Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 21, 2000, 181–188.

О численном решении одного интегрального уравнения типа свертки с суммарно-разностным ядром в задаче диффузионного скольжения

Ашот Н. Афян, Сильва М. Андриян

БАО НАН РА

Аннотация

В работе рассматривается линеаризованное уравнение Больцмана (УБ) с интегралом столкновений в форме БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модели с частотой, пропорциональной скорости молекул. Эта задача сводится к однородному консервативному интегральному уравнению Винера-Хопфа.

1 Введение

Задачам течения газов в полупространстве, ограниченном плоской твердой стенкой, посвящены многие работы [1-3,6]. Эти задачи описываются с помощью модельного уравнения Больцмана (УБ) с оператором столкновений в форме БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук). В частности, в работе [3] было построено модельное УБ с интегралом столкновений в форме эллипсоидально-статистической модели с частотой, пропорциональной скорости молекул газа (т.е. постоянной длиной свободного пробега).

В данной работе рассматривается линеаризованное УБ с интегралом столкновений в форме БГК модели с частотой, пропорциональной скорости молекул. Эта задача сводится к однородному консервативному интегральному уравнению Винера-Хопфа. С применением модифицированного метода дискретных ординат работы [4], специального метода факторизации Енгибаряна [5], ассоциирующего с ним уравнения Амбарцумяна, и ряда новых построений реализовано численное решение полученного консервативного интегрального уравнения.

2 Постановка задачи и основные уравнения

Пусть одноатомный газ, заполняющий полупространство, ограниченное плоской стенкой $x = 0$, течет вдоль оси OY со среднемассовой скоростью $u(x)$. Требуется найти функцию распределения и скорость скольжения газа у стенки, а также их асимптотику вдали от поверхности стенки.

Линеаризованное уравнение Больцмана можно записать в виде (см. [1-3])

$$s_1 \frac{\partial f(x,\vec{s})}{\partial x} = -\nu(s) f(x,\vec{s}) + \nu(s)\beta e^{-\alpha s^2}(1 + 2\alpha s_2 u(x)). \tag{1}$$

Здесь $f(x,\vec{s})$ – искомая функция распределения, $\alpha = \frac{m}{2kT}$, $\beta = n(\frac{\alpha}{\pi})^{\frac{3}{2}}$, m – масса молекул, T – температура, n – концентрация газа, k – постоянная Больцмана, $\nu(s)$ – частота столкновений, которую в дальнейшем мы будем считать пропорциональной скорости молекул $\nu(s) = \sigma_0 s$ (примем $\sigma_0 = 1$), s_i- i-ая компонента вектора скорости $\vec{s}$.

К уравнению (1) присоединим граничные условия. Будем считать, что одна часть молекул газа от раздела газ - поверхность отражается чисто диффузно с максвелловским распределением, а другая – зеркально:

$$f^+(0,\vec{s}) = q\beta e^{-\alpha s^2} + (1-q)f^-(0,\vec{s}), \tag{2}$$

где введены следующие обозначения

$$f^+(x,\vec{s}) = \begin{cases} f(x,\vec{s}), & \textit{если} \quad s_1 > 0, \\ 0, & \textit{если} \quad s_1 < 0, \end{cases} \quad f^-(x,\vec{s}) = \begin{cases} 0, & \textit{если} \quad s_1 > 0, \\ f(x,\vec{s}), & \textit{если} \quad s_1 < 0 \end{cases}$$

q – так называемый коэффициент аккомодации.

Из закона сохранения у компоненты импульса следует

$$\int s_2\nu(s)f(x,\vec{s})d^3s = \beta\int \nu(s)s_2e^{-\alpha s^2}(1+2\alpha s_2u(x))d^3s. \tag{3}$$

После интегрирования правой части (3) будем иметь

$$u(x) = \frac{3\alpha^2}{8\pi\beta}\int ss_2f(x,\vec{s})d^3s. \tag{4}$$

Из (1) и (2) имеем

$$f^+(x,\vec{s}) = \beta e^{-\alpha s^2} + 2\alpha\beta s_2e^{-\alpha s^2}\int\limits_0^x e^{-\frac{s}{s_1}(x-t)}u(t)\frac{s}{s_1}dt +$$

$$+2(1-q)\alpha\beta s_2e^{-\alpha s^2}\int\limits_0^\infty e^{-\frac{s}{s_1}(x+t)}u(t)\frac{s}{s_1}dt, \tag{5}$$

$$f^-(x,\vec{s}) = \beta e^{-\alpha s^2} + 2\alpha\beta s_2e^{-\alpha s^2}\int\limits_x^\infty e^{-\frac{s}{s_1}(t-x)}u(t)\frac{s}{s_1}dt. \tag{6}$$

