Об одном методе кодирования с использованием преобразования Адамара

Армен Ж. Аноян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА и ЕрГУ
E-mail: spl@ipia.sci.am

Аннотация

В работе рассматривается метод кодирования с использованием повторных прожекторов и разработан метод декодирования, основанный на преобразовании Адамара.

1 Введение

Матрицей Адамара порядка n называется $(-1,+1)$–матрица H_n размерности $n \times n$ удовлетворяющая условию

$$H_n H_n^T = H_n^T H_n = n I_n,$$

где T – знак транспонирования, I_n – единичная матрица порядка n.

Доказано, что если H_n – матрица Адамара, то $n \equiv 0 (mod 4)$. Обратная задача, а именно задача построения или существования матриц Адамара любого порядка n кратного четырем, до сих пор не решена, хотя опубликованы сотни работ посвященных этой проблеме (см. например, [1, 2, 3, 8, 9] и их библиографии).

Ниже будем использовать матрицы Адамара порядка 2^k, которые называются также матрицами Сильвестра [1], и строятся согласно следующей рекуррентной формуле:

$$H_{2^k} = \begin{pmatrix} H_{2^{k-1}} & H_{2^{k-1}} \\ H_{2^{k-1}} & -H_{2^{k-1}} \end{pmatrix}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

где $H_1 = (1)$.

Принципиальная схема общей системы передачи информации приведена на Рис.1. Источником информации обычно является сообщение, состоящее из двоичных или де-

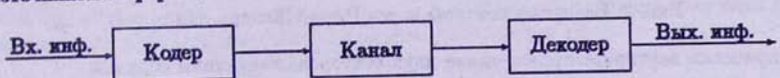

Рис. 1: Схема общей системы передачи информации

сятичных цифр. Кодер преобразует эти сообщения в сигналы, которые передаются по каналу и искажаются шумом. Искаженный сигнал поступает в декодер, который восстанавливает посланное сообщение и направляет его получателю. Кодер и декодер реализуют используемый код, исправляющий ошибки. В идеальной системе символы на выходе декодера должны совпадать с символами, которые поступают на вход кодера. Однако в реальной системе всегда есть случайные ошибки, и назначение кодов состоит в том, чтобы обнаруживать и исправлять такие ошибки. Обычно время действия помех в канале превышает продолжительность передачи одного символа. Поэтому необходимы коды для исправления пакетов ошибок. Существует несколько типов таких кодов, среди которых наиболее распространены *блоковые коды*. В кодере, приспособленном для использования блоковых кодов, непрерывная последовательность информационных символов разбивается на отрезки, содержащие по k символов, или блоки. В дальнейшем операции производятся над каждым блоком отдельно независимо от других в соответствии с выбранным кодом. Каждому информационному блоку, называемым также *информационным словом* сопоставляется набор из n символов канала, где n > k. Этот набор, называемый *кодовым словом*, передается по каналу связи, искажается шумом, а затем декодируется независимо от всех других кодовых слов. Величина n называется длиной кода.

Для борьбы с помехами в канале известен метод *повторного кодирования*. Его суть заключается в том, что k битовое информационное слово повторяется r раз, где r нечетное число. Полученное кодовое слово длины $k \times r$, поступает в канал и искажается шумом. Декодер, получая кодовое слово, определяет какое из k битовых слов повторяется больше всех остальных. Именно это слово вероятнее всего и будет искомым информационным словом. Количество ошибок исправляемых этим кодом равно $\frac{r-1}{2}$.

Другими известными блоковыми кодами являются коды Рида-Маллера [4]. Рассмотрим следующую совокупность векторов над полем из двух элементов. Пусть v_0 вектор длины 2^m все компоненты которого равны 1, а $v_1, v_2, \ldots, v_m$ строки матрицы, столбцами которой являются все возможные двоичные наборы длины m
(Рис.2 для m=3).

$$
\begin{aligned}
v_0 &= (1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\,1)\\
v_3 &= (0\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,1)\\
v_2 &= (0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,1)\\
v_1 &= (0\,1\,0\,1\,0\,1\,0\,1)\\
v_3v_2 &= (0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,1)\\
v_3v_1 &= (0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1)\\
v_2v_1 &= (0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1)\\
v_3v_2v_1 &= (0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1)
\end{aligned}
$$

