}{v_1^3} + \frac{\eta_2}{v_2^3}\right) - \frac{\eta_1-\eta_2}{v_1^5} - \frac{\eta_2}{v_2^5}\right|, \tag{34}$$

$$\begin{aligned}\beta_{22} = \frac{3\pi G}{k}&\left\{\left(\frac{\eta_1-\eta_2}{v_1^5} + \frac{\eta_2}{v_2^5}\right)\left|\beta_{02} - \frac{4\pi G}{k}\left(\frac{\eta_1-\eta_2}{v_1^3} + \frac{\eta_2}{v_2^3}\right)\right| - \right. \\ &\left. - \frac{23}{6}\left(\frac{\eta_1-\eta_2}{v_1^7} + \frac{\eta_2}{v_2^7}\right)\right\} - 2\beta_{02}\beta_{20}.\end{aligned} \tag{35}$$

Поскольку $\beta_{02} = \lambda_{02}/\lambda_{00} < 0$ согласно (29), то из (34) и (35) видно, что для волн плотности конечной амплитуды $\beta_{20} < 0$, $\lambda(\varepsilon, v_p) < \lambda(\varepsilon, 0) < \lambda_{00}$, и с ростом фазовой скорости длина волны $\lambda(\varepsilon, v_p)$ уменьшается.

Заключение. Таким образом, на основании идей общей теории нелинейных колебаний найдены зависимости длины бегущей волны звездной плотности и ее фазовой скорости от амплитуды в модели тонкого слоя (2). Видно, что при заданной длине волны плотности ее фазовая скорость уменьшается. Такая же закономерность имеет место между длиной волны и амплитудой при фиксированной фазовой скорости. Это значит, что с ростом фазовой скорости область устойчивости постепенно сужается. Эти результаты справедливы только в том случае, когда фазовая плотность внутренней подсистемы больше внешней, т. е. при условии $\eta_1 > \eta_2$ (при $\eta_1 < \eta_2$ выражение (8) не обязательно равно длине Джинса). Данному условию, как известно, соответствует широкий класс функций распределения (например, функции Максвелла, Планка [7], Линденбелла [9]). Из (27) следует, что качественная картина остается неизменной и в случае, когда число ступенек в функции распределения $f_0(v)$ больше двух.

Как видно из (6), (10) и (11), когда $v_p \neq 0$ поверхностная плотность возмущенной системы, в отличие от стационарного случая [6], нигде не обращается в нуль, и тонкий слой не сможет разделиться на отдельные сгущения.

Из (7) легко заметить, что $d\omega/dk < 0$. Следовательно, учитывая $v_{p2} < 0$, заключаем, что рассмотренные нами волны плотности не подчиняются критерию Лайтхилла и являются устойчивыми по отношению к разбиению волны на пакеты и самосжатию этих пакетов. Пользуясь случаем отметим, что в первой части работы [1] формула (16) неточна. Верный ее вид, приведенный в журнале «Астрофизика», 1979, 15, № 4, также показывает наличие модуляционной устойчивости в эллипсоидальной модели.

Наконец, следует подчеркнуть, что вся полученная качественная картина относительно поведения бегущей волны плотности в тонком слое оказалась такой же, как в [1], с учетом последнего замечания.

Автор выражает благодарность В. А. Антонову за обсуждение результатов работы.

Астрономический институт
АН Узб. ССР

NON-LINEAR RUNNING WAVES OF STELLAR DENSITY IN MODEL OF A HOMOGENEOUS MEDIUM. II. THIN LAYER

S. N. NURITDINOV

The existence and properties of running waves of finite amplitude in the model of stellar system in a form of thin layer with two-stage distribution function are studied. The latter is an approximation of large class of equilibrium distribution function.

The dependence of the phase velocity and wavelength from the amplitude is found. With the increase of the amplitude the length of running wave decreases. The region of stability with the increase of the phase velocity becomes narrow. These stellar density waves are stable with reference to the oscillation which lead to the modulation instability.

ЛИТЕРАТУРА

1. *С. Н. Нуритдинов*, Астрофизика, 13, 697, 1977.
2. *P. Bouvier, G. Janin*, Astron. Astrophys., 5, 124, 1970.
3. *S. Cuperman, A. Harten, M. Lecar*, Astrophys. Space Sci., 13, 411, 425, 1971.
4. *Г. С. Бисноватый-Коган*, Астрофизика, 7, 121, 1971.
5. *В. А. Антонов*, Фигуры равновесия, в сб. «Астрономия», 10, ВИНИТИ, М., 1975, стр. 7.
6. *С. Н. Нуритдинов*, Астрофизика, 14, 671, 1978.
7. *Р. Б. Шацова*, Астрон. ж., 48, 126, 1971; 51, 980, 1974.
8. *Л. Э. Гуревич, А. Д. Чернин*, Введение в космогонию, Наука, М., 1978.
9. *D. Lynden-Bell*, M. N., 136, 101, 1967.