Подставляя (5) и (6) в (4), получим

$$u(x) = \frac{3\alpha^2}{4\pi}\int ss_2e^{-\alpha s^2}d^3s + \frac{3\alpha^3}{4\pi}\int\limits_0^\infty\left(\int e^{-\frac{s}{s_1}|x-t|}e^{-\alpha s^2}s_2^2\frac{s^2}{s_1}d^3s\right)u(t)dt +$$

$$+\frac{3\alpha^3}{4\pi}(1-q)\int\limits_0^\infty\left(\int e^{-\frac{s}{s_1}(x+t)}e^{-\alpha s^2}s_2^2\frac{s^2}{s_1}d^3s\right)u(t)dt. \tag{7}$$

Перейдем к сферическим координатам $s_1 = s\cos\theta$, $s_2 = s\sin\theta\cos\varphi$, $s_3 = s\sin\theta\sin\varphi$ $(0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \varphi \le 2\pi, 0 \le s \le \infty)$. Заметим, что первый интеграл в (7) равен нулю.

Обозначим $\mu = \cos\theta = \frac{s}{s_1}$, получим

$$u(x) = \frac{3}{4}\int_0^\infty\left(\int_0^1 e^{-\frac{|x-t|}{\mu}}(1-\mu^2)\frac{d\mu}{\mu}\right)u(t)dt + \frac{3}{4}(1-q)\int_0^\infty\left(\int_0^1 e^{-\frac{(x+t)}{\mu}}(1-\mu^2)\frac{d\mu}{\mu}\right)u(t)dt.$$

Итак, граничная задача (1),(2),(4) сводится к следующему однородному интегральному уравнению по отношению к среднемассовой скорости:

$$u(x) = \int_0^\infty K(|x-t|)u(t)dt + \varepsilon\int_0^\infty K(x+t)u(t)dt, \tag{8}$$

где $\varepsilon = 1-q$ и

$$K(x) = \frac{3}{4}\int_0^1 e^{-\frac{|x|}{\mu}}(1-\mu^2)\frac{d\mu}{\mu}. \tag{9}$$

Легко можно убедиться, что ядро интегрального уравнения удовлетворяет условию консервативности:

$$K \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = 1 \tag{10}$$

и обладает конечными моментами любого порядка

$$\nu_p = m_p(K) = \int_0^\infty x^p K(x)dx = \frac{3}{2}\frac{p!}{(p+1)(p+3)}, \quad p \geq 1.$$

Представим ядро (9) уравнения (8) в виде

$$K(x) = \int_1^\infty e^{-|x|s}d\sigma(s), \tag{11}$$

где σ - строго возрастающая непрерывная функция в интервале $(1, +\infty)$

$$\sigma(s) = \frac{3}{4}\left(\ln s + \frac{1}{2s^2}\right)$$

с непрерывной производной

$$G(s) = \sigma'(s) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s^3}\right).$$

Требуется построить положительное решение уравнения (8), обладающее асимптотикой (см. [1-3, 6]).

$$u(x) \sim ax \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \quad \text{где} \;\; a = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_\infty = const.$$

Обозначив $u(x) - ax = v(x)$, получим неоднородное интегральное уравнение

$$v(x) = g(x) + \int_0^\infty K(|x-t|)v(t)dt + \varepsilon\int_0^\infty K(x+t)v(t)dt, \tag{12}$$

где

$$g(x) = \int_1^\infty e^{-xs} G_1(s) ds, \quad G_1(s) = a(1+\varepsilon)\frac{G(s)}{s^2}.$$

