Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 20, 1998, 79–89.

О достижимых скоростях передачи интерференционного канала

М. Е. Арутюнян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА и ЕрГУ

Резюме

Изучается интерференционный канал в общем случае, а также в случае, когда один из двух кодеров имеет полную информацию о сигналах с другого кодера. Построены границы случайного кодирования для области E-пропускной способности этих каналов при средней вероятности ошибки.

1 Введение

В многотерминальной системе связи, называемой интерференционным каналом, имеется несколько входов и столько же выходов, с каждого входа через общий канал посылаются сообщения соответствующему адресату.

Впервые такой канал был рассмотрен Шенноном [1], затем Алсведе [2, 3] получил границы для области пропускной способности. Работы Карлайла [4 - 6] также посвящены исследованию интерференционных каналов, однако пропускная способность пока найдена лишь для частных случаев. Определенные результаты в этой области содержатся в работах [7 - 15], а также в обзорных статьях ван дер Мелена [16] и Сато [17].

Для простоты изложения достаточно рассматривать случай с двумя входами и двумя выходами, так как результат несложно обобщить для канала со многими передающими сторонами.

В данной статье рассмотрены две конфигурации системы. В первом случае один из двух кодеров до кодирования получает кодовое слово, посылаемое с другого кодера. Этот канал называется интерференционным каналом с коррелированным кодированием (ИККК). Аналогичная схема была рассмотрена для канала множественного доступа в [18]. Для такой конфигурации ранее результатов получено не было. Вторая система называется общим интерференционным каналом (ОИК), здесь кодеры функционируют независимо один от другого.

Дискретный интерференционный канал определяется двумя конечными входными алфавитами $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_2$, двумя конечными выходными алфавитами $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$ и матрицей условных (переходных) вероятностей:

$$W = \{W(y_1, y_2|x_1, x_2),\ (y_1, y_2) \in (\mathcal{Y}_1 \times \mathcal{Y}_2),\ (x_1, x_2) \in (\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2)\}.$$

Переходные вероятности на отдельных выходах можно получить суммированием:

$$W_1(y_1|x_1, x_2) = \sum_{y_2 \in \mathcal{Y}_2} W(y_1, y_2|x_1, x_2),$$

$$W_2(y_2|x_1,x_2) = \sum_{y_1 \in \mathcal{Y}_1} W(y_1,y_2|x_1,x_2).$$

Рассматривается канал без памяти, т.е. переходные вероятности векторов длины N получаются как произведение переходных вероятностей соответствующих компонент: пусть $\mathbf{x}_1 = (x_1^1, x_1^2, ..., x_1^N) \in \mathcal{X}_1^N$, $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{X}_2^N$, $\mathbf{y}_1 \in \mathcal{Y}_1^N$, $\mathbf{y}_2 \in \mathcal{Y}_2^N$, тогда

$$W^N(\mathbf{y}_1,\mathbf{y}_2|\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) = \prod_{n=1}^{N} W(y_1^n, y_2^n|x_1^n, x_2^n).$$

Конечные множества сообщений m_1, m_2 первого и второго источников обозначим, соответственно, $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$.

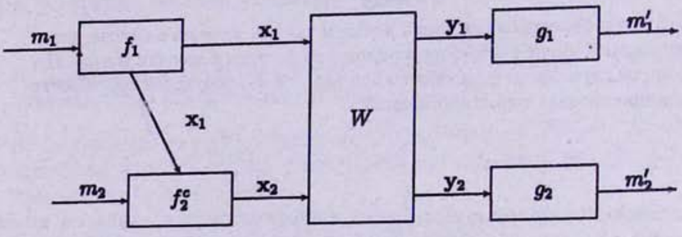

Рис.1. Интерференционный канал с коррелированным кодированием.

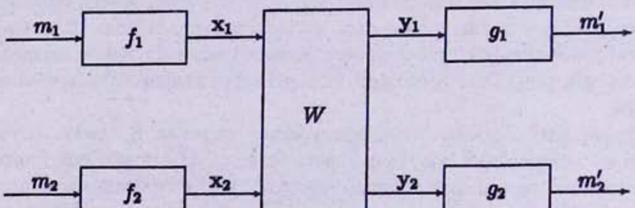

Рис.2. Общий интерференционный канал.

Кодом с коррелированным кодированием (f, g) называется набор четырех отображений (f_1, f_2^c, g_1, g_2), где $f_1 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{X}_1^N$, $f_2^c : \mathcal{M}_2 \times \mathcal{X}_1^N \to \mathcal{X}_2^N$ суть операции кодирования для ИККК, а $g_1 : \mathcal{Y}_1^N \to \mathcal{M}_1$, $g_2 : \mathcal{Y}_2^N \to \mathcal{M}_2$ декодирования на соответствующих выходах.

