

Синтез гибридных ортогональных преобразований

Д. Р. Дарбинян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА и ЕРГУ
spl@ipia.sci.am

Резюме

В задачах обработки изображений, при выполнении ортогонального преобразования над некоторым вектором входных данных используется алгоритм быстрого преобразования данной матрицы. В данной работе рассматриваются комбинированные ортогональные преобразования, получаемые в результате попарного перемножения матриц преобразований Фурье, Адамара, Хартли, Хаара и косинус-преобразования.

1 Введение

Смысл сжатия изображений состоит в минимизации числа информативных элементов, требуемых для представления изображений. При цифровой обработке изображений каждый отсчет (элемент) изображения квантуется на фиксированное количество уровней, после чего изображение запоминается или передается в цифровом виде. При этом потребность в сжатии диктуется необходимостью минимизации объема памяти и полосы частот системы передачи. Восстановление сжатого изображения, как правило, сопровождается некоторыми искажениями. Эффективность алгоритма сжатия оценивается достигнутым коэффициентом сжатия, полученными искажениями и сложностью реализации алгоритма. Один из методов сжатия состоит в преобразовании матрицы исходного изображения в новую матрицу (спектр изображения), в которой максимум информации помещается в минимальное количество отсчетов. Такой метод называется кодирование с преобразованием.

Для эффективного кодирования источника исходных сообщений следует сначала определить их структуру, а затем разработать алгоритм кодирования, эффективный для сообщений именно с данной структурой. Чем более определенной структурой обладает сообщение, тем больше эффективность, достигнутая при его согласовании с кодером.

Изображение обладает характерной структурой. Оно не является однородным: различные его участки имеют разные структуры. В частности, изображение состоит из ряда областей почти одинаковой яркости (цвета). Поэтому изображение можно разделить на участки с более-менее однородной структурой и в дальнейшем работать с этими участками. Так, при кодировании с преобразованием, изображение $M \times M$ разбивают на фрагменты $N \times N$ ($N \ll M$), а затем производят преобразование над каждым из этих фрагментов.

Пусть A — квадратная матрица порядка N , а f^T — вектор-столбец входных данных $(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Рассмотрим количество операций в произведении Af^T при разных способах представлений матрицы A . Пусть A — квадратная матрица порядка N . В этом случае количество операций в произведении Af^T будет:

$$S_1 = N^2 + N(N-1) = 2N^2 - N \quad (1)$$

Пусть квадратная матрица A порядка N имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} A(1) & A(1) \\ B(1) & -B(1) \end{pmatrix} \quad (2)$$

где $A(1)$ и $B(1)$ — матрицы порядка $N/2$.

Представим вектор f^T в виде $f^T = (x, y)^T$, где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{N/2} \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} x_{N/2+1} \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$.

Тогда произведение Af^T можно записать в следующем виде:

$$Ax^T = \begin{pmatrix} A(1)(x+y) \\ B(1)(x-y) \end{pmatrix}$$

При этом количество операций в матрицах $A(x+y)$ и $B(x-y)$ одинаково. Общее количество операций равно:

$$S_2 = 2(N^2/4 + N^2/4) = N^2 \quad (3)$$

Пусть матрицы A и C есть матрицы вида (2), т.е.

$$A = \begin{pmatrix} A(1) & A(1) \\ B(1) & -B(1) \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} C(1) & C(1) \\ D(1) & -D(1) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Рассмотрим матрицу AC^T .

$$\begin{aligned} AC^T &= \begin{pmatrix} A(1)C^T(1) + A(1)C^T(1) & A(1)D^T(1) - A(1)D^T(1) \\ B(1)C^T(1) - B(1)C^T(1) & B(1)D^T(1) + B(1)D^T(1) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2A(1)C^T(1) & 0 \\ 0 & 2B(1)D^T(1) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

Умножив эту матрицу на вектор $f^T = (x, y)^T$ получим:

$$Af^T = \begin{pmatrix} 2A(1)C^T(1)x \\ 2B(1)D^T(1)y \end{pmatrix}$$

При этом количество операций будет:

$$S = 2(N^2 - N)/2 = N^2 - N \quad (6)$$

Пусть квадратные матрицы A и C порядка $N = 2^n$ можно представить в виде:

$$A(i) = \begin{pmatrix} A(i+1) & A(i+1) \\ B(i+1) & -B(i+1) \end{pmatrix}, \quad C(i) = \begin{pmatrix} C(i+1) & C(i+1) \\ D(i+1) & -D(i+1) \end{pmatrix} \quad (7)$$

где $A(i)$, $B(i)$, $C(i)$, $D(i)$ — матрицы порядка $N/2^i$ а $i = 0, 1, \dots, n$.