Решение уравнения (12) записывается в виде (см. [5-7])

$$v(x) = \int_1^\infty e^{-xs}\varphi(s) G_2(s) ds + \int_1^\infty \varphi(s) G_2(s) ds \int_0^\infty \frac{e^{-xp} - e^{-xs}}{s-p} d\omega(p), \tag{13}$$

$$G_2(s) = G_1(s) + \varepsilon\varphi(s) G(s) F(s)$$

где $\varphi(s)$ - функция Амбарцумяна, которая определяется из соответствующего уравнения Амбарцумяна (см. [5])

$$\varphi(s) = 1 + \varphi(s) \int_1^\infty \frac{\varphi(p) G(p)}{s+p} dp, \tag{14}$$

ω - неубывающая функция на $(0, +\infty)$ (см. [7]), причем

$$\int_0^\infty \frac{d\omega(p)}{s+p} = \varphi(s) - 1, \tag{15}$$

а функция $F(s)$ удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$F(s) = \int_1^\infty \frac{\varphi(p) G_1(p)}{s+p} dp + \varepsilon \int_1^\infty \frac{\varphi^2(p) G(p)}{s+p} F(p) dp. \tag{16}$$

3 Численный метод решения уравнения (14)

Ниже мы будем следовать результатам работы [4]. В дальнейшем во всех соотношениях, связанных с решением (13) уравнения (12), интегралы вида $\int_a^\infty h(s) G(s) ds$ заменим конечной суммой вида $\sum_{k=0}^n a_k h(s_k)$.

Рассмотрим некоторое разбиение интервала $[1, +\infty)$: $1 = s_0 < s_1 < \cdots < s_{n+1}$. Применим метод аппроксимации снизу. Ядро K, задаваемое по формуле (11) основного интегрального уравнения, заменим редуцированным ядром $\widetilde{K}$ вида

$$\widetilde{K}(x) = \sum_{m=0}^n e^{-|x| s_{m+1}} [\sigma(s_{m+1}) - \sigma(s_m)],$$

удовлетворяющим условию

$$0 < \widetilde{K} < K. \tag{17}$$

Обозначим

$$\lambda = \| \widetilde{K} \|_{L_1} = 2\int_0^\infty \widetilde{K}(x) dx$$

Из (17) и (10) имеем $\lambda < 1$ и

$$\lambda = \sum_{m=0}^n \frac{a_m}{s_{m+1}},$$

где

$$a_m = \frac{3}{2}[\ln \frac{s_{m+1}}{s_m} + \frac{1}{2}(\frac{1}{s_{m+1}^2} - \frac{1}{s_m^2})]. \tag{18}$$

Итак, консервативное ядро K заменяем на диссипативное ядро $\widetilde{K}$.

Обозначим

$$\delta(s_1, s_2, \cdots, s_n) = \delta = \| K - \widetilde{K} \|_{L_1^+} = \frac{1}{2}(1 - \sum_{m=0}^{n} \frac{a_m}{s_{m+1}}) \tag{19}$$

Для того, чтобы обеспечить наперед заданную точность, необходимо уменьшить число δ, выбрав n достаточно большим. Однако при заданном числе n возникает проблема оптимального выбора свободных параметров s_m и a_m, при которых δ достигает минимума.

Полагая $x_k = \frac{1}{s_k}$ получаем, что точка минимума функции δ определяется из системы:

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{1 - x_k^2}[1 - \frac{1}{2}(3x_k^2 - x_{k-1}^2) - \ln \frac{x_{k-1}}{x_k}], \tag{20}$$

к которой следует присоединить следующие граничные условия

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = 0. \tag{21}$$

Система (20) решается методом "пристрелки". Заменяем второе из условий (21) условием $x_1 = t$ (t - параметр). Подставляя $x_0 = 1$ и $x_1 = t$ в (20) определяем x_2. Зная x_1 и x_2, находим x_3 и т.д., до тех пор пока $x_{n+1} = 0$. Если $m \leq n$ и $x_{m+1} > 0$, то параметр t следует уменьшить. Если $x_{m+1} < 0$, то, наоборот, t нужно увеличить.

Определив значения x_k легко вычислить значения узлов s_k и весовых множителей a_k .

