Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 20, 1998, 54–64.

Алгоритмы сжатия и восстановления изображения с заданным коэффициентом сжатия, основанные на преобразовании Адамара

А. Ф. Бадеян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА и ЕрГу
E-mail: spl@ipia.sci.am

Резюме

В работе разработаны быстрые алгоритмы сжатия и восстановления фрагмента изображения 16×16 с заранее известным коэффициентом сжатия, основанные на преобразовании Адамара.

1 Введение и постановка задачи

Пусть $X = (x_{i,j})_{i,j=1}^{N}$ – цифровое изображение, яркость элементов которого квантована на 2^k уровней, т.е. $0 \leq x_{i,j} \leq 2^k - 1$. Очевидно, что массив X может быть закодирован с помощью N^2 k–разрядных кодовых слов.

Существуют различные методы кодирования изображения с целью их сжатия [1-4]. Один из этих методов основан на ортогональных преобразованиях. Рассмотрим фрагмент изображения размером $n \times n$, $(n \leq N)$ как точку в n^2–мерной системе координат, значение каждой координаты которого определеют уровень яркости соответствующего элемента. Так как четырехмерное пространство трудно представить в зримой форме, рассмотрим фрагмент изображения, состоящий из двух соседних элементов. Пусть $k = 3$, т.е. каждый из двух элементов может принимать любое из 8 значений яркости. Следовательно, каждый из 64 возможных фрагментов 1×2 может быть представлен одной из 64 точек в двумерном пространстве (см. рис.1).

Так как соседние элементы с большей вероятностью имеют близкие или одинаковые уровни яркости, то наиболее вероятные фрагменты будут вблизи линии $x_1 = x_2$. Повернув систему координат на 45 градусов находим, что более вероятные участки изображения располагаются не вблизи линии $y_1 = y_2$, а вдоль оси y_1. Это означает, что переменные y_1 и y_2 являются "более независимыми", чем были x_1 и x_2. Поворот приводит также к перераспределению дисперсии. При этом $\sigma_{y_1}^2 + \sigma_{y_2}^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2$, однако, если имело место равенство $\sigma_{x_1}^2 = \sigma_{x_2}^2$, то теперь $\sigma_{y_1}^2 > \sigma_{y_2}^2$.

Такая же процедура может быть использована для $n \times n$ фрагмента изображения. В этом случае поворот координат осуществляется при помощи ортогональных матриц высших порядков [1,2].

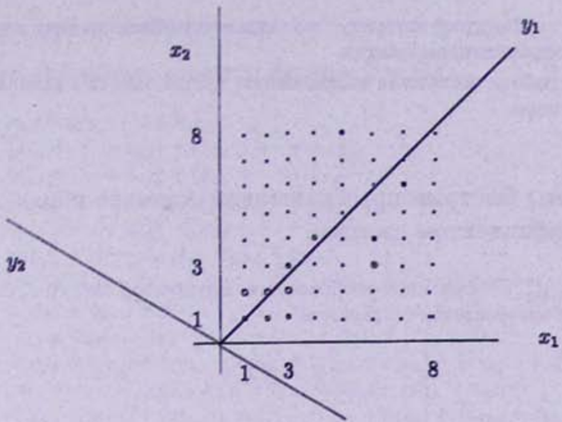

Рис. 1

Сжатие изображения $f = (f_{i,j})_{i,j=1}^{n}$ посредством некоторого ортогонального преобразования A можно осуществить в несколько этапов:

1) вычисляется спектр изображения f, т.е. $y = Af$;

2) определяются более информативные компоненты вектора y (обычно это те компоненты вектора y, модуль которых превосходит некоторое заранее заданное число – порог). Информативный вектор y' имеет длину m ($m < n$), а число $k = \frac{m}{n}$ называется коэффициентом сжатия;

3) для восстановления сжатого изображения вектор y' дополняют нулями до размерности n и производят обратное ортогональное преобразование, т.е. получают вектор $f' = \frac{1}{n} A^T y'$;

4) определяется отклонение восстановленного изображения от исходного по некоторой метрике (например по среднеквадратичной метрике).