Используя (5) получим:

$$A(i)C^T(i) = \begin{pmatrix} 2AC^T(i+1) & 0 \\ 0 & 2BD^T(i+1) \end{pmatrix}$$

где $AC^T(i)$ и $BD^T(i)$ — соответственно матрицы $A(i)C^T(i)$ и $B(i)D^T(i)$. Таким образом, матрица AC^T , где A и C — матрицы порядка $N = 2^n$ вида (7), можно представить эквивалентной матрицей блочно-диагонального вида:

$$AC^T = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n-1}BD^T(n-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2BD^T(1) \end{pmatrix} \quad (8)$$

где $BD^T(i)$ — матрица порядка $N/2^i$. Так как на диагонали стоят квадратные матрицы порядка $N/2^i$, ($i = \overline{0, n-1}$), то исходя из (1), количество операций определяется по следующей формуле:

$$S = \frac{1}{3}(2N^2 - 3N - 2) \quad (9)$$

Сравнение с (1), (3), (6) показывает, что наименьшее количество операций получается именно в этом случае.

Замечание 1. Т.к. на диагонали мы имеем ортогональные блок-матрицы, то можно рассматривать их как отдельные матрицы ортогональных преобразований, без коэффициентов, полученных в результате перемножений исходных матриц. В этом случае, при выполнении обратного преобразования, каждая блок-матрица делится на свой коэффициент нормализации.

2 Блочные представления ортогональных матриц

Преобразование Фурье Пусть $F(N)$ есть матрица преобразования Фурье порядка $N = 2^n$. Элементы этой матрицы определяются по следующей формуле [1]-[3]:

$$F_{k,m}(N) = \frac{1}{N} \exp(-j \frac{2\pi}{N} km), \quad k, m = \overline{0, N-1}. \quad (10)$$

Рассмотрим $(m+N/2)$ элемент k -ой строки ($m = \overline{0, N/2-1}$).

$$\begin{aligned} F_{k, N/2+m}(N) &= \frac{1}{N} \exp(-j \frac{2\pi}{N} k(m + N/2)) = \\ &= \frac{1}{N} \exp(-jk\pi) \exp(-j \frac{2\pi}{N} km), \quad m = \overline{0, N/2-1} \end{aligned}$$

Из свойств экспоненциальной функции следует, что:

$$\begin{aligned} F_{2k,m} &= F_{2k, m+N/2}, \\ F_{2k+1,m} &= -F_{2k+1, m+N/2} \quad k, m = \overline{0, N/2-1} \end{aligned}$$

Следовательно, матрица преобразования Фурье эквивалентна матрице вида:

$$F(N) = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} F(N/2) & F(N/2) \\ G(N/2) & -G(N/2) \end{pmatrix} \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} F(N/2) &= F_{2k,m} = \exp(-j \frac{2\pi}{N/2} km), \\ G(N/2) &= F_{2k+1,m} = \exp(-j \frac{2\pi}{N} (2k+1)m), \quad k, m = \overline{0, (N/2) - 1} \end{aligned} \quad (12)$$

Из формул (10) и (12) следует, что $F(N/2)$ есть матрица Фурье порядка $N/2$. Следовательно, матрицу $F(N/2)$ так же можно представить в виде (11). Матрицу Фурье порядка $N/2^i$ обозначим через $F(i)$. Таким образом, матрицу преобразования Фурье порядка $N = 2^n$ можно представить в виде:

$$F(i) = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} F(i+1) & F(i+1) \\ G(i+1) & -G(i+1) \end{pmatrix} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} F(i) &= \exp(-j \frac{2\pi}{N} 2^i km) \\ G(i) &= \exp(-j \frac{2\pi}{N} 2^{i-1} (2k+1)m), \quad k, m = \overline{0, (N/2^i) - 1} \end{aligned}$$

Преобразование Адамара Известно, что матрица Адамара порядка $N = 2^n$ вычисляется по следующему рекуррентному соотношению [1], [2], [7], [9]:

$$H(i) = \begin{pmatrix} H(i+1) & H(i+1) \\ H(i+1) & -H(i+1) \end{pmatrix} \quad (14)$$

где $H(0) = 1$. А это означает, что матрицу Адамара так же можно представить в виде (7).