Рис. 2: Базисные векторы кодов Рида-Маллера для m = 3

Определим векторное произведение двух векторов следующим образом:

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$$
$$v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$
$$uv = (u_1v_1, u_2v_2, \ldots, u_nv_n)$$

Код Рида-Маллера порядка r (r < m) определяется как код, базисом которого являются вектора $v_0, v_1, \ldots, v_m$ и все векторные произведения из r или меньшего числа векторов. Этот код образован кодовыми словами длины 2^m, где количество базисных векторов равно k:

$$k = 1 + C_m^1 + C_m^2 + \ldots + C_m^r$$

Коды Рида-Маллера могут исправлять все комбинации из $2^{m-r-1} - 1$ или меньшего числа ошибок.

Среди блоковых кодов известен также метод *корреляционного декодирования* [6]. Он заключается в том, что в матрице Адамара H_n и в ее инверсной матрице $-H_n$ все единицы заменяются нулями, а минус единицы единицами.

Таблица 1

Номер кодового слова	Кодовое слово
0	00000000
1	01010101
2	00110011
3	01100110
4	00001111
5	01011010
6	00111100
7	01101001
8	11111111
9	10101010
10	11001100
11	10011001
12	11110000
13	10100101
14	11000011
15	10010110

При этом получится двоичный код длины 2^n с минимальным расстоянием 2^{n-1} и мощностью 2^{n+1} (мощностью кода называется количество символов алфавита). Эти коды могут исправлять $[2^{n-2} - \frac{1}{2}]$ ошибок и производить декодирование при помощи преобразования Адамара. Заметим, что таким образом получаемые коды являются кодами Рида-Маллера первого порядка. В качестве примера приведем код, получаемый из матрицы Адамара H_3 с мощностью равной 16 и состоящий из 8-битовых слов (Таблица 1). Декодирование производится следующим образом. В полученном кодовом слове все нули заменяются единицами, а единицы нулями. Затем к полученному вектору применΘяется преобразование Адамара и в его спектре определяется наибольший по Модулю коэффициент. Назовем его магнитудой. Пусть Наибольший по модулю коэффициент найден в i-ом месте $i = 0, \ldots, 2^{n-1}$. ли этот коэффициент положителен, то считается, что послано было кодовое слово под номером i. Если же он отрицателен, то считается, что послано было $i + 2^n$-е кодовое слово.

В (2) приведено преобразование Адамара для 9-го кодового слова в нашем примере (Таблица 1), т.е. для 10101010.

$$H_3(-1, 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1)^T = (0, -8, 0, 0, 0, 0, 0, 0)^T \tag{2}$$

Если бы послано было 1-е кодовое слово, то в том же месте (2) мы получили бы +8. Заметим, что одна ошибка в канале уменьшит магнитуду на 2.

2 Построение кодов повторных прожекторов

Пусть $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ – двоичное информационное слово, а $\{P_i = (p_{i,1}, p_{i,2}, \ldots, p_{i,k}), i = 1, 2, \ldots, n$ – множество двоичных векторов, причем мощность множества P равно $2^k - 1$. Двоичные слова P_i называются прожекторами кода [5]. Кодовое слово $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$, соответствующее информационному слову $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ определяется посредством прожекторов согласно следующей формуле

$$u_i = \bigoplus_{j=1}^{k} c_j p_{i,j}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где $\oplus$ – знак суммирования по модулю 2.

Процесс декодирования происходит следующим образом. Декодер получает кодовое слово $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ и обрабатывает его, записывая результаты в таблицу. Если $u_i = 0$, то результат в таблице, соответствующий адресу P_i увеличивается на 1, если же $u_i = 1$, то он уменьшается на 1. После такого заполнения таблицы ее результаты будут представлять собой координаты некоторого вектора V. Размерность вектора V равно 2^k. Далее к вектору V применяется преобразование Адамара $H_k V$. Затем определяется наибольший положительный коэффициент преобразования (т.е. наибольшая положительная координата спектра вектора V). Адрес в таблице декодера, соответствующий этому коэффициенту и будет являться десятичным представлением исходного информационного слова $(c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_\kappa)$.