Для ОИК второе кодирование также не зависит от другого: $f_2 : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{X}_2^N$, а отображения f_1, g_1, g_2 определяются также как и для ИККК.

Пара скоростей передачи кода определяется следующим образом:

$$R_i = N^{-1} \log |\mathcal{M}_i|, \ i = 1, 2.$$

(В этой статье все экспоненты и логарифмы берутся по основанию 2.)

Обозначим для ИККК

$$f_1(m_1) = \mathbf{x}_1(m_1),\ f_2^c(m_2|m_1) = \mathbf{x}_2(m_2, \mathbf{x}_1(m_1)),$$

$$f^c(m_1, m_2) = (\mathbf{x}_1(m_1), \mathbf{x}_2(m_2, \mathbf{x}_1(m_1)))$$

и для ОИК

$$f_1(m_1) = \mathbf{x}_1(m_1),\ f_2(m_2) = \mathbf{x}_2(m_2),$$

$$f(m_1, m_2) = (\mathbf{x}_1(m_1), \mathbf{x}_2(m_2)).$$

Рассматриваются средние вероятности ошибки на соответствующих выходах:

$$e_i(f_i, g_i) = \frac{1}{|\mathcal{M}_1|\,|\mathcal{M}_2|} \sum_{m_1, m_2} e_i(m_1, m_2) =$$

$$\frac{1}{|\mathcal{M}_1|\,|\mathcal{M}_2|} \sum_{m_1, m_2} W_i^N\{\mathcal{Y}_i^N - g_i^{-1}(m_i) \mid f(m_1, m_2)\},\ i = 1, 2. \tag{1}$$

Пусть $E_i > 0, i = 1,2$ и $E = (E_1, E_2)$. Неотрицательные действительные числа R_1, R_2 называются E-достижимой парой скоростей для интерференционного канала при средней вероятности ошибки, если для любого $\delta > 0$ при достаточно больших N существует код такой, что

$$\frac{1}{N} \log |\mathcal{M}_i| \geq R_i - \delta,\ i = 1, 2,$$

а вероятности ошибки экспоненциально убывают

$$e_i(f_i, g_i) \leq \exp\{-NE_i\},\ i = 1, 2. \tag{2}$$

Область всех E-достижимых пар скоростей ИККК называется областью E-пропускной способности и обозначается $C(E)$. Когда одновременно $E_1 \to 0$, $E_2 \to 0$, $C(E)$ сходится к области пропускной способности ИККК C^1 при средней вероятности ошибки. Для ОИК аналогичные понятия обозначим $C^2(E)$ и C^2.

В настоящей статье построены внутренние границы областей E-пропускной способности ИККК и ОИК при случайном кодировании, из которых при $E_1 \to 0$, $E_2 \to 0$ получаются внутренние границы соответствующих областей пропускной способности.

В случае ОИК полученная граница области пропускной способности совпадает с нижней границей, полученной Алсведе [2, 3].

Результат для второго терминала ИККК (см. (4)) напоминает результат для канала со случайным параметром с информированным кодером [21], если в качестве случайного параметра рассматривать кодовое слово $\mathbf{x}_1$, передаваемое на кодер второго терминала. Разница состоит в том, что $\mathbf{x}_1 \in f(M_1)$, тогда как компоненты вектора $\mathbf{s}$ возникают независимо с известным распределением $Q(s)$.

2 Формулировка результатов

Рассмотрим случайные величины X_1, X_2, Y_1, Y_2 со значениями, соответственно, из $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2$, и задаваемые распределениями вероятностей

$$P = \{P(x_1, x_2), x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2\},$$

$$P_i = \{P_i(x_i) = \sum_{x_{3-i}} P(x_1, x_2), \quad x_i \in \mathcal{X}_i\}, \quad i = 1, 2,$$

$$P^* = \{P^*(x_1, x_2) = P_1(x_1)P_2(x_2), \ x_1 \in \mathcal{X}_1, \ x_2 \in \mathcal{X}_2\},$$

$$V_i = \{V_i(y_i \mid x_1, x_2), \, x_i \in \mathcal{X}_i, \, y_i \in \mathcal{Y}_i\}, \, i = 1, 2,$$

$$P \circ V_i = \{P \circ V_i(x_1, x_2, y_i) = P(x_1, x_2)V_i(y_i|x_1, x_2),$$

$$x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2, y_i \in \mathcal{Y}_i\}, \quad i = 1, 2,$$

Мы используем также матрицу

$$Q = \{Q(x_1, x_2) = P(x_1, x_2)/P^*(x_1, x_2), x_1 \in \mathcal{X}_1, x_2 \in \mathcal{X}_2\}.$$