Если качество восстановленного изображения не удовлетворительно, то уменьшают порог и повторяют этапы 2)–4).

Отметим, что этап отбора информативных компонент вектора y упрОстится, если заранее известно число сохраняемых компонент (т.е. коэффициент сжатия) и их распределения (места в векторе y). Такой метод называется зональным отбором [1–4].

Ясно, что зональный отбор не только упрощает процесс сжатия и восстановления изображения, но и увеличивает окончательный коэффициент сжатия по сравнению с пороговым отбором (в этом случае нет необходимости определения всех индексов сохраняемых компонент вектора y). Наряду с этим отметим также, что зональный отбор спектральных коэффициентов сильно зависит как от конкретного типа ортогонального преобразования, так и от структуры самого изображения.

Естественным образом возникают следующие задачи:

1. Определить степень однородности фрагментов изображения и тем самым определить "оптимальный или эффективный" коэффициент сжатия;

2. Определить тип "оптимального или эффективного" ортогонального преобразования для данного фрагмента изображения;

3. Разработать быстрый алгоритм сжатия и восстановления фрагмента изображения с известным коэффициентом сжатия.

Настоящая работа посвящена исследованию третей задачи с использованием преобразования Адамара.

2 Алгоритмы быстрых преобразований Адамара порядка 16 с известным коэффициентом сжатия

Пусть $X = (x_{i,j})_{i,j=1}^{16}$ – фрагмент изображения. Двумерный спектр Адамара фрагмента изображения X вычисляется по формуле

$$Y = HXH, \tag{2.1}$$

где H – матрица Адамара порядка 16 вида

$$H = \begin{pmatrix}
+ & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + & + \\
+ & + & + & + & + & + & + & + & - & - & - & - & - & - & - & - \\
+ & + & + & + & - & - & - & - & - & - & - & - & + & + & + & + \\
+ & + & + & + & - & - & - & - & + & + & + & + & - & - & - & - \\
+ & + & - & - & - & - & + & + & + & + & - & - & - & - & + & + \\
+ & + & - & - & - & - & + & + & - & - & + & + & + & + & - & - \\
+ & + & - & - & + & + & - & - & - & - & + & + & - & - & + & + \\
+ & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - \\
+ & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - & + & + & - & - & + \\
+ & - & - & + & + & - & - & + & - & + & + & - & - & + & + & - \\
+ & - & - & + & - & + & + & - & - & + & + & - & + & - & - & + \\
+ & - & - & + & - & + & + & - & + & - & - & + & - & + & + & - \\
+ & - & + & - & - & + & - & + & + & - & + & - & - & + & - & + \\
+ & - & + & - & - & + & - & + & - & + & - & + & + & - & + & - \\
+ & - & + & - & + & - & + & - & - & + & - & + & - & + & - & + \\
+ & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & - & + & -
\end{pmatrix} \tag{2.2}$$

где знак "+" означает +1, а "-" -1.

Двумерное обратное преобразование Адамара порядка 16 имеет вид

$$X = \frac{1}{256} HYH. \tag{2.3}$$

Заметим, что матрица (2.2) – симметричная.

Ниже приведены быстрые алгоритмы сжатия и восстановления изображения с использованием преобразования Адамара порядка 16 и с заранее заданным числом спектральных коэффициентов m, т.е. с заданным коэффициентов сжатия, равным $k = \frac{256}{m}$. Отметим, что выбираются m элементов из левой верхней части спектральной матрицы Y.

1.1 Алгоритм при $m = 64$ $(k = 4)$.