Преобразование Хартли Элементы матрицы преобразования Хартли вычисляются по следующей формуле [3], [5]:

$$X_{k,m} = \frac{1}{\sqrt{N}} (\cos \frac{2\pi}{N} km + \sin \frac{2\pi}{N} km), \quad k, m = \overline{0, N-1}. \quad (15)$$

Рассмотрим $m + N/2$ элемент k -ой строки.

$$\begin{aligned} X_{k,m+N/2} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\cos \frac{2\pi k}{N} (m + N/2) + \sin \frac{2\pi k}{N} (m + N/2) \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\cos \pi k \sin \frac{2\pi k}{N} km + \cos \pi k \sin \frac{2\pi k}{N} km \right) \end{aligned}$$

Из свойств синусоидальной функции следует, что

$$\begin{aligned} X_{2k,m} &= X_{2k,m+N/2}, \\ X_{2k+1,m} &= X_{2k+1,m+N/2}, \quad k, m = \overline{0, 1, \dots, N/2 - 1} \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что матрица Хартли эквивалентна матрице вида:

$$X = \begin{pmatrix} X(1) & X(1) \\ L(1) & -L(1) \end{pmatrix} \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} X(1) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\cos \frac{2\pi}{N/2} km + \sin \frac{2\pi}{N/2} km \right) \\ L(1) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\cos \frac{2\pi}{N} (2k+1)m + \sin \frac{2\pi}{N} (2k+1)m \right), \\ k, m &= 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Сравнение (15) и (17) показывает, что $X(1)$ есть матрица Хартли порядка $N/2$. Следовательно ее так же можно представить в виде (16). Таким образом, матрицу преобразования Хартли можно представить в виде:

$$X(i) = \begin{pmatrix} X(i+1) & X(i+1) \\ L(i+1) & -L(i+1) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} X(i) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\cos \frac{2\pi}{N} 2^i km + \sin \frac{2\pi}{N} 2^i km \right) \\ L(i) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\cos \frac{2\pi}{N} 2^{i+1} (2k+1)m + \sin \frac{2\pi}{N} 2^{i+1} (2k+1)m \right) \\ k, m &= 0, 1, \dots, \frac{N}{2^i} - 1 \end{aligned}$$

Преобразование Хаара Матрица Хаара определяется рекуррентным соотношением вида [1]-[3], [8]:

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \\ \chi_{2^n} &= \begin{pmatrix} \chi_{2^{n-1}} & \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\ \sqrt{2^{n-1}} I_{2^{n-1}} & \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

где $\otimes$ -знак Кронеровского произведения. Т.е. формулу (19) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ \chi_2^n &= \begin{pmatrix} \chi_2^{n-1} & \chi_2^{n-1} \\ \sqrt{2} I_{2^{n-1}} & -\sqrt{2} I_{2^{n-1}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Следовательно, матрицу Хаара можно представить эквивалентной матрицей вида:

$$\chi_i = \begin{pmatrix} \chi_{i+1} & \chi_{i+1} \\ M_{i+1} & M_{i+1} \end{pmatrix} \quad (20)$$

где $M_i = \sqrt{2^{n-1}} I_{2^{n-1}}$

Косинус-преобразование Элементы матрицы косинусного преобразования определяются по формуле [1]-[6], [11]:

$$C_{k,m} = \sqrt{\frac{2}{N}} b_k \cos \frac{k(2m+1)\pi}{2N}, \quad b_k = \begin{cases} 1, & \text{if } k \neq 0, k \neq N \\ \frac{1}{\sqrt{2}}, & \text{if } k = 0, k = N \end{cases} \quad (21)$$

Для простоты вычислений далее не будем рассматривать коэфф b_k и $\sqrt{\frac{2}{N}}$. Рассмотрим $(N-m-1)$ -ый элемент k -ой строки.