Определения и обозначения известных понятий энтропии, взаимной информации, дивергенции, типов, условных типов, комбинаторные неравенства и соотношения имеются в [19-22]. Например, для дивергенции используются следующие обозначения:

$$D(P \parallel P^*) = \sum_{x_1, x_2} P(x_1, x_2) \log Q(x_1, x_2),$$

$$D(V_i \parallel W_i|P) = \sum_{x_1, x_2, y_i} P(x_1, x_2)V_i(y_i|x_1, x_2) \log \frac{V_i(y_i|x_1, x_2)}{W_i(y_i|x_1, x_2)}, \, i = 1, 2.$$

Рассмотрим следующую область ($|a|^+ = \max(a, 0)$):
$\mathcal{R}_r(P, E) = \{(R_1, R_2):$

$$0 \le R_1 \le \min_{V_1: D(V_1 \| W_1|P) \le E_1} |I_{P,V_1}(Y_1 \wedge X_1) + D(V_1 \parallel W_1|P) - E_1|^+, \tag{3}$$

$$0 \le R_2 \le \min_{V_2: D(V_2 \| W_2|P) \le E_2} |I_{P,V_2}(Y_2 \wedge X_2) - I_P(X_1 \wedge X_2) + D(V_2 \parallel W_2|P) - E_2|^+\}. \tag{4}$$

Обозначим

$$\mathcal{R}_r^1(E) = \bigcup_P \mathcal{R}_r(P, E).$$

Рассмотрим также
$\mathcal{R}_r(P^*, E) = \{ (R_1, R_2):$

$$0 \le R_1 \le \min_{Q, V_1: D(P \circ V_1 \| P^* \circ W_1) \le E_1} |I_{P,V_1}(Y_1 \wedge X_1) + D(P \circ V_1 \parallel P^* \circ W_1) - E_1|^+, \tag{5}$$

$$0 \le R_2 \le \min_{Q, V_2: D(P \circ V_2 \| P^* \circ W_2) \le E_2} |I_{P,V_2}(Y_2 \wedge X_2) + D(P \circ V_2 \parallel P^* \circ W_2) - E_2|^+\}. \tag{6}$$

Здесь
$$D(P \circ V_i \parallel P^* \circ W_i) = D(P \parallel P^*) + D(V_i \parallel W_i|P).$$

Обозначим
$$\mathcal{R}_r^2(E) = \bigcup_{P^*} \mathcal{R}_r(P^*, E).$$

Ниже будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. При всех E
$$\mathcal{R}_r^1(E) \subset C^1(E). \tag{7}$$

Теорема 2. При всех E
$$\mathcal{R}_r^2(E) \subset C^2(E). \tag{8}$$

Следствие 1. Область, определяемая как выпуклое замыкание по всем P области
$$\mathcal{R}_r(P) = \{(R_1, R_2) : 0 \le R_1 \le I_{P,W_1}(Y_1 \wedge X_1),$$
$$0 \le R_2 \le I_{P,W_2}(Y_2 \wedge X_2) - I_P(X_1 \wedge X_2)\},$$
является внутренней границей области пропускной способности ИККК C^1 при средней вероятности ошибки.

Следствие 2. Область, определяемая как выпуклое замыкание по всем P^* области
$$\mathcal{R}_r(P^*) = \{(R_1, R_2) : 0 \le R_1 \le I_{P,W_1}(Y_1 \wedge X_1),$$
$$0 \le R_2 \le I_{P,W_2}(Y_2 \wedge X_2)\},$$
является внутренней границей области пропускной способности ОИК C^2 при средней вероятности ошибки.

Доказательства теорем основаны на следующих двух модификациях леммы об упаковке из [19].

Лемма 1. Для любых $E_1 > 0,\ E_2 > 0,\ \delta \in (0, \min(E_1, E_2))$, типа P на $\mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2$, если
$$0 \le |\mathcal{M}_1| \le \exp\left\{N \min_{V_1 : D(V_1 \| W_1|P) \le E_1} |I_{P,V_1}(Y_1 \wedge X_1) + D(V_1 \parallel W_1 \mid P) - E_1|^+ - \delta\right\}, \tag{9}$$
$$0 \le |\mathcal{M}_2| \le$$
$$\le \exp\left\{N \min_{V_2 : D(V_2 \| W_2|P) \le E_2} |\, I_{P,V_2}(Y_2 \wedge X_2) - I_P(X_1 \wedge X_2) + D(V_2 \parallel W_2 \mid P) - E_2\,|^+ - \delta\right\}, \tag{10}$$
то существует $|\mathcal{M}_1|$ необязательно различных векторов $\mathbf{x}_1(m_1) \in T_{P_1}(X_1)$ и для каждого $\mathbf{x}_1(m_1) \in T_{P_1}(X_1)$ существует $|\mathcal{M}_2|$ необязательно различных векторов
$$\mathbf{x}_2(m_2, \mathbf{x}_1(m_1)) \in T_P(X_2 \mid \mathbf{x}_1(m_1))$$
таких, что для всех $V_1 : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}_1,\ V_1' : \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}_2$, при достаточно больших N имеют место следующие неравенства