Сперва вычислим необходимые элементы матрицы $Z = HX$.

$$
\begin{aligned}
z_{1,i} &= x_{1,i} + x_{2,i} + \cdots + x_{16,i}),\\
z_{2,i} &= (x_{1,i} + \cdots + x_{8,i}) - (x_{9,i} + \cdots + x_{16,i}),\\
z_{3,i} &= (x_{1,i} + \cdots + x_{4,i}) - (x_{5,i} + \cdots + x_{8,i}) -\\
&\quad -(x_{9,i} + \cdots + x_{12,i}) + (x_{13,i} + x_{16,i}),\\
z_{4,i} &= (x_{1,i} + \cdots + x_{4,i}) - (x_{5,i} + \cdots + x_{8,i}) +\\
&\quad +(x_{9,i} + \cdots + x_{12,i}) - (x_{13,i} + x_{16,i}),\\
z_{5,i} &= (x_{1,i} + x_{2,i}) - (x_{3,i} + x_{4,i}) - (x_{5,i} + x_{6,i}) + (x_{7,i} + x_{8,i}) +\\
&\quad +(x_{9,i} + x_{10,i}) - (x_{11,i} + x_{12,i}) - (x_{13,i} + x_{14,i}) + (x_{15,i} + x_{16,i}),\\
z_{6,i} &= (x_{1,i} + x_{2,i}) - (x_{3,i} + x_{4,i}) - (x_{5,i} + x_{6,i}) + (x_{7,i} + x_{8,i}) -\\
&\quad -(x_{9,i} + x_{10,i}) + (x_{11,i} + x_{12,i}) + (x_{13,i} + x_{14,i}) - (x_{15,i} + x_{16,i}),\\
z_{7,i} &= (x_{1,i} + x_{2,i}) - (x_{3,i} + x_{4,i}) + (x_{5,i} + x_{6,i}) - (x_{7,i} + x_{8,i}) -\\
&\quad -(x_{9,i} + x_{10,i}) + (x_{11,i} + x_{12,i}) - (x_{13,i} + x_{14,i}) + (x_{15,i} + x_{16,i}),\\
z_{8,i} &= (x_{1,i} + x_{2,i}) - (x_{3,i} + x_{4,i}) + (x_{5,i} + x_{6,i}) - (x_{7,i} + x_{8,i}) +\\
&\quad +(x_{9,i} + x_{10,i}) - (x_{11,i} + x_{12,i}) + (x_{13,i} + x_{14,i}) + (x_{15,i} + x_{16,i}),\\
&\qquad i = 1, 2, \ldots, 16.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Далее, согласно (2.1), вычислим необходимые элементы спектральной матрицы Y.

$$
\begin{aligned}
y_{i,1} &= z_{i,1} + \cdots + z_{i,16},\\
y_{i,2} &= (z_{i,1} + \cdots + z_{i,8}) - (z_{i,9} + \cdots + z_{i,16}),\\
y_{i,3} &= (z_{i,1} + \cdots + z_{i,4}) - (z_{i,5} + \cdots + z_{i,8}) -\\
&\quad -(z_{i,9} + \cdots + z_{i,12}) + (z_{i,13} + \cdots + z_{i,16}),\\
y_{i,4} &= (z_{i,1} + \cdots + z_{i,4}) - (z_{i,5} + \cdots + z_{i,8}) +\\
&\quad +(z_{i,9} + \cdots + z_{i,12}) - (z_{i,13} + \cdots + z_{i,16}),\\
y_{i,5} &= (z_{i,1} + z_{i,2}) - (z_{i,3} + z_{i,4}) - (z_{i,5} + z_{i,6}) + (z_{i,7} + z_{i,8}) +\\
&\quad +(z_{i,9} + z_{i,10}) - (z_{i,11} + z_{i,12}) - (z_{i,13} + z_{i,14}) + (z_{i,15} + z_{i,16}),\\
y_{i,6} &= (z_{i,1} + z_{i,2}) - (z_{i,3} + z_{i,4}) - (z_{i,5} + z_{i,6}) + (z_{i,7} + z_{i,8}) -\\
&\quad -(z_{i,9} + z_{i,10}) + (z_{i,11} + z_{i,12}) + (z_{i,13} + z_{i,14}) - (z_{i,15} + z_{i,16}),\\
y_{i,7} &= (z_{i,1} + z_{i,2}) - (z_{i,3} + z_{i,4}) + (z_{i,5} + z_{i,6}) - (z_{i,7} + z_{i,8}) -\\
&\quad -(z_{i,9} + z_{i,10}) + (z_{i,11} + z_{i,12}) - (z_{i,13} + z_{i,14}) + (z_{i,15} + z_{i,16}),\\
y_{i,8} &= (z_{i,1} + z_{i,2}) - (z_{i,3} + z_{i,4}) + (z_{i,5} + z_{i,6}) - (z_{i,7} + z_{i,8}) +\\
&\quad +(z_{i,9} + z_{i,10}) - (z_{i,11} + z_{i,12}) + (z_{i,13} + z_{i,14}) - (z_{i,15} + z_{i,16}),\\
&\qquad i = 1, 2, \ldots, 8.
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Таким образом, после сжатия и дополнения нулями, спектральная матрица принимает следующий вид:

$$
Y' = \begin{pmatrix}
y_{1,1} & y_{1,2} & \cdots & y_{1,8} & 0 & \cdots & 0\\
y_{2,1} & y_{2,2} & \cdots & y_{2,8} & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0\\
y_{8,1} & y_{8,2} & \cdots & y_{8,8} & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

Теперь для восстановления фрагмента изображения необходимо выполнить преобразование вида (2.3).

Вычислим элементы матрицы $A = HY'$.

$$\begin{aligned}
&a_{1,i} = a_{2,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) + (y_{3,i} + y_{4,i}) + (y_{5,i} + y_{6,i}) + (y_{7,i} + y_{8,i}),\\
&a_{3,i} = a_{4,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) + (y_{3,i} + y_{4,i}) - (y_{5,i} + y_{6,i}) - (y_{7,i} + y_{8,i}),\\
&a_{5,i} = a_{6,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) - (y_{3,i} + y_{4,i}) - (y_{5,i} + y_{6,i}) + (y_{7,i} + y_{8,i}),\\
&a_{7,i} = a_{8,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) - (y_{3,i} + y_{4,i}) + (y_{5,i} + y_{6,i}) - (y_{7,i} + y_{8,i}),\\
&a_{9,i} = a_{10,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) - (y_{3,i} - y_{4,i}) + (y_{5,i} - y_{6,i}) - (y_{7,i} - y_{8,i}),\\
&a_{11,i} = a_{12,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) - (y_{3,i} - y_{4,i}) - (y_{5,i} - y_{6,i}) + (y_{7,i} - y_{8,i}),\\
&a_{13,i} = a_{14,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) + (y_{3,i} - y_{4,i}) - (y_{5,i} - y_{6,i}) - (y_{7,i} - y_{8,i}),\\
&a_{15,i} = a_{16,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) + (y_{3,i} - y_{4,i}) + (y_{5,i} - y_{6,i}) + (y_{7,i} - y_{8,i}),\\
&\qquad i = 1, \ldots, 8, a_{i,j} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 16, \quad j = 9, \ldots, 16.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Теперь вычислим элементы матрицы $B = AH$ окончательно восстановленного изображения.