$$\begin{aligned} C_{k,m} &= \cos\left(\frac{k(2(N-m-1)+1)\pi}{2N}\right) = \cos\left(k\pi - \frac{k(2m+1)\pi}{2N}\right) = \\ &= \cos k\pi \cos \frac{k(2m+1)\pi}{2N}. \end{aligned}$$

Из свойства косинусной функции следует, что

$$\begin{aligned} C_{2k,m} &= C_{2k,N-m-1}, \\ C_{2k+1,m} &= -C_{2k+1,N-m-1}, \quad k, m = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1. \end{aligned}$$

Таким образом, матрицу C можно представить эквивалентной матрицей вида:

$$C(N) = \begin{pmatrix} C(N/2) & CR(N/2) \\ D(N/2) & -DR(N/2) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

где

$$R(i) = (r_{k,m})_{k,m=0}^{N/2^i-1}, r_{k,m} = \begin{cases} 1 & \text{при } k+m=N/2^i-1 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

а элементы матрицы $C(N/2)$ и $D(N/2)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} C(k, m) &= \cos \frac{k(2m+1)\pi}{N}, \\ D(k, m) &= \cos \frac{(2k+1)(2m+1)\pi}{2N}, \quad k, m = 0, 1, \dots, N/2 - 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Сравнение формул (21) и (23) показывает, что $C(N/2)$ является матрицей косинусного преобразования порядка $N/2$. Следовательно, матрицу $C(N/2)$ так же можно привести к виду (22). Таким образом, матрица C косинусного преобразования порядка N эквивалентна матрице вида:

$$C(i) = \begin{pmatrix} C(i) & C(i)R(i) \\ D(i) & -D(i)R(i) \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, \log_2 N \quad (24)$$

где элементы матриц $C(i)$ и $D(i)$ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} C(i) &= \cos \frac{2^i k(2m+1)\pi}{2N} \quad k, m = 0, 1, \dots, N/2^i - 1 \\ D(i) &= \cos \frac{2^{i-1}(2k+1)(2m+1)\pi}{2N} \quad k, m = 0, 1, \dots, N/2^i - 1 \\ R(i) &= (r_{k,m})_{k,m=0}^{N/2^i-1}, r_{k,m} = \begin{cases} 1, & \text{при } k+m = N/2^i - 1 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \end{aligned}$$

Синтез блочно-диагональных ортогональных матриц и алгоритмы быстрых преобразований

Преобразование Фурье-Адамара Так как матрицы преобразований Фурье и Адамара можно представить эквивалентными матрицами вида (7) (матрицы (13) и (14) соответственно), то комбинированную матрицу Фурье-Адамара можно представить в виде блочно диагональной матрицы :

$$F_H(N) = \text{diag}(1, 1, P(2), P(4), \dots, P(N/2))$$

где $P(M)$ есть блок-матрица $FH^T(i)$ порядка $M = \frac{N}{2^i}$. При этом, количество операций в преобразовании $F_H(N)f$ определяется по формуле $\frac{N^2}{9} + 3N - \frac{16}{3}n - \frac{10}{9}$. Отметим, что для простоты вычислений здесь и далее не рассматриваются коэффициенты нормализации каждой из блок-матриц. При необходимости, после выполнения обратного преобразования каждая из матриц умножается на соответствующий коэффициент.

Граф быстрого преобразования Фурье-Адамара для $N = 16$ представлен на рис. 1.а.

Преобразование Фурье-Хаара Рассмотрим матрицу $F\chi^T$ комбинированного преобразования Фурье-Хаара. Из формул (7), (13), (20) следует, что матрицу $F\chi^T$ можно представить эквивалентной матрицей вида

$$F_\chi(N) = \text{diag}(1, 1, P(2), P(4), \dots, P(N/2))$$

где $P(M)$ есть блок-матрица $F\chi^T(i)$ порядка $M = \frac{N}{2^i}$. Количество операций в этом случае получается: $\frac{N^2}{9} + 2N - \frac{16}{3} \log \frac{N}{2} + \frac{26}{9}$. Граф быстрого преобразования Фурье-Хаара для $N = 16$ представлен на рис. (1.б).