3 Оценка количества исправляемых ошибок

Сперва докажем две теоремы.

Теорема 1. Пусть $H_n = \{h_{i,j}\}_{i,j=1}^{2^n}$ – матрица Сильвестра порядка 2^n. Тогда если строки p и q $(p \neq q)$ матрицы H_n совпадают в некоторых столбцах $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-1}}$, т.е имеет место равенство $h_{p,s_i} = h_{q,s_i} \quad i = 1, \ldots, 2^{n-1}$, то для любой k–ой строки матрицы H_n существует строка l $(l \neq k)$ такая, что они совпадают в тех же столбцах, что и строки p и q.

Доказательство. Так как H_n матрица Адамара типа Сильвестра, то она состоит из 4-х матриц Адамара порядка 2^{n-1} и имеет вид (1)

Очевидно, что все столбцы совпадения $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-1}}$ строк p и q не могут быть в правой части матрицы H_n. Заметим также, что в правой части матрицы H_n не может быть больше совпадений чем в левой, так же как и в левой части не может быть больше совпадений чем в правой. В противном случае ортогональность правых и левых матриц Адамара H_{n-1} была бы нарушена.

Таким образом остается лишь 2 случая. Либо все совпадения находятся в левой части H_n, либо половина совпадений находится в левой части, а другая половина совпадений в правой части H_n.

Из построения матриц Адамара типа Сильвестра следует, что если все совпадения находятся в левой части H_n, т.е. $s_i = i, \quad i = 1 \ldots 2^{n-1}$, то для любой строки k существует строка l, которая совпадает с k также в левой части матрицы H_n. Действительно, если все $s_i, \quad i = 1 \ldots 2^{n-1}$ находятся в левой половине H_n, то одна из строк p или q должна находится в ее верхней половине, а другая в нижней (если бы обе одновременно находились в верхней или нижней части H_n, то ортогональность левой верхней или левой нижней матрицы Адамара H_{n-1} была бы нарушена). Ясно, что для строки k из верхней половины (нижней половины) H_n существует строка l из ее нижней половины (верхней половины) такая, что совпадает с k в левой части H_n, так как для каждой строки из верхней левой матрицы H_{n-1} существует аналогичная ей в нижней левой матрицы H_{n-1}.

Остался случай, когда половина совпадений находится в левой части, а другая половина в правой, то есть столбцы с номерами $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-2}}$ находятся в левой части, а столбцы с номерами – $s_{2^{n-2}+1}, s_{2^{n-2}+2}, \ldots, s_{2^{n-1}}$ в правой. Покажем, что утверждение теоремы достаточно доказать для половины совпадений находящихся в левой части H_n, то есть для $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-2}}$. То есть, необходимо доказать, что если две строки совпадают в столбцах $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-2}}$, то совпадения правой части $s_{2^{n-2}+1}, s_{2^{n-2}+2}, \ldots, s_{2^{n-1}}$ каким то образом зависят от $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-2}}$.

Рассмотрим два случая.

1) Строки p и q обе одновременно находятся или в верхней или в нижней половине матрицы H_n. Покажем, что имеет место равенство:

$$s_{2^{n-2}+i} = s_i + 2^{n-2}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^{n-2}. \tag{4}$$

В самом деле, если обе строки находятся в верхней половине H_n, то в силу того, что в ее верхней части находятся две идентичные матрицы H_{n-1} ясно, что левым совпадениям $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-2}}$ в левой верхней матрице H_{n-1} соответствуют совпадения верхней правой матрицы H_{n-1}. Т.е. имеет место равенство (4). Пусть теперь обе строки находятся в нижней части матрицы H_n. Так как в матрице $-H_{n-1}$ совпадения сохраняются, то выполнение равенства (4) становится очевидным.