$$\begin{aligned}
b_{i,1} &= b_{i,2} = (a_{i,1} + a_{i,2}) + (a_{i,3} + a_{i,4}) + (a_{i,5} + a_{i,6}) + (a_{i,7} + a_{i,8}),\\
b_{i,3} &= b_{i,4} = (a_{i,1} + a_{i,2}) + (a_{i,3} + a_{i,4}) - (a_{i,5} + a_{i,6}) - (a_{i,7} + a_{i,8}),\\
b_{i,5} &= b_{i,6} = (a_{i,1} + a_{i,2}) - (a_{i,3} + a_{i,4}) - (a_{i,5} + a_{i,6}) + (a_{i,7} + a_{i,8}),\\
b_{i,7} &= b_{i,8} = (a_{i,1} + a_{i,2}) - (a_{i,3} + a_{i,4}) + (a_{i,5} + a_{i,6}) - (a_{i,7} + a_{i,8}),\\
b_{i,9} &= b_{i,10} = (a_{i,1} - a_{i,2}) - (a_{i,3} - a_{i,4}) + (a_{i,5} - a_{i,6}) - (a_{i,7} - a_{i,8}),\\
b_{i,11} &= b_{i,12} = (a_{i,1} - a_{i,2}) - (a_{i,3} - a_{i,4}) - (a_{i,5} - a_{i,6}) + (a_{i,7} - a_{i,8}),\\
b_{i,13} &= b_{i,14} = (a_{i,1} - a_{i,2}) + (a_{i,3} - a_{i,4}) - (a_{i,5} - a_{i,6}) - (a_{i,7} - a_{i,8}),\\
b_{i,15} &= b_{i,16} = (a_{i,1} - a_{i,2}) + (a_{i,3} - a_{i,4}) + (a_{i,5} - a_{i,6}) + (a_{i,7} - a_{i,8}),\\
&\qquad i = \overline{1,15}, \quad b_{2i-1,j} = b_{2i,j}, \quad i = \overline{1,8}, \quad j = \overline{1,16}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Приведем графы алгоритмов быстрых преобразований, соответвующих формулам (2.4)–(2.7).

Замечание 2.1. Для вычисления $z_{i,j}$ необходимо всего 512 сложений; для вычисления $y_{i,j}$ необходимо всего 256 сложений; для вычисления $a_{i,j}$ необходимо всего 192 сложений; для вычисления $b_{i,j}$ необходимо всего 192 сложений. Таким образом, для сжатия и восстановления фрагмента изображения размерности 16×16 в 4 раза необходимо всего 1152 сложения.

Далее, для различных значений m мы не будем приводить графы вычислений. Приведем только формулы вычисления и число необходимых операций.

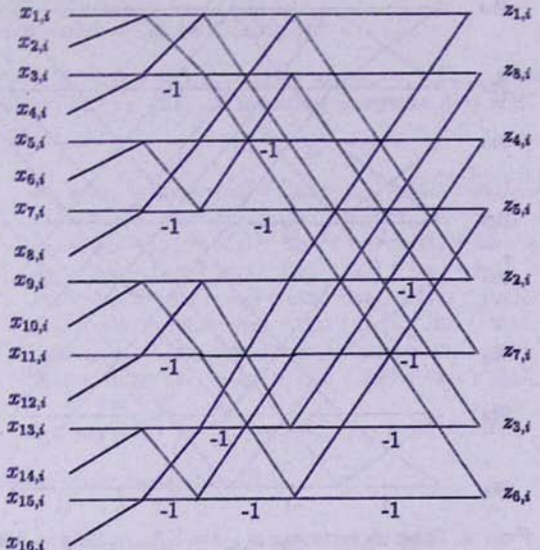

Рис. 2. Граф вычисления $z_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, $j = 1, \ldots, 16$.

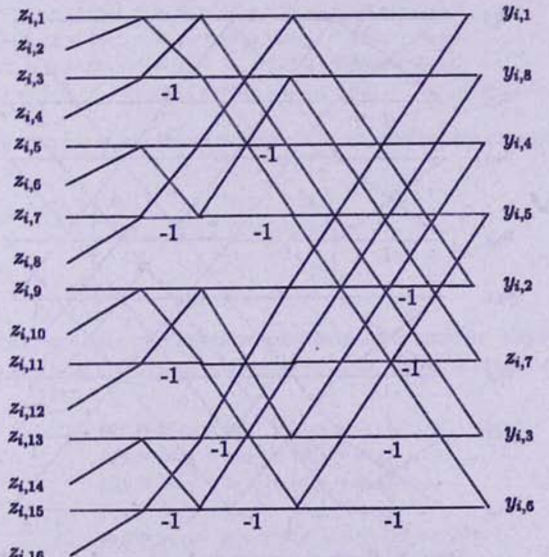

Рис. 3. Граф вычисления $y_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, 8$.