Замечание. Для каждого из рассмотренных выше случаев (Фурье-Адамара, Фурье-Хартли и Фурье-Хаара) последняя итерация на соответствующем графе не считается за исполнимую операцию, т.к. при передаче спектра передается действительное число. На этом шаге показывается как образуется i -ый комплексный элемент спектра. При передаче передаются элементы предпоследней итерации.

Преобразование Фурье-Хартли Из формул (7) и (13) и (18) следует, что комбинированное преобразование Фурье-Хартли можно представить эквивалентной матрицей вида:

$$F_\chi(N) = \text{diag}(1, 1, P(2), P(4), \dots, P(N/2))$$

Количество операций в преобразовании $F_\chi(N)f$ получается равным $N - 2$. При сравнении с другими рассматриваемыми здесь преобразованиями, в этом случае получаем наименьшее количество операций. Граф быстрого преобразования для этого случая представлен на рис.2

Преобразование Хартли-Адамара Из формул (7), (14), (18) получим, что матрицу комбинированного преобразования Хартли-Адамара XH^T можно представить эквивалентной матрицей вида:

$$X_H(N) = \text{diag}(1, 1, P(2), P(4), \dots, P(N/2))$$

где $P(M)$ есть блок-матрица $XH^T(i)$ порядка $M = \frac{N}{2^i}$. При этом количество операций определяется по формуле $\frac{N^2}{9} + 4N - \frac{28}{3}n + \frac{8}{9}$.

Граф быстрого преобразования Хартли-Адамара представлен на рис.3.а.

Преобразование Хартли-Хаара Из формул (7), (18), (20) следует, что матрицу комбинированного преобразования Хартли-Хаара можно представить эквивалентной матрицей вида:

$$X_X(N) = \text{diag}(1, 1, P(2), P(4), \dots, P(N/2))$$

где каждый блок $X_X^T(i)$ представляет из себя матрицу порядка $N/2^i$. Количество операций в преобразовании $X_X f$ получается равным

$\frac{N^2}{9} + 2N - \frac{16}{3} \log \frac{N}{2} - \frac{44}{9}$. Граф быстрого преобразования для $N = 16$ представлен на рис.(3.б).

Преобразование Адамара-Хаара Из формул (7), (14), (20) следует, что матрицу комбинированного преобразования Адамара-Хаара можно представить следующей эквивалентной матрицей блочно-диагонального вида:

$$H_X(N) = \text{diag}(1, 1, P(2), P(4), \dots, P(N/2))$$

где каждый блок $P(i)$ представляет из себя матрицу $H_X^T(i)$ порядка $N/2^i$. Заметим, что блок $H_X^T(i)$ представляет из себя матрицу Адамара порядка $N/2^i$. Количество операций S при этом вычисляется по формуле: $S = N \log_2 \frac{N}{4} + 2$.

Преобразование Косинус-Адамара Из формул (7), (24), (14) вытекает, что комбинированное преобразование Косинус-Адамара можно представить матрицей вида:

$$C_H(N) = \text{diag}(1, 1, P(2), P(4), \dots, P(N/2))$$

где матрица $P(i)$ представляет из себя матрицу $CH^T(i)$ порядка $N/2^i$. При этом, количество операций в преобразовании получается:

$S = 7N(\frac{1}{2} \log_2 N - 1) + 8$. В качестве примера на рис.4 представлен граф данного преобразования для случая $N = 16$ [11]:

Замечание. Из всего сказанного выше следует:

1. Имея две ортогональные матрицы порядка $N = 2^n$ вида (7) можно получить эквивалентную матрицу блочно-диагонального вида (8), где на главной диагонали стоят ортогональные квадратные матрицы порядка 2^i , ($i = 1, 2, \dots, n-1$). При этом, т.к. эти матрицы ортогональны, то каждый блок можно рассматривать как отдельное ортогональное преобразование и при расчетах коэффициенты при каждом блоке не учитывать.

В этом случае, при выполнении обратного преобразования, полученный результат каждого блока умножается на норму данного блока. В случае комбинированного преобразования Хаара с каким-либо преобразованием $A_{k,m}(i)$ (см. 7), лежащие на диагонали блоки представляют из себя матрицы $A_{2k+1,m}(i)$, $i = 2, n-1, k, m = 0, N/2^i - 1$.