2) Предположим, что одна из строк находится в верхней, а другая – в нижней половине матрицы H_n. Допустим, что в левой части матрицы H_n эти две строки совпадают в столбцах $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-2}}$. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_{2^{n-2}}$ номера тех столбцов, в которых эти строки не совпадают и которые находятся также в левой части H_n. Докажем, что в этом случае имеет место равенство:

$$s_{2^{n-2}+i} = r_i + 2^{n-2}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^{n-2}. \tag{5}$$

Пусть строка p находится в верхней половине H_n, а строка q – в ее нижней половине. Из вида матриц Сильвестра следует, что для данной строки q существует строка $q' = q - 2^{n-1}$ ($q' \neq p$) находящаяся в верхней части H_n такая, что строки p и q' совпадают в столбцах $s_1, s_2, \ldots, s_{2^{n-2}}$ и, следовательно, не совпадают в столбцах $r_1, r_2, \ldots, r_{2^{n-2}}$. Согласно первому случаю, строки p и q' совпадают также и в $s_{2^{n-2}+1}, s_{2^{n-2}+2}, \ldots, s_{2^{n-1}}$ столбцах, и различаются в $r_{2^{n-2}+1}, r_{2^{n-2}+2}, \ldots, r_{2^{n-1}}$ столбцах. Последние, в силу идентичности верхних матриц H_{n-1}, также выражаются через $r_1, r_2, \ldots, r_{2^{n-2}}$:

$$r_{2^{n-2}+i} = r_i + 2^{n-2}, \quad i = 1, 2, \ldots, 2^{n-2}. \tag{6}$$

Строки q и q' различаются только в правой части. Это означает, что в тех столбцах (в правой части H_n), в которых строки p и q' не совпадают, строки p и q совпадают. Совпадения и различия в левой части H_n идентичны. Таким образом: $s_i = r_i$, $i = 2^{n-2}+1, 2^{n-2}+2, \ldots, 2^{n-1}$. А отсюда и из (6) следует (5).

Осталось доказать условие теоремы для 2^{n-2} совпадений в левой половине матрицы H_n. Так как левые матрицы H_{n-1} идентичны, то любой строке i из нижней левой матрицы H_{n-1} соответствует строка $i' = i - 2^{n-1}$ из верхней левой матрицы H_{n-1} с которой она совпадает. Доказательство проводится идентично вышедоказанному, просто в этом случае имеем матрицу Сильвестра малой размерности. Продолжая таким образом в самом конце мы придем к доказателству условия теоремы для матрицы H_1 с одним совпадением в левой части.

Теорема 2. Пусть H_n – матрица Сильвестра порядка k ($k = 2^n$) и действительные векторы-столбцы $A = (a_i)_{i=1}^k$, $B = (b_i)_{i=1}^k$ такие, что $|a_i| = |b_i|$, $i = 1, 2, \ldots, k$, при этом знаки координат векторов A и B совпадают соответственно со знаками p-ой и

q–ой строк матрицы Сильвестра H_n. Тогда спектры векторов A и B имеют одинаковые координаты с разным порядком следования.

Доказательство. Предположим, что $H_nA = (u_1, u_2, \dots, u_k)^T$ и $H_nB = (v_1, v_2, \dots, v_k)^T$. Так как знаки всех координат вектора A совпадают со знаками p–ой строки, то $u_p = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_k|$. Обозначим $s_1, s_2, \dots, s_{k/2}$ столбцы в которых строки p и q совпадают и $r_1, r_2, \dots, r_{k/2}$ – столбцы в которых они не совпадают. Тогда имеет место равенство: $u_q = |a_{s_1}| + \dots + |a_{s_{k/2}}| - |a_{r_1}| - \dots - |a_{r_{k/2}}|$.

Аналогичным образом имеем $v_p = |b_{s_1}| + \dots + |b_{s_{k/2}}| - |b_{r_1}| - \dots - |b_{r_{k/2}}|$.

Так как $|a_i| = |b_i|$, то имеем $v_p = |a_{s_1}| + \dots + |a_{s_{k/2}}| - |a_{r_1}| - \dots - |a_{r_{k/2}}|$.

Это означает, что $u_p = v_q$ и $u_q = v_p$.

Докажем теперь, что для любой строки m существует строка с номером n такая, что $u_m = v_n$ $(m, n = 1, \dots, k)$. Согласно теореме 1 для любой строки m матрицы H_n существует такая строка n, что m и n совпадают в тех столбцах, что и строки p и q, т.е. совпадение и не совпадение имеют место соответственно в столбцах с номерами $s_1, s_2, \dots, s_{k/2}$ и $r_1, r_2, \dots, r_{k/2}$. Отсюда следует равенство $u_m = |a_{s_1}| + \ldots + |a_{s_{k/2}}| - |a_{r_1}| - \ldots - |a_{r_{k/2}}| = |b_{s_1}| + \ldots + |b_{s_{k/2}}| - |b_{r_1}| - \ldots - |b_{r_{k/2}}| = v_n$, что и доказывает теорему.