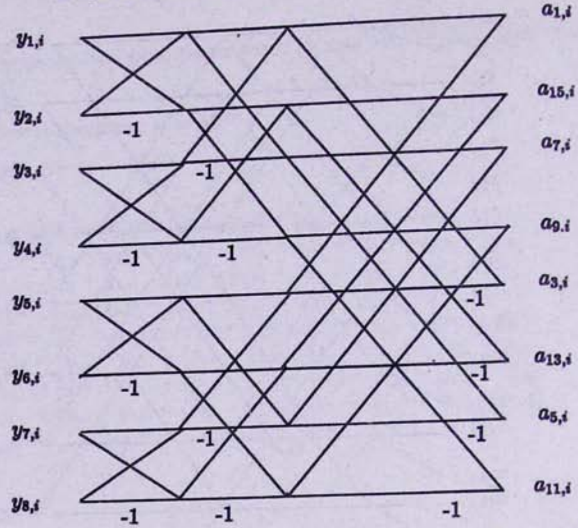

Рис. 4. Граф вычисления $a_{i,j}$, $i = 1, 3, \ldots, 15$, $j = 1, 2, \ldots, 8$.

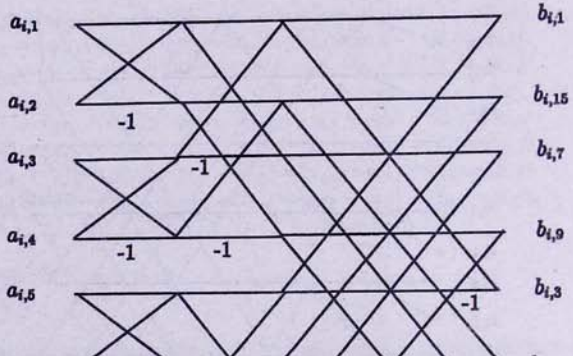

Рис. 5. Граф вычисления $b_{i,j}$, $i, j = 1, 3, \ldots, 15$.

2.2 Алгоритм при $m = 36$ ($k = 256/36$).

Элементы $z_{i,j}$, $i = 1,2,\ldots,6$, $j = 1,2,\ldots,16$ и $y_{i,j}$, $i,j = 1,2,\ldots,6$ вычисляются соответственно из формул (2.4) и (2.5). А элементы матрицы $A = HY'$ определяются из следующих формул:

$$\begin{aligned}
&a_{1,i} = a_{2,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) + (y_{3,i} + y_{4,i}) + (y_{5,i} + y_{6,i}),\\
&a_{3,i} = a_{4,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) + (y_{3,i} + y_{4,i}) - (y_{5,i} + y_{6,i}),\\
&a_{5,i} = a_{6,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) - (y_{3,i} + y_{4,i}) - (y_{5,i} + y_{6,i}),\\
&a_{7,i} = a_{8,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) - (y_{3,i} + y_{4,i}) + (y_{5,i} + y_{6,i}),\\
&a_{9,i} = a_{10,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) - (y_{3,i} - y_{4,i}) + (y_{5,i} - y_{6,i}),\\
&a_{11,i} = a_{12,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) - (y_{3,i} - y_{4,i}) - (y_{5,i} - y_{6,i}),\\
&a_{13,i} = a_{14,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) + (y_{3,i} - y_{4,i}) - (y_{5,i} - y_{6,i}),\\
&a_{15,i} = a_{16,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) + (y_{3,i} - y_{4,i}) + (y_{5,i} - y_{6,i}),\\
&\qquad i = 1,2,\ldots,6,\\
&\qquad a_{i,j} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,16, \quad j = 9,10,\ldots,16.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Вычислим элементы матрицы $B = AH$.