$$\frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|}\sum_{m_1,m_2}\left|T_{P,V_1}(Y_1 \mid f^c(m_1,m_2))\bigcap\bigcup_{m_1'\neq m_1}\bigcup_{m_2'}T_{P,V_1'}(Y_1 \mid f^c(m_1',m_2'))\right| \leq \tag{11}$$

$$\leq \exp\{NH_{P,V_1}(Y_1 \mid X_1X_2)\}\exp\{-N|E_1-D(V_1'\,\|\,W_1\mid P)|^+\},$$

$$\frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|}\sum_{m_1,m_2}\left|T_{P,V_2}(Y_2 \mid f^c(m_1,m_2))\bigcap\bigcup_{m_2'\neq m_2}\bigcup_{m_1'}T_{P,V_2'}(Y_2 \mid f^c(m_1',m_2'))\right| \leq \tag{12}$$

$$\leq \exp\{NH_{P,V_2}(Y_2 \mid X_1X_2)\}\exp\{-N|E_2-D(V_2'\,\|\,W_2\mid P)|^+\}.$$

Лемма 2. Для любых $E_1>0,\ E_2>0,\ \delta\in(0,\min(E_1,E_2))$, типа P^* на $\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2$, если

$$0\leq|\mathcal{M}_1|\leq$$

$$\leq \exp\left\{N\min_{Q,V_1:D(P\circ V_1\|P^*\circ W_1)\leq E_1}|I_{P,V_1}(Y_1\wedge X_1)+D(P\circ V_1\,\|\,P^*\circ W_1)-E_1|^+-\delta\right\}, \tag{13}$$

$$0\leq|\mathcal{M}_2|\leq$$

$$\leq \exp\left\{N\min_{Q,V_2:D(P\circ V_2\|P^*\circ W_2)\leq E_2}|I_{P,V_2}(Y_2\wedge X_2)+D(P\circ V_2\,\|\,P^*\circ W_2)-E_2|^+-\delta\right\}, \tag{14}$$

то существует $|\mathcal{M}_1|$ необязательно различных векторов $\mathbf{x}_1(m_1)\in T_{P_1}(X_1)$ и существует $|\mathcal{M}_2|$ различных векторов $\mathbf{x}_2(m_2)\in T_{P_2}(X_2)$ таких, что для всех $P:\mathcal{X}_1\to\mathcal{X}_2$, $P':\mathcal{X}_1\to\mathcal{X}_2$, $V_i:(\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2)\to\mathcal{Y}_i$, $V_i':(\mathcal{X}_1\times\mathcal{X}_2)\to\mathcal{Y}_i$, $i=1,2$, при достаточно больших N имеют место следующие неравенства

$$\frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|}\sum_{f(m_1,m_2)\in T_P(X_1,X_2)}\left|T_{P,V_1}(Y_1 \mid f(m_1,m_2))\bigcap\bigcup_{m_1'\neq m_1}\bigcup_{m_2'}T_{P',V_1'}(Y_1 \mid f(m_1',m_2'))\right| \leq \tag{15}$$

$$\leq \exp\{NH_{P,V_1}(Y_1 \mid X_1X_2)\}\exp\{-N|E_1-D(P'\circ V_1'\,\|\,P^*\circ W_1)|^+\}$$

$$\times\exp\{-N(D(P\,\|\,P^*)-\delta)\},$$

$$\frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|}\sum_{f(m_1,m_2)\in T_P(X_1,X_2)}\left|T_{P,V_2}(Y_2 \mid f(m_1,m_2))\bigcap\bigcup_{m_2'\neq m_2}\bigcup_{m_1'}T_{P',V_2'}(Y_2 \mid f(m_1',m_2'))\right| \leq \tag{16}$$

$$\leq \exp\{NH_{P,V_2}(Y_2 \mid X_1X_2)\}\exp\{-N|E_2-D(P'\circ V_2'\,\|\,P^*\circ W_2)|^+\}\times$$

$$\times\exp\{-N(D(P\,\|\,P^*)-\delta)\}.$$

Доказательство леммы 1 приведено в приложении. Лемма 2 доказывается аналогично лемме 1 и лемме из [22].

3 Доказательство теоремы 1

Нужно показать существование кода со скоростями из области $\mathcal{R}_r(E)$ с вероятностями ошибки, удовлетворяющими (2). Согласно лемме существование $|\mathcal{M}_1| \times |\mathcal{M}_2|$ векторов $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$, удовлетворяющих условиям (9-12) гарантировано.