Далее рассмотрим "усеченное" уравнение Амбарцумяна (14)

$$\widetilde{\varphi}(s) = 1 + \frac{1}{2}\widetilde{\varphi}(s) \sum_{0}^{n} \frac{a_m \widetilde{\varphi}(s_m)}{s + s_m}.$$

Полагая $s = s_k$ и $\varphi_k = \widetilde{\varphi}(s_k)$ получаем нелинейную алгебраическую систему

$$\varphi_k = 1 + \frac{1}{2}\varphi_k \sum_{m=0}^{n} \frac{a_m \varphi_m}{s_k + s_m},$$

которая решается простыми итерациями

$$\varphi_k^{(N+1)} = 1 + \frac{1}{2}\varphi_k^{(N)} \sum_{m=0}^{n} \frac{a_m \varphi_m^{(N)}}{s_k + s_m}, \quad \varphi_k^{(0)} = 1, \quad N = 0, 1, 2, ... \tag{22}$$

Дискретизируя интеграл правой части уравнения (16) получим

$$F(s) = \sum_{m=0}^{n} \frac{c_m \varphi_m}{s + s_m} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^{n} \frac{a_m \varphi_m^2 F_m}{s + s_m}, \quad F_m = F(s_m), \tag{23}$$

где

$$c_m = \int_{s_m}^{s_{m+1}} G_1(s) ds = \frac{3a(1+\varepsilon)}{16}(x_{m+1}^4 - x_m^4 - 2x_{m+1}^2 + 2x_m^2).$$

Подставляя в (23) $s = s_k \quad (k = 0, 1, \cdots, n)$ получим систему алгебраических уравнений относительно F_k

$$F_k = \sum_{m=0}^{n} \frac{c_m \varphi_m}{s_k + s_m} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{m=0}^{n} \frac{a_m \varphi_m^2 F_m}{s_k + s_m}.$$

Итак, приближенное решение исходного уравнения (12) принимает вид:

$$v(x) \approx \tilde{v}(x) = \sum_{m=0}^{n} e^{-xs_m} \varphi_m r_m + \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} r_m q_k \varphi_m \frac{e^{-xp_k} - e^{-xs_m}}{s_m - p_k}, \tag{24}$$

где

$$r_m = c_m + \frac{\varepsilon}{2} a_m \varphi_m F_m,$$

числа p_k - корни следующего характеристического уравнения (см. [7])

$$\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n} \frac{a_m \varphi_m}{s_m - p_k} = 1, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n$$

а коэффициенты q_m определяются из алгебраической системы

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{q_m}{s_k - p_m} = 1, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, n. \tag{25}$$

Система (25) обладает единственным, причем положительным решением (см. [7])

4 Результаты численных расчетов

В настоящем разделе приводятся результаты некоторых численных расчетов для случая $a = 1$.

В табл.1 представлены значения последовательности x_m, значения узлов s_m, и весовых множителей a_m для $n = 20 - u$ точек.

Таблица 1.

Значения x_m, узлов s_m и весовых множителей a_m

m	x_m	s_m	a_m
0	1.00999999	0.99009901	0.04163822
1	0.83800197	1.19331467	0.05317015
2	0.75987697	1.31600249	0.06180910
3	0.69613814	1.43649650	0.06919838
4	0.64048123	1.56132603	0.07592374
5	0.59038341	1.69381452	0.08227867
6	0.54451209	1.83650649	0.08844176
7	0.50205648	1.99180782	0.09453779
8	0.46247861	2.16226220	0.10066397
9	0.42540023	2.35072756	0.10690347
10	0.39054421	2.56052971	0.11333395

Таблица 1, продолжение.

11	0.35770115	2.79562974	0.12003238
12	0.32670927	3.06082535	0.12707928
13	0.29744145	3.36200619	0.13456294
14	0.26979655	3.70649672	0.14258316
15	0.24369340	4.10351706	0.15125602
16	0.21906650	4.56482410	0.16072004
17	0.19586286	5.10561323	0.17114328
18	0.17403962	5.74581814	0.18273439
19	0.15356222	6.51201868	0.19575648
20	0.13440302	7.44030905	0.21054839
21	0.11654017	8.58073235	0.22755550

Отметим, что при этом погрешность δ (см.(19)) составляет 10 %. С увеличением числа узлов она уменьшается. Так, в $n = 100$ точках δ составляет 8 %, а при $n = 1000$ – $\delta \sim 5\%$, что и следовало ожидать, поскольку консервативный случай сопряжен с серьезными вычислительными трудностями.