2. Количество операций в комбинированной блочно-диагональной матрице AB^T меньше чем в каждой из матриц A и B по отдельности (за исключением сос-преобразований).

В таблице 1 показано количество операций для рассмотренных выше преобразований.

3. Если известен граф быстрого преобразования блочно-диагональной матрицы AC^T вида (8) порядка $N_1 = 2^n$, где A и C - матрицы вида (7) порядка N_1 , то для получения графа быстрого преобразования матрицы $(AC^T)'$ порядка $N = 2^{n+1}$ достаточно рассчитать граф блока $(BD^T(1))'$ матрицы $(AC^T)'$.

Табл.1.

Преобразование	Количество операций	$N = 8$	$N = 16$	$N = 32$
Фурье F	$2N \log_2 N - 4N + 6$	22	70	198
Хартли X	$\frac{N^2}{9} + \frac{36}{9}N - \frac{48}{9} \log_2 N + 8$	24	72	216
Адамара H	$N \log_2 N$	24	64	160
Хаара χ	$2(N-1)$	14	30	62
Косинус-преобразование C	$\frac{5}{2}N \log_2 N - 3N + 6$	42	112	310
Фурье-Адамара FH	$\frac{N^2}{9} + 3N - \frac{16}{3} \log_2 N - \frac{10}{9}$	14	54	182
Фурье-Хаара $F\chi$	$\frac{N^2}{9} + 2N - \frac{16}{3} \log_2 N + \frac{26}{9}$	10	42	154
Фурье-Хартли FX	$N - 2$	5	14	30
Хартли-Адамара XH	$\frac{N^2}{9} + 4N - \frac{28}{3} \log_2 N + \frac{8}{9}$	12	52	148
Хартли-Хаара $X\chi$	$\frac{N^2}{9} + 2N - \frac{16}{3} \log_2 N + \frac{44}{9}$	12	44	154
Адамар-Хаара $H\chi$	$N \log_2 N \frac{N}{4} + 2$	10	34	98
Косинус-Адамара CH	$\frac{7}{2}N \log_2 N - 7N + 8$	36	120	334

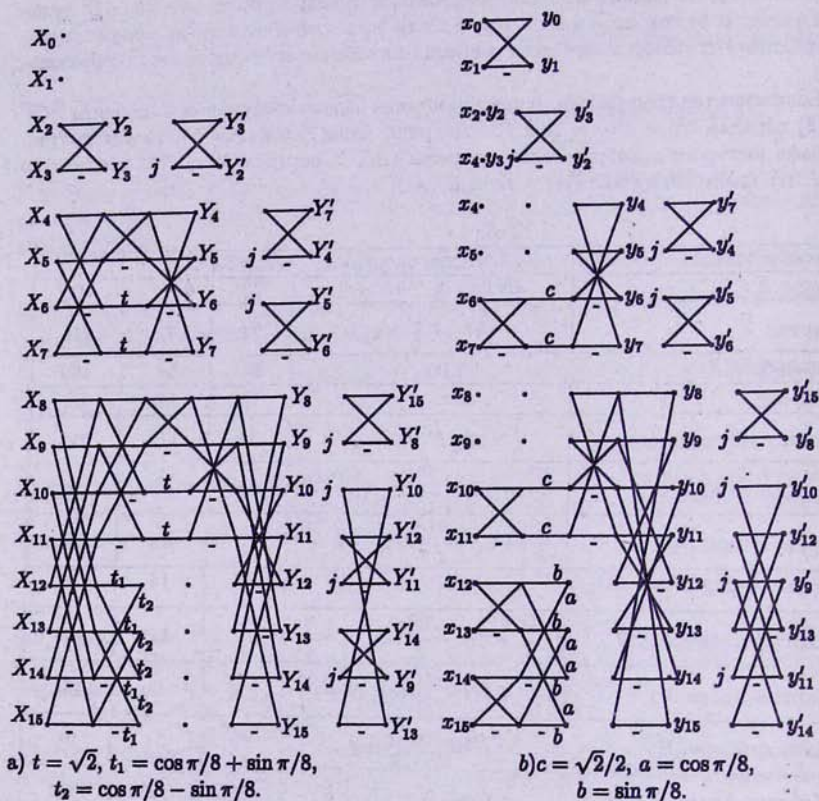


Рис.1 Графы быстрых преобразований а) Фурье-Адамара и б) Фурье-Хаара.