Декодирование определим согласно принципу "минимальной дивергенции". А именно, пусть $g_1(\mathbf{y}_1) = m_1$, если $\mathbf{y}_1 \in T_{P,V_1}(Y_1 \mid f^c(m_1, m_2))$ при V_1, при котором дивергенция $D(V_1 \| W_1 \mid P)$ минимальна, далее пусть $g_2(\mathbf{y}_2) = m_2$, когда $\mathbf{y}_2 \in T_{P,V_2}(Y_2 \mid f^c(m_1, m_2))$ при V_2, для которого $D(V_2 \| W_2 \mid P)$ минимальна.

При передаче сообщения m_1 ошибка декодирования на первом декодере произойдет, если существуют сообщения m_1', m_2, m_2' и условный тип V_1', такие что

$$\mathbf{y}_1 \in T_{P,V_1}(Y_1 \mid f^c(m_1, m_2)) \bigcap T_{P,V_1'}(Y_1 \mid f^c(m_1', m_2'))$$

и

$$D(V_1' \| W_1 \mid P) \le D(V_1 \| W_1 \mid P). \tag{17}$$

Обозначим $\mathcal{V} = \{V_1, V_1' : \text{имеет место (17)}\}$.

Средняя вероятность ошибки полученного кода может быть оценена следующим образом:

$$\frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|} \sum_{m_1,m_2} e_1(m_1, m_2) \le \frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|} \sum_{m_1,m_2} W_1^N \{ \bigcup_{\mathcal{V}} T_{P,V_1}(Y_1 \mid f^c(m_1, m_2)) \bigcap$$

$$\bigcap \bigcup_{m_1' \neq m_1} \bigcup_{m_2'} T_{P,V_1'}(Y_1 \mid f^c(m_1', m_2')) \mid f^c(m_1, m_2)\} \le$$

$$\le \frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|} \sum_{m_1,m_2} \sum_{\mathcal{V}} \left| T_{P,V_1}(Y_1 \mid f^c(m_1, m_2)) \bigcap \bigcup_{m_1' \neq m_1} \bigcup_{m_2'} T_{P',V_1'}(Y_1 \mid f^c(m_1', m_2')) \right| \times$$

$$\times W_1^N(\mathbf{y}_1 \mid f^c(m_1, m_2)) \le \sum_{\mathcal{V}} \exp\{-N(H_{P,V_1}(Y_1 \mid X_1 X_2) + D(V_1 \| W_1 \mid P))\} \times$$

$$\times \exp\{N H_{P,V_1}(Y_1 \mid X_1 X_2)\} \exp\{-N(E_1 - D(V_1' \| W_1 \mid P))\} \le \exp\{-N(E_1 - \delta)\}.$$

Здесь был использован тот факт, что при фиксированных P и V_1 [19]

$$W_1^N(\mathbf{y}_1 \mid f^c(m_1, m_2)) = \exp\{-N(H_{P,V_1}(Y_1 \mid X_1 X_2) + D(V_1 \| W_1 \mid P))\}.$$

Таким образом (2) следует из произвольности $\delta > 0$. Вероятность ошибки на другом выходе можно оценить аналогично. Теорема 1 доказана.

4 Доказательство теоремы 2

Для кодовых слов $f_1(m_1) \in T_{P_1}(X_1)$ и $f_2(m_2) \in T_{P_2}(X_2)$, удовлетворяющих утверждению леммы, воспользуемся следующим методом декодирования (например на первом выходе): каждому вектору $\mathbf{y}_1$ ставится в соответствие такое m_1, для которого $\mathbf{y}_1 \in T_{P,V_1}(Y_1 \mid f(m_1, m_2))$ при матрицах Q и V_1, минимизирующих $D(P \circ V_1 \| P^* \circ W_1)$. Ошибка декодирования при передаче сообщения m_1 произойдет, если существует номер $m_1' \neq m_1$ и матрицы Q', V_1' такие, что для некоторых m_2 и m_2'

$$\mathbf{y}_1 \in T_{P,V_1}(Y_1 \mid f(m_1, m_2)) \bigcap T_{P',V_1'}(Y_1 \mid f(m_1', m_2'))$$

и
$$D(P' \circ V_1' \parallel P^* \circ W_1) \le D(P \circ V_1 \parallel P^* \circ W_1).$$

Множество матриц V_1, Q', V_1' удовлетворяющих последнему неравенству обозначим $\mathcal{D}$.