В Табл.2 приведены значения функции Амбарцумяна $\tilde{\varphi}(s)$, получаемые в результате численного решения уравнения (22). Из [5] следует сходимость числовых последовательностей $\varphi_k^(N)$ по N.

Таблица 2.
Значения функции Амбарцумяна.

m	0	1	2	3	4	5	6
$\tilde{\varphi}(s)$	1.884456	1.795794	1.750872	1.711718	1.675487	1.641086	1.607964
m	7	8	9	10	11	12	13
$\tilde{\varphi}(s)$	1.575801	1.544400	1.513634	1.483423	1.453716	1.424487	1.395726
m	14	15	16	17	18	19	20
$\tilde{\varphi}(s)$	1.367438	1.339640	1.312361	1.285637	1.25951	1.234054	1.209317

В Табл. 3 приведены приближенные значения функции v при различных значениях ε.

Таблица 3.
Значение функции $\tilde{v}$.

x	$\varepsilon = 0$	$\varepsilon = 0.2$	$\varepsilon = 0.4$	$\varepsilon = 0.6$	$\varepsilon = 0.8$	$\varepsilon = 1$
0	0.10676	0.14124	0.18375	0.23754	0.30792	0.40414
0.25	0.09898	0.13105	0.17064	0.22078	0.28645	0.37630
0.50	0.09482	0.12561	0.16363	0.21182	0.27495	0.36137
0.75	0.09108	0.12071	0.15731	0.20373	0.26457	0.34788
1.00	0.08752	0.11603	0.15128	0.19600	0.25465	0.33498
1.25	0.08404	0.11147	0.14539	0.18844	0.24493	0.32234
1.50	0.08060	0.10695	0.13955	0.18096	0.23530	0.30980
1.75	0.07717	0.10244	0.13373	0.17348	0.22568	0.29727
2.00	0.07373	0.09792	0.12789	0.16598	0.21602	0.28468

Таблица 3, продолжение.

2.25	0.07028	0.09338	0.12201	0.15843	0.20629	0.27198
2.50	0.06681	0.08881	0.11610	0.15082	0.19648	0.25917
2.75	0.06332	0.08421	0.11013	0.14314	0.18656	0.24622
3.00	0.05980	0.07957	0.10411	0.13539	0.17655	0.23312
3.25	0.05625	0.07489	0.09805	0.12757	0.16644	0.21989
3.50	0.05269	0.07019	0.09194	0.11969	0.15625	0.20653
3.75	0.04912	0.06546	0.08580	0.11175	0.14597	0.19306
4.00	0.04554	0.06073	0.07964	0.10379	0.13564	0.17951
4.25	0.04196	0.05599	0.07347	0.09580	0.12528	0.16590
4.50	0.03840	0.05126	0.06731	0.08783	0.11493	0.15227
4.75	0.03486	0.04657	0.06119	0.07989	0.10460	0.13869
5.00	0.03137	0.04193	0.05513	0.07202	0.09437	0.12519

Авторы выражают глубокую благодарность своему научному руководителю профессору А. Х. Хачатряну за постановку задачи и обсуждения.

Литература

[1] Черчиньяни К, Теория и приложения уравнения Больцмана М.: Мир, 1978.

[2] Коган М. Н., Динамика разреженного газа, М.: Наука, 1962.

[3] Латышев А. В., Юшканов А. А., Задача Крамерса для эллипсоидально- статистического уравнения Больцмана с частотой, пропорциональной скорости молекул. ЖВМиМФ, т. 37, N 4, 1997, с. 483–493.

[4] Енгибарян Н. Б., Мелконян Э. А., О методе дискретных ординат, ДАН СССР, 1987, т. 292, с. 322–326.

[5] Арабаджян Л. Г., Енгибарян Н. Б., Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения. Итоги науки и техники. Мат. анализ, 1984, т. 22, с. 175–244.

[6] Енгибарян Н. Б., Хачатрян А. Х., О некоторых интегральных уравнениях типа свертки в кинетической теории. ЖВМиМФ, т. 38, N 3, с. 37–42, 1998.

[7] Енгибарян Н. Б., Погосян А. А., Об одном классе интегральных уравнений восстановления, Мат. Заметки, т. 47, вып. 6, с. 23–30, 1990.