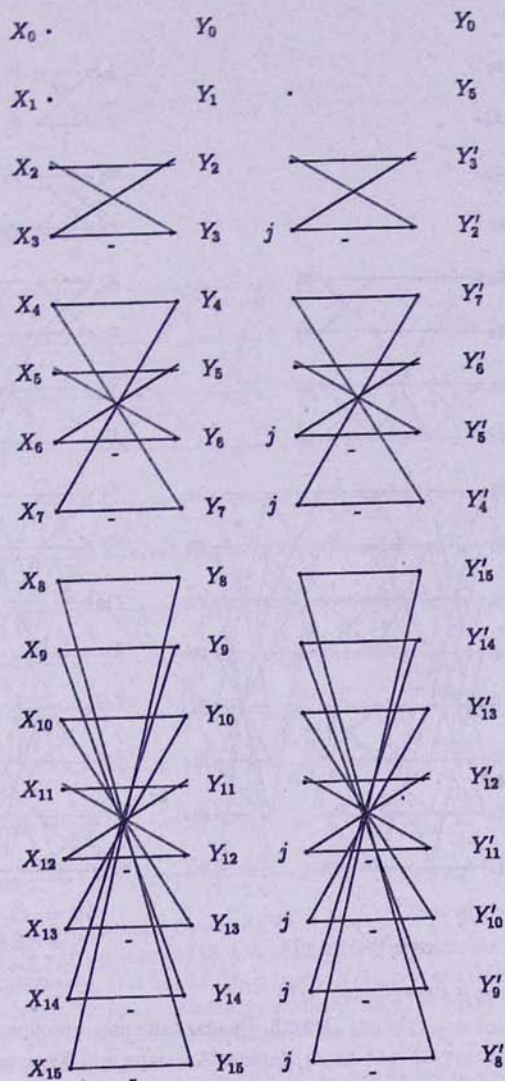


Рис.2 Граф быстрого преобразования Фурье-Хартли.

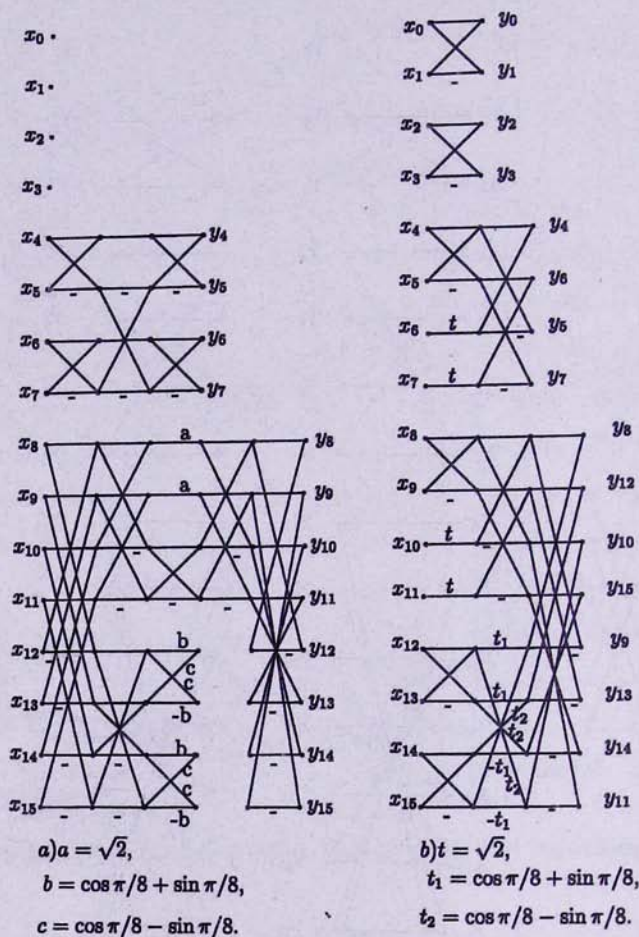


Рис.3. Графы быстрых преобразований:
 а) Хартли-Адамара и б) Хартли-Хаара.