Среднюю вероятность ошибки кода можно оценить следующим образом:

$$\frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|}\sum_{m_1,m_2} e_1(m_1,m_2) \le \frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|}\sum_{m_1,m_2} W_1^N\{\bigcup_{\mathcal{D}} T_{P,V_1}(Y_1 \mid f(m_1,m_2)) \bigcap$$

$$\bigcap \bigcup_{m_1' \ne m_1} \bigcup_{m_2'} T_{P,V_1'}(Y_1 \mid f(m_1', m_2')) \mid f(m_1,m_2)\} \le$$

$$\le \frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|}\sum_{Q} \sum_{f(m_1,m_2)\in T_P(X_1,X_2)} \sum_{\mathcal{D}} \Big| T_{P,V_1}(Y_1 \mid f(m_1,m_2)) \bigcap$$

$$\bigcup_{m_1' \ne m_1} \bigcup_{m_2'} T_{P',V_1'}(Y_1 \mid f(m_1', m_2'))\Big| \times W_1^N(\mathbf{y}_1 \mid f(m_1,m_2)).$$

Из (15) следует, что вероятность ошибки кода достаточно мала:

$$\frac{1}{|\mathcal{M}_1||\mathcal{M}_2|}\sum_{m_1,m_2} e_1(m_1,m_2) \le$$

$$\le \sum_{Q,\mathcal{D}} \exp\{-N(D(V_1 \parallel W_1 \mid P) + E_1 - D(P' \circ V_1' \parallel P^* \circ W_1) + D(P \parallel P^*) - \delta)\} \le$$

$$\le \exp\{-n(E_1 - 2\delta)\}.$$

Последнее неравенство является следствием того, что число различных условных типов Q' и V_1' растет неэкспоненциально при росте n.

Доказательство теоремы 2 завершается замечанием, что выбором $P^* = P_1 \times P_2$ мы можем увеличить скорость кода.

Приложение

Доказательство леммы 1.

Случайным образом (с равномерным распределением и независимо друг от друга) выберем $|\mathcal{M}_1|$ векторов $\mathbf{x}_1(m_1)$ из $T_{P_1}(X_1)$, а затем для каждого $\mathbf{x}_1(m_1)$ выберем $|\mathcal{M}_2|$ векторов $\mathbf{x}_2(m_2, \mathbf{x}_1(m_1))$ из $T_P(X_2|\mathbf{x}_1(m_1))$.

Когда $D(V_1'\|W_1|P) \ge E_1$ и $D(V_2'\|W_2|P) \ge E_2$, неравенства (8) и (9) верны при любых $|\mathcal{M}_1|$ и $|\mathcal{M}_2|$.

Следовательно, для доказательства леммы достаточно показать, что при достаточно больших N

$$\sum_{V_1} \sum_{V_1':D(V_1'\|W_1|P)<E_1} \mathbf{E}\left| T_{P,V_1}(Y_1|f^c(m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{m_1' \ne m_1} \bigcup_{m_2'} T_{P,V_1'}(Y_1|f^c(m_1',m_2'))\right| \times$$

$$\times \exp\{-N(D(V_1'\|W_1|P) + H_{P,V_1}(Y_1 \mid X_1X_2) - E_1)\} +$$

$$+\sum_{V_2} \sum_{V_2':D(V_2'\|W_2|P)<E_2} \mathbf{E}\left| T_{P,V_2}(Y_2|f^c(m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{m_2' \ne m_2} \bigcup_{m_1'} T_{P,V_2'}(Y_2|f^c(m_1',m_2'))\right| \times$$

$$\times \exp\{-N(D(V_2'\|W_2|P) + H_{P,V_2}(Y_2 \mid X_1X_2) - E_2)\} \leq 1. \tag{18}$$

Для доказательства (18) оценим

$$\mathbf{E}\left|T_{P,V_1}(Y_1|f^c(m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{m_1' \neq m_1} \bigcup_{m_2'} T_{P,V_1'}(Y_1|f^c(m_1',m_2'))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{y}_1 \in \mathcal{Y}_1^n} \Pr\{\mathbf{y}_1 \in T_{P,V_1}(Y_1|f^c(m_1,m_2))\} \times \sum_{m_1' \neq m_1} \Pr\{\mathbf{y}_1 \in \bigcup_{m_2'} T_{P,V_1'}(Y_1|f^c(m_1',m_2'))\}.$$

Первая вероятность положительна только, если $\mathbf{y}_1 \in T_{P,V_1}(Y_1)$. Очевидно, что при $N > N(|\mathcal{X}_1||\mathcal{X}_2|,\delta)$

$$\Pr\{\mathbf{y}_1 \in T_{P,V_1}(Y_1|f^c(m_1,m_2))\} = \frac{|T_{P,V_1}(X_1X_2|\mathbf{y}_1)|}{|T_P(X_1X_2)|} \leq$$

$$\leq (N+1)^{|\mathcal{X}_1||\mathcal{X}_2|} \exp\{-NI_{P,V_1}(Y_1 \wedge X_1X_2)\} \leq \exp\{-N(I_{P,V_1}(Y_1 \wedge X_1X_2) - \delta)\}. \tag{19}$$