Не трудно убедится, что вектор-столбец V, метод определения которого был описан во втором параграфе, удовлетворяет условию теоремы 2. Т.е. какое бы кодовое слово не передавалось по каналу, векторы преобразования Адамара H_nV всегда будут состоять из одних и тех же чисел, но с различными порядками следования, при условии безошибочной передачи. Это означает также, что внезависимости от информационного слова, второй по величине коэффициент преобразования всегда будет одним и тем же числом, а в первую очередь с ним можно спутать максимальный коэффициент, если произошли ошибки при передаче.

Пусть M – число прожекторов и одновременно длина кодового слова, m – второй по величине элемент спектра Адамара. Тогда, с учетом вышеприведенного анализа, можем утверждать, что построенный выше код исправляет

$$t < \frac{M-m}{4} \tag{7}$$

ошибок.

4 Примеры

В качестве примера в Таблице 2 приведено действие *Кодера повторных прожекторов* для n = 21 и k = 3, где информационное слово $(c_1,\ c_2,\ c_3) = (0,\ 1,\ 1)$. Каждый из прожекторов повторяется 3 раза, всего 21 прожектор. Кодовое слово 111111000000111111000, показанное в колонке выходные биты, передается через шумовой канал.

Таблица 4

Адрес	Результат
0	0
1	-3
2	-3
3	+3
4	+3
5	-3
6	-3
7	+3

В декодере прожекторы определяют адреса таблицы, которые увеличиваются(уменьшаются) на 1, если полученный бит равен нулю(единице). В Таблице 3 приведены действия *Декодера Повторных Прожекторов.* Далее заполняется таблица декодера (Таблица 4) в соответствии с колонкой "Адрес/Действие" Таблицы 3, используя соответствующие прожекторы как адреса. Так, например, единице в Таблице 4 соответствует число -3, так как в Таблице 3 есть 3 значения 1 / - и ниодного значения 1 / +.

Затем к вектору V=(0, -3, -3, +3, +3, -3, -3, +3), полученному в колонке "Результат" применяется преобразование Адамара (8).

$$H_3V = (-3, -3, -3, +21, -3, -3, -3, -3)^T \tag{8}$$

В полученном спектре вектора V наибольшим коэффициентом является число +21. Положение числа 21 в спектре соответствует числу 3, двоичным эквивалентом которого является (0, 1, 1), что и является передаваемым информационным словом.

Таблица 2

Прожекторы		Выходные биты
Десятичное значение	Двоичное значение	
1	0 0 1	1
1	0 0 1	1
1	0 0 1	1
2	0 1 0	1
2	0 1 0	1
2	0 1 0	1
3	0 1 1	0
3	0 1 1	0
3	0 1 1	0
4	1 0 0	0
4	1 0 0	0
4	1 0 0	0
5	1 0 1	1
5	1 0 1	1
5	1 0 1	1
6	1 1 0	1
6	1 1 0	1
6	1 1 0	1
7	1 1 1	0
7	1 1 1	0
7	1 1 1	0

Таблица 3

Входные биты	Прожекторы	Адрес / Действие
1	1 1 1	1 / -
1	0 0 1	1 / -
1	0 0 1	1 / -
1	1 0 0	2 / -
1	1 0 0	2 / -
1	0 1 1	2 / -
0	1 1 1	3 / +
0	1 1 0	3 / +
0	0 0 1	3 / +
0	0 1 0	4 / +
0	0 0 1	4 / +
0	1 0 0	4 / +
1	1 0 1	5 / -
1	1 0 0	5 / -
1	0 1 0	5 / -
1	1 0 0	6 / -
1	1 0 0	6 / -
1	1 0 1	6 / -
0	0 1 1	7 / +
0	0 0 1	7 / +
0	0 1 0	7 / +

Давайте теперь посмотрим, что будет если в канале произойдут ошибки. Предположим, что 5 бит из 21, которые были посланы; получены неправильно. В Таблице 5 они выделены жирным шрифтом и подчеркнуты.

