Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 21, 2000, 42–47.

Об одной задаче линейного программирования в условиях неопределенности

Марине А. Тунян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА и ЕрГУ

Аннотация

В работе рассматривается специальная задача линейного программирования: Максимизировать линейную функцию cx при условиях $Ax \leq b' + b'' Mb$, где известны матрица A, векторы c, b' и b'', а Mb - математическое ожидание случайной величины b. Эта задача рассматривается при предположении, что распределение случайной величины b неизвестно, однако имеется возможность наблюдать ее отдельные реализации. При таком предположении возникает следующая задача: априори определить такое число k реализаций, при котором задача линейного программирования будет решена в требуемом смысле, если в правой части системы задачи линейного программирования Mb заменить средне-арифметическим $\bar{b}(k)$. Эта задача рассматривалась в работе [7] с использованием идеи симплекс метода [4]. В связи с известными недостатками симплекс метода [2] в данной работе эта задача рассматривается с использованием идеи симплекс метода внутренних точек [8]. В этом случае полученные оценки с практической точки зрения более приемлемы. Заметим, что подобные задачи возникают, в частности, в вопросах управления в инвестиционной деятельности [6].

1. Постановка задачи

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования.

Максимизировать линейную функцию

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i' + b_i'' Mb, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

где c_j, a_{ij}, b_i' и b_i'' - известные величины для всех i, j, а Mb - математическое ожидание случайной величины b.

Если распределение случайной величины b известно, а это означает, что Mb известно, то задача (1) - (3) является обычной задачей линейного программирования, которая может быть решена одним из методов линейного программирования. Однако, часто распределение случайной величины b бывает неизвестным. В этом случае обычно поступают следующим образом. По некоторому числу k реализаций величины b определяют средне-арифметическую $\bar{b}(k)$ и решают статистическую задачу:

Максимизировать линейную функцию

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{4}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i' + b_i'' \bar{b}(k), \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{5}$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{6}$$

Однако, при таком подходе остается открытым вопрос о том, какова точность полученного результата. Другими словами, если l - максимальное значение линейной формы задачи (1) - (3), а $\bar{l} = \bar{l}(k)$ - максимальное значение линейной формы статистической задачи (4) - (6), то мы не можем оценить по функционалу абсолютную величину $|l - \bar{l}|$.

Аналогичная ситуация возникает и в смысле решения задачи, т.е. если x^* - решение задачи (1) - (3), а $\tilde{x} = \tilde{x}(k)$ - решение статистической задачи (4) - (6), то мы не можем оценить Евклидову норму $\|x^* - \tilde{x}\|$.

Пусть требуется решить задачу (1) - (3) с требуемой точностью $\varepsilon > 0$ и вероятностью α при предположении, что распределение случайной величины b неизвестно, однако, имеется возможность наблюдать реализации случайной величины b.

При таком предположении возникает следующая задача. Априори, т.е. до получения реализаций случайной величины b, определить такое множество $\bar{M}$ ($\underline{M}$), что для любого целого числа $k \in \bar{M}$ ($k \in \underline{M}$) задача (1) - (3) разрешима (неразрешима) с требуемой точностью $\varepsilon > 0$ и вероятностью α. Это значит, что если

а) взять любое целое $k \in \bar{M}$ ($k \in \underline{M}$);

б) получить k реализаций случайной величины b;

в) вычислить статистическую оценку $\bar{b}(k)$ величины Mb;

г) решить статистическую задачу (4) - (6);

то будет выполняться неравенство

$$P\{|l - \bar{l}| \leq \varepsilon\} \geq \alpha \qquad (P\{|l - \bar{l}| > \varepsilon\} \geq \alpha). \tag{7}$$

Аналогичная постановка возникает и в смысле решения задачи (1) - (3), т.е.

$$P\{\|x^* - \tilde{x}\| \leq \varepsilon\} \geq \alpha \qquad (P\{\|x^* - \tilde{x}\| > \varepsilon\} \geq \alpha). \tag{8}$$

В данной работе мы рассматриваем постановку задачи только в смысле неравенства (7) при следующих 2-х предположениях:

1. Существует такой конечный интервал, что для всех k реализаций случайной величины b статистическая оценка $\bar{b}(k)$ принадлежит данному интервалу с вероятностью, не меньшей, чем α, т.е. существуют такие $\underline{\alpha}$ и $\bar{\alpha}$, что для любого целого k

$$P\{\bar{b}(k) \in (\underline{\alpha}, \bar{\alpha})\} \geq \alpha,$$

где α задано.

2. Известна верхняя граница D дисперсии Db случайной величины b, т.е. $D \geq Db$.

Заметим, что предположения 1 и 2 являются достаточно слабыми, т.е. границы $\underline{\alpha}$, $\bar{\alpha}$ и D легко определяются, исходя из конкретного содержания задачи.