Вторая вероятность оценивается следующим образом:

$$\Pr\{\mathbf{y}_1 \in \bigcup_{\mathbf{x}_2(m_2',\mathbf{x}_1(m_1')) \in T_P(X_2|\mathbf{x}_1(m_1'))} T_{P,V_1'}(Y_1|\mathbf{x}_1(m_1'),\mathbf{x}_2(m_2',\mathbf{x}_1(m_1')))\} \leq$$

$$\leq \Pr\{\mathbf{y}_1 \in T_{P,V_1'}(Y_1|\mathbf{x}_1(m_1'))\} = \frac{|T_{P,V_1'}(X_1|\mathbf{y}_1)|}{|T_{P_1}(X_1)|} \leq$$

$$\leq \exp\{-N(I_{P,V_1'}(Y_1 \wedge X_1) - \delta)\}.$$

Следовательно

$$\mathbf{E}\left|T_{P,V_1}(Y_1|f^c(m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{m_1' \neq m_1} \bigcup_{m_2'} T_{P,V_1'}(Y_1|f^c(m_1',m_2'))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{y}_1 \in T_{P,V_1}(Y_1)} |\mathcal{M}_1 - 1| \cdot \exp\{-N(I_{P,V_1}(Y_1 \wedge X_1, X_2) - I_{P,V_1'}(Y_1 \wedge X_1) - 2\delta)\} \leq$$

$$\leq \exp\{N(H_{P,V_1}(Y_1) - I_{P,V_1}(Y_1 \wedge X_1X_2) - I_{P,V_1'}(Y_1 \wedge X_1) + 2\delta)\}\cdot$$
$$\cdot \exp\{N \min_{V_1: D(V_1\|W_1|P) \leq E_1} (I_{P,V_1}(Y_1 \wedge X_1) + D(V_1\|W_1|P) - E_1 - \delta)\}. \tag{20}$$

Аналогично можно получить следующую оценку

$$\mathbf{E}\left|T_{P,V_2}(Y_2|f^c(m_1,m_2)) \bigcap \bigcup_{m_2' \neq m_2} \bigcup_{m_1'} T_{P',V_2'}(Y_2|f^c(m_1',m_2'))\right| \leq$$

$$\leq \sum_{\mathbf{y}_2 \in T_{P,V_2}(Y_2)} |\mathcal{M}_2 - 1| \cdot \Pr\{\mathbf{y}_2 \in T_{P,V_2}(Y_2|f^c(m_1,m_2))\} \times \Pr\{\mathbf{y}_2 \in \bigcup_{m_1'} T_{P,V_2'}(Y_2|f^c(m_1',m_2'))\}.$$

Первая вероятность оценивается аналогично (19):

$$\Pr\{\mathbf{y}_2 \in T_{P,V_2}(Y_2|f^c(m_1,m_2))\} \leq \exp\{-N(I_{P,V_2}(Y_2 \wedge X_1X_2) - \delta)\},$$

при $N > N(|\mathcal{X}_1|,|\mathcal{X}_2|,\delta)$.

Чтобы оценить вторую вероятность мы воспользуемся леммой о покрытиях [19], согласно которой для любых δ и типа (P_1, P_2) существует набор G векторов $\mathbf{x}_2$, $G \subset T_{P_2}(X_2)$, $|G| \leq \exp\{N(I_P(X_1 \wedge X_2) + \delta)\}$, таких что набор $\{T_P(X_1|\mathbf{x}_2)\}$ покрывает $T_{P_1}(X_1)$, то есть

$$T_{P_1}(X_1) \subseteq \bigcup_{\mathbf{x}_2 \in G} T_P(X_1|\mathbf{x}_2).$$

Согласно лемме о покрытиях имеем

$$\Pr\{\mathbf{y}_2 \in \bigcup_{\mathbf{x}_1(m_1') \in T_{P_1}(X_1)} T_{P,V_2'}(Y_2|\mathbf{x}_1(m_1'), \mathbf{x}_2(m_2', \mathbf{x}_1(m_1')))\} \leq$$

$$\leq \Pr\{\mathbf{y}_2 \in \bigcup_{\mathbf{x}_2 \in G} \bigcup_{\mathbf{x}_1 \in T_{P_1}(X_1|\mathbf{x}_2)} T_{P,V_2'}(Y_2|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\} \leq$$

$$\leq \exp\{N(I_P(X_1 \wedge X_2) + \delta)\} \times \Pr\{\mathbf{y}_2 \in \bigcup_{\mathbf{x}_1 \in T_P(X_1|\mathbf{x}_2)} T_{P,V_2'}(Y_2|\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)\} =$$

$$= \exp\{N(I_P(X_1 \wedge X_2) + \delta)\} \times \Pr\{\mathbf{y}_2 \in T_{P,V_2'}(Y_2|\mathbf{x}_2)\} \leq$$