Таблица 5

Передaное кодовое слово	1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0
Полученное кодовое слово	1 1 **<u>0</u>** 1 1 1 **<u>1</u>** **<u>1</u>** 0 0 0 0 1 1 1 1 1 **<u>0</u>** **<u>1</u>** 0 0

В Таблице 6 показаны эффекты этих 5-и ошибок. Применив преобразование Адамара к вектору V в колонке "Результат" Таблицы 6 получим:

$$H_3V = (-5, +3, +3, +11, -5, -5, +3, -5)^T \tag{9}$$

Таблица 6

Адрес	Результат
0	0
1	-1
2	-3
3	-1
4	+3
5	-3
6	-1
7	+1

Наибольшим коэффициентом преобразования H_3V в этом случае как видно является число +11. Заметим, что наибольший коэффициент все еще правильно идентифицирует информационное слово (0, 1, 1), несмотря на то, что его значение уменьшилось на 10, что является числом вдвое большим количества ошибок в этом примере.

В частности если бы в нашем примере вместо (0, 1, 1) было послано другое информационное слово, то из (8) видно, что это новое преобразование также бы состояло из чисел -3, -3, -3, +21, -3, -3, -3, -3. Изменился бы лишь их порядок расположения. И следовательно вторым по величине числом после +21 всегда будет -3 (если в канале не произошло ошибок), внезависимости от переданного информационного слова. Из (7) получим $n < 6$. Таким образом в приведенном примере возможно исправить все комбинации из 5 ошибок.

Можно еще уменьшить количество битов до 20.

Таблица 7

Адрес	Результат
0	0
1	+3
2	+3
3	+3
4	+3
5	+3
6	+3
7	+2

Так, например, если в Таблице 2 отбросить последнюю строку с прожектором 7 или (1, 1, 1), то после передачи информационного слова (0, 0, 0) если в канале не произошло ошибок в таблице декодера адресу 7 будет соответствовать результат +2 (Таблица 7).
Так как для определения максимального количества ошибок, которое система исправит не имеет значения какое информационное слово передается (Теорема 2), то для облегчения задачи можно передать (0, 0, 0). Отметим, что при проведении экспериментов использовался также алгоритм быстрого преобразования Адамара [7].

Применив преобразование Адамара к вектору V координатами в колонке "Результат" Таблицы 7 получим:

$$H_3V = (+20, -2, -2, -4, -2, -4, -4, -2)^T \tag{10}$$

Отсюда, используя (9) получим $n < 5.5$
Следовательно 20 битами исправляется 5 ошибок.

Литература

[1] Wallis W.D., Street A.P., Wallis J.P. Combinatorics: Room Squares, Sum Free Sets, Hadamard Matrices. Lecture Notes in Mathematics, vol.292, 1972.

[2] Agaian S.S. Hadamard Matrices and Their Applications. Lecture Notes in Mathematics, vol.1168, 1985.

[3] Sarukhanyan H.G. Hadamard Matrices: Construction Mathods and Applications. First Int. Workshop on Transforms and Filter Banks, (Finland), 1998, p. 95-129.

[4] Питерсон У., Уэлдон Э. Коды исправляющие ошибки, Изд. "Мир", М. 1976.

[5] Аноян А.Ж. Построение кодов с использованием повторных прожекторов и декодирование посредством преобразования Адамара, Препринт No 99/4, ИПИА НАН РА, 16.09.1999

[6] Rao R.K. Yarlagadda, John E.Hershey. Hadamard Matrix Analysis and Synthesis With Applications to Communications and Signal/Image Processing, Kluwer Academic Publishers, Boston, London, 1997.

[7] Ahmed N., Rao K.R. Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1975.

[8] Hakob G. Sarukhanyan. Decomposition of the Hadamard Matrices and Fast Hadamard Transform. 7-th International Conference, CAIP'97 Kiel, Germany, September 10-12, 1997

[9] Sos Agaian, Hakob Sarukhanyan. Williamson Type M-Structures. Second International Workshop on Transforms and Filter Banks, Brandenburg an der Havel, Germany, March 5-7, 1999