2. Необходимые сведения из математической статистики

Если a - случайная величина и получено r ее реализаций, то, пользуясь методами математической статистики, можно с вероятностью α определить случайный доверительный интервал $(\underline{a}(r), \bar{a}(r))$ для Ma, т.е.

$$P\{Ma \in (\underline{a}(r), \bar{a}(r))\} \geq \alpha.$$

Границы доверительного интервала вычисляются по формулам:

$$\underline{a}(r) = \tilde{a}(r) - \Delta_\alpha(r), \qquad \bar{a}(r) = \tilde{a}(r) + \Delta_\alpha(r), \tag{9}$$

где $\Delta_\alpha(r) = \frac{N}{\sqrt{r}}$.

Здесь $N = \sqrt{2Da}\Phi^{-1}(\alpha)$, где Da - дисперсия случайной величины a, а $\Phi^{-1}(\alpha)$ - функция, обратная функции Лапласа [1].

3. О симплекс методе и симплекс методе внутренних точек

Симплекс метод, предназначенный для решения общей задачи линейного програмирования, с геометрической точки зрения представляет собой метод, который позволяет двигаться к оптимальной точке по вершинам выпуклого многогранника, высекаемого ограничениями задачи, т.е. по базисам. Поэтому оптимальное решение, полученное симплекс методом, всегда является крайней точкой, при этом число положительных компонент оптимального решения всегда равно m, где m - число уравнений в задаче линейного программирования. Однако, такое решение задачи не всегда является корректным, например, для задачи о диете [2].

В симплекс методе внутренних точек движение к оптимальной точке происходит по внутренним точкам выпуклого многогранника, т.е. по псевдобазисам. Поэтому оптимальное решение, полученное этим методом, не обязательно является вершиной выпуклого многогранника, т.е. в этом случае число положительных компонент оптимального решения может быть больше m. Именно это обстоятельство представляет большой интерес при анализе задачи линейного программирования.

Здесь для определения множеств $\underline{M}$ и $\bar{M}$ мы будем использовать симплекс метод внутренних точек [8].

4. λ - задача

В дальнейшем мы будем рассматривать λ - задачу, т.е. функцию

$$l(\lambda) = max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b'_i + b''_i \lambda, \qquad i = 1, \ldots, m,$$

$$x_j \geq 0, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

где c_j, a_{ij}, b'_i и b''_i являются исходными данными задачи (1) - (3), а λ - параметр.

Здесь мы предполагаем, что все $b''_i \geq 0$. В этом случае, как нетрудно заметить, $l(\lambda)$ в области ее разрешимости является кусочно-линейной вогнутой неубывающей функцией.

Пусть λ - задача была решена в некоторой точке $\lambda = \lambda^0$ симплекс методом внутренних точек и в оптимальной точке она порождается оптимальным псевдобазисом $A_1, \ldots, A_s$, где вектор-столбец

$$A_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^T, \qquad j = 1, \ldots, s, \quad s \geq m.$$

Тогда оптимальное решение λ - задачи будет иметь вид

$$x_i^* = \beta_i + \gamma_i \lambda^0, \qquad i = 1, \ldots, s.$$

Так как $x_i^* > 0$, $i = 1, \ldots, s$, то множество тех λ, которые удовлетворяют системе

$$x_i = \beta_i + \gamma_i \lambda > 0, \qquad i = 1, \ldots, s, \tag{10}$$

является не пустым. Обозначим это множество через D_λ. В симплекс методе внутренних точек оценки Δ_j относительно псевдобазиса $A_1, \ldots, A_s$ не зависят от параметра λ. Поэтому необходимым и достаточным условием, что функция $l(\lambda)$ порождается тем же оптимальным псевдобазисом $A_1, \ldots, A_s$, что и в точке $\lambda = \lambda^0$, является условие $\lambda \in D_\lambda$. Кроме того, для любого $\lambda \in D_\lambda$, с учетом (10), функция

$$l(\lambda) = \sum_{i=1}^{s} c_i x_i = \sum_{i=1}^{s} c_i(\beta_i + \gamma_i \lambda) = \beta + \gamma\lambda, \tag{11}$$

где

$$\beta = \sum_{i=1}^{s} c_i \beta_i, \qquad \gamma = \sum_{i=1}^{s} c_i \gamma_i.$$

Таким образом, функция $l(\lambda)$ в области ее определения D_λ, где она порождается оптимальным псевдобазисом $A_1, \ldots, A_s$, имеет вид (11).

5. Определение множеств $\bar{M}$ и $\underline{M}$

Теорема 1. *Пусть функция $l(\lambda)$ в области определения $\lambda = \underline{\alpha}$, т.е. $D_{\underline{\alpha}}$, имеет вид*

$$\bar{l}(\lambda) = \bar{\beta} + \bar{\gamma}\lambda.$$

Тогда для любого целого $k \in \bar{M}$, где

$$\bar{M} = \left\{ k / \frac{\bar{\gamma}\bar{N}}{\sqrt{k}} \leq \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

задача (1) - (3) разрешима с требуемой точностью $\varepsilon > 0$ и вероятностью α, т.е.

$$P\{|l(Mb) - \bar{l}(k)| \leq \varepsilon\} \geq \alpha,$$

где $\bar{N} = \sqrt{2D}\,\Phi^{-1}(\alpha)$, D - верхняя граница дисперсии Db.