$$\leq \exp\{-N(I_{P,V_2'}(Y_2 \wedge X_2) - I_P(X_1 \wedge X_2) - \delta)\}.$$

Следовательно

$$\mathbf{E}\left|T_{P,V_2}(Y_2|f^c(m_1, m_2)) \bigcap \bigcup_{m_2' \neq m_2} \bigcup_{m_1'} T_{P',V_2'}(Y_2|f^c(m_1', m_2'))\right| \leq$$

$$\leq \exp\{N(H_{P,V_2}(Y_2) - I_{P,V_2}(Y_2 \wedge X_1X_2) - I_{P,V_2'}(Y_2 \wedge X_2) + I_P(X_1 \wedge X_2) + \delta)\} \times$$

$$\times \exp\{N \min_{V_2: D(V_2\|W_2|P) \leq E_2} (I_{P,V_2}(Y_2 \wedge X_2) - I_{P,V_2}(X_1 \wedge X_2) + D(V_2\|W_2|P) - E_2 - \delta)\}. \quad (21)$$

Подставляя (20), (21) в левую часть (18) получаем, что она меньше, чем $\exp\{-N\delta/2\}$. Это доказывает утверждение леммы.

Литература

[1] C. E. Shannon, Two-way communication channels, Proc. 4-th Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., v. 1, pp. 611–644, 1961.

[2] R. Ahlswede, Multi-way communication channels, 2nd Intern. Symp. on Inform. Theory. Tsahkadzor, Armenian SSR. 1971, Akademiai Kiado, Budapest, pp. 23–52, 1973.

[3] R. Ahlswede, The capacity region of a channel with two senders and two receivers, Annals of Probability, v. 2, pp. 805–814, 1974.

[4] A. B. Carleial, A case where interference does not reduce capacity, IEEE Trans. Inform. Theory, v. 21, pp. 569–570, 1975.

[5] A. B. Carleial, Interference channels, IEEE Trans. Inform. Theory, v. 24, No. 1, pp. 60–70, 1978.

[6] A. B. Carleial, Outer bounds on the capacity of interference channels, IEEE Trans. Inform. Theory, v. 29, No. 4, pp. 602–604, 1983.

[7] H. Sato, On the capacity region of a discrete two-user channel for strong interference, IEEE Trans. Inform. Theory, No. 3, pp. 377–379, 1978.

[8] A. El Gamal, M. N. Costa, The capacity region of a class of deterministic interference channel, Trans. Inform. Theory, v. 28, No. 2, pp. 343–346, 1982.

[9] T. S. Han, Slepian-Wolf-Cover theorem for networks of channels, Inform. and Control, v. 47, No. 1, pp. 67–83, 1980.

[10] T. S. Han, K. Kobayashi, A new achievable region for the interference channel, IEEE Trans. Inform. Theory, v. 27, No. 1, pp.49–60, 1981.

[11] R. Benzel, The capacity region of a class of discrete additive degraded interference channels, IEEE Trans. Inform. Theory, v. 25, No. 2, pp. 228–231, 1979.

[12] H. H. Tan, Two-user interference channels with correlated information sources, Inform. and Control, v. 44, No. 1, pp. 77–104, 1980.

[13] P. P. Bergmans, The Gaussian interference channel, IEEE Intern. Symp. Infrom. Theory, Ronneby, Sweden, 1976.

[14] E. C. van der Meulen, Some reflections on the interference channel. Communications and Cryptography. Two sides of one tapestry, Kluwer, Academic Publishers, pp. 409–421.

[15] M. H. M. Costa, A. El Gamal, The capacity region of the discrete memoryless interference channel with strong interference, IEEE Trans. Inform. Theory, 1987, v. 33, pp. 710–711.

[16] E. C. van der Meulen, A survey of multi-way channels in Information Theory: 1961–1976, IEEE Trans. Inform. Theory, 1977, v. 23, pp. 1–37.

[17] H. Sato, Two-user communication channels, IEEE Trans. Inform. Theory, v. 23, No. 3, pp. 295–304, 1977.

[18] F.M. Willems, E. C. van der Meulen, The discrete memoryless multiple-access channels with cribbing encoders. IEEE Trans. Inform. Theory, v. 31, No. 3, pp. 313-327, 1985.

[19] И. Чисар, Я. Кернер, Теория информации. Теоремы кодирования для дискретных систем без памяти, Москва, Мир, 1985.

[20] М. Е. Арутюнян, E-пропускная способность произвольно меняющегося канала с информированным кодером, Проблемы передачи информации, т. 27, No. 1, с. 14–23, 1991.

[21] М. Е. Арутюнянм, Границы E-пропускной способности канала со случайным параметром, Проблемы передачи информации, т. 26, No. 4, с. 16–23, 1990.

[22] Е. А. Арутюнян, М. Е. Арутюнян, Границы области E-пропускной способности двустороннего канала с ограничениями, Проблемы передачи информации, 1998, т. 34, No 3, с. 7–16.