$$X_0 \cdot Y_0$$

$$X_1 \cdot Y_1$$

$$X_2 \cdot Y_2$$

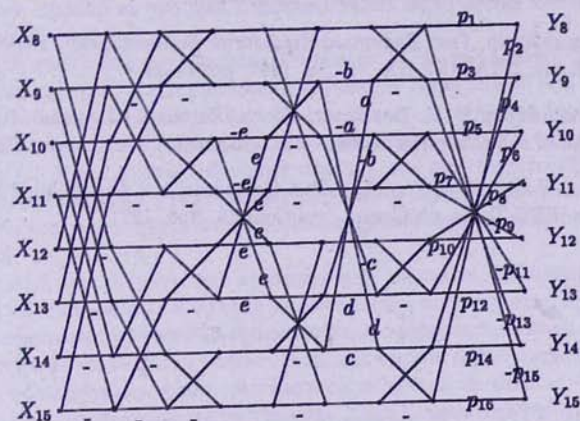
$$X_3 \cdot Y_3$$

$$X_4 \cdot Y_4$$

$$X_5 \cdot Y_5$$

$$X_6 \cdot Y_6$$

$$X_7 \cdot Y_7$$



$$\begin{aligned}
 a &= \sin \pi/8, b = \cos \pi/8, c = \sin 3\pi/8, d = \cos 3\pi/8, e = \cos \pi/4, \\
 f &= \sin \pi/16, g = \cos \pi/16, h = \sin 5\pi/16, k = \cos 5\pi/16, \\
 l &= \sin 3\pi/16, m = \cos 3\pi/16, n = \sin 7\pi/16, o = \cos 7\pi/16, \\
 p_1 &= \sin \pi/32, p_2 = \cos \pi/32, p_3 = \sin 9\pi/32, p_4 = \cos 9\pi/32, \\
 p_5 &= \sin 5\pi/32, p_6 = \cos 5\pi/32, p_7 = \sin 13\pi/32, p_8 = \cos 13\pi/32, \\
 p_9 &= \sin 3\pi/32, p_{10} = \cos 3\pi/32, p_{11} = \sin 11\pi/32, p_{12} = \cos 11\pi/32, \\
 p_{13} &= \sin 7\pi/32, p_{14} = \cos 7\pi/32, p_{15} = \sin 15\pi/32, p_{16} = \cos 15\pi/32,
 \end{aligned}$$

Рис.4. Граф быстрого преобразования косинус-адамара.

Литература

- [1] N. Ahmed, K. R. Rao, Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing. Springer-Verlag, Berlin, New York, 1975.
- [2] У. Прэтт, Цифровая обработка изображений. Изд "Мир", М., 1982, том 1-2.
- [3] S. Malvar, Signal Processing With Lapped Transforms. Artech House, Boston, 1991
- [4] K. R. Rao, P. Yip, Discrete Cosine Transforms: Algorithms, Advantages, Application. San Diego, Academic Press, 1990.
- [5] А. К. Джайн, Сжатие видеoinформации. Обзор. ТИИЭР, т.69, No 3, 1981, стр 71-117.
- [6] D. Akopian, Systematic Approaches to Parallel Architecture for DSP Algorithms. Tampere, ISBN 952-5148-29-7, 1997.
- [7] H. G. Sarukhanyan, Decomposition of the Hadamard Matrices and Fast Hadamard Transform. Proc. of the Int. Conf. Computer Analysis of Images and Patterns. Kiel, Germany, Sept. 10-12, 1997.
- [8] "Кибернетика и ВТ". Изд. "Наука", 1986, вып.2.
- [9] H. G. Sarukhanyan, Fast Hadamard Transform. Mathematical Problems of Computer Science. Trans. IPIA NAS RA, vol. 18, 1997, pp. 14-18.
- [10] H. G. Sarukhanyan, D. R. Darbinyan, Block-Diagonal Orthogonal Transforms. Proc. of Int. Conf. of the Computer Science and Information Technologies, 1997, pp. 147-149
- [11] W. Chen, S. Smith, S. C. Fralick, A Fast Computational Algorithm for Discrete Cosine Transform. IEEE Trans. on Comm., vol. Com-25, No9, 1977.