Доказательство. Действительно, возьмем произвольное целое $k \in \bar{M}$. Получи k реализаций случайной величины b, определим доверительный интервал $(\underline{b}(k), \bar{b}(k))$ относительно Mb с вероятностью, не меньшей, чем α, т.е.

$$P\{Mb \in (\underline{b}(k), \bar{b}(k))\} \geq \alpha,$$

где

$$\underline{b}(k) = \tilde{b}(k) - \frac{N}{\sqrt{k}}, \qquad \bar{b}(k) = \tilde{b}(k) + \frac{N}{\sqrt{k}}.$$

Так как функция $l(\lambda)$ кусочно-линейная вогнутая и неубывающая и $\bar{N} \geq N = \sqrt{2D}\Phi^{-1}(\alpha)$, то

$$l(\bar{b}(k)) - l(\underline{b}(k)) = l\left(\tilde{b}(k) + \frac{N}{\sqrt{k}}\right) - l\left(\tilde{b}(k) - \frac{N}{\sqrt{k}}\right) \leq$$

$$\bar{l}\left(\tilde{b}(k) + \frac{N}{\sqrt{k}}\right) - \bar{l}\left(\tilde{b}(k) - \frac{N}{\sqrt{k}}\right) \leq \bar{l}\left(\tilde{b}(k) + \frac{\bar{N}}{\sqrt{k}}\right) - \bar{l}\left(\tilde{b}(k) - \frac{\bar{N}}{\sqrt{k}}\right) =$$

$$\bar{\beta} + \bar{\gamma}\left(\tilde{b}(k) + \frac{\bar{N}}{\sqrt{k}}\right) - \bar{\beta} - \bar{\gamma}\left(\tilde{b}(k) - \frac{\bar{N}}{\sqrt{k}}\right) = \frac{2\bar{\gamma}\bar{N}}{\sqrt{k}} \leq \varepsilon. \tag{12}$$

С другой стороны, согласно предположению,

$$P\{Mb \in (\underline{b}(k), \bar{b}(k))\} \geq \alpha.$$

Поэтому, учитывая (12), вид функции $l(\lambda)$ и предположение 1, с вероятностью, не меньшей, чем α, выполняется неравенство

$$|l(Mb) - l(\tilde{b}(k))| \leq l(\bar{b}(k)) - l(\underline{b}(k)) \leq \frac{2\bar{\gamma}N}{\sqrt{k}} \leq \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть функция $l(\lambda)$ в области определения $\lambda = \bar{\alpha}$, т.е. $D_{\bar{a}}$, имеет вид*

$$\underline{l}(\lambda) = \underline{\beta} + \underline{\gamma}\lambda.$$

Тогда для любого целого $k \in \underline{M}$, где

$$\underline{M} = \left\{k / \frac{\underline{\gamma}\bar{N}}{\sqrt{k}} > \frac{\varepsilon}{2}\right\},$$

задача (1) - (3) неразрешима с требуемой точностью, т.е. выполняется неравенство

$$P\{|l(Mb) - \tilde{l}(k)| > \varepsilon\} \geq \alpha,$$

где $\bar{N} = \sqrt{2D}\,\Phi^{-1}(\alpha)$, D - верхняя граница дисперсии Db.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству Теоремы 1.

Пусть $\tilde{M}$ - множество тех целых чисел k, которые одновременно не принадлежат множествам $\bar{M}$ и $\underline{M}$. Тогда для любого $k \in \tilde{M}$ нельзя заранее сказать, будет ли задача (1) - (3) разрешима в требуемом смысле. Другими словами, множество $\tilde{M}$ является множеством неопределенности.

В дальнейшем мы думаем рассмотреть решение задачи (1) - (3) для получения оценок в смысле (8).

Литература

[1] Е. С. Вентцель, *Теория вероятностей*. Физматгиз, Москва, 1962.

[2] В. С. Гасс, *Линейное программирование*. Физматгиз, Москва, 1961.

[3] Е. Г. Гольштейн, Д. Б. Юдин, *Новые направления в линейном программировании*. Советское радио, Москва, 1966.

[4] Дж. Данциг, *Линейное программирование, его применение и обощение*. Прогресс, Москва, 1966.

[5] Ю. М. Ермольев, *Методы стохастического программирования*. Наука, Москва, 1976.

[6] В. В. Дикусар, *Вопросы управления в инвестиционной деятельности*. Труды международной Байкальской школы-семинара, Иркутск, Байкал, 5-12 июля, 1998, 74-84.

[7] А. Д. Туниев, *Об одном классе задач стохастического линейного программирования*. Автореферат кандидатской диссертации, Институт кибернетики АН УССР, Киев, 1969.

[8] А. Д. Туниев, *Метод направляющего вектора и его приложения*. ж. Кибернетика и системный анализ, 1, Киев, 1992, 116-127.