$$\begin{aligned}
&b_{i,1} = b_{i,2} = (a_{i,1} + a_{i,2}) + (a_{i,3} + a_{i,4}) + (a_{i,5} + a_{i,6}),\\
&b_{i,3} = b_{i,4} = (a_{i,1} + a_{i,2}) + (a_{i,3} + a_{i,4}) - (a_{i,5} + a_{i,6}),\\
&b_{i,5} = b_{i,6} = (a_{i,1} + a_{i,2}) - (a_{i,3} + a_{i,4}) - (a_{i,5} + a_{i,6}),\\
&b_{i,7} = b_{i,8} = (a_{i,1} + a_{i,2}) - (a_{i,3} + a_{i,4}) + (a_{i,5} + a_{i,6}),\\
&b_{i,9} = b_{i,10} = (a_{i,1} - a_{i,2}) - (a_{i,3} - a_{i,4}) + (a_{i,5} - a_{i,6}),\\
&b_{i,11} = b_{i,12} = (a_{i,1} - a_{i,2}) - (a_{i,3} - a_{i,4}) - (a_{i,5} - a_{i,6}),\\
&b_{i,13} = b_{i,14} = (a_{i,1} - a_{i,2}) + (a_{i,3} - a_{i,4}) - (a_{i,5} - a_{i,6}),\\
&b_{i,15} = b_{i,16} = (a_{i,1} - a_{i,2}) + (a_{i,3} - a_{i,4}) + (a_{i,5} - a_{i,6}),\\
&\qquad i = 1,3,\ldots,15, b_{2i-1,j} = b_{2i,j}, \quad i = 1,2,\ldots,8, \quad j = 1,2,\ldots,16.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Отметим, что сжатое и восстановленное изображение имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,3} & \cdots & b_{1,15}\\ b_{3,1} & b_{3,3} & \cdots & b_{3,15}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{15,1} & b_{15,3} & \cdots & b_{15,15} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Заметим также, что для обеспечения коэффициента сжатия, равного 256/36, придется сохранить или отправлять не элементы $b_{i,j}$ (см. (2.9)), а следующие элементы:

$$\begin{aligned}
&p_{i,1} = (a_{i,1} + a_{i,2}) + (a_{i,3} + a_{i,4}),\\
&p_{i,2} = (a_{i,1} + a_{i,2}) - (a_{i,3} + a_{i,4}),\\
&p_{i,3} = (a_{i,1} - a_{i,2}) + (a_{i,3} - a_{i,4}),\\
&p_{i,4} = (a_{i,1} - a_{i,2}) - (a_{i,3} - a_{i,4}),\\
&p_{i,5} = a_{i,5}, \quad p_{i,6} = a_{i,6}, \quad i = 1,2,\ldots,6.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Для окончательного восстановления изображения необходимо вычислить сперва следующие элементы

$$\begin{aligned}
&b_{i,1} = p_{i,1} + p_{i,5}, \quad b_{i,3} = p_{i,1} - p_{i,5},\\
&b_{i,5} = p_{i,2} - p_{i,5}, \quad b_{i,7} = p_{i,2} + p_{i,5},\\
&b_{i,9} = p_{i,4} + p_{i,6}, \quad b_{i,11} = p_{i,4} - p_{i,6},\\
&b_{i,13} = p_{i,3} - p_{i,6}, \quad b_{i,15} = p_{i,3} + p_{i,6}, i = 1, 3, \ldots, 15.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

и затем согласно формуле (2.10) восстановить изображение.

Замечание 2.2. Для сжатия и восстановления фрагмента изображения размерности 16×16 в 256/36 раз необходимо выполнить 784 и 64 сложения соответственно.

2.3 Алгоритм при $m = 25$ $(k = 256/25)$

Элементы $z_{i,j}$, $i = 1, 2, \ldots, 5$, $j = 1, 2, \ldots, 16$ и $y_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, 5$ вычисляются соответственно из формул (2.4) и (2.5). А элементы матрицы $A = HY'$ определяются из следующих формул:

$$\begin{aligned}
&a_{1,i} = a_{2,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) + (y_{3,i} + y_{4,i}) + y_{5,i},\\
&a_{3,i} = a_{4,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) + (y_{3,i} + y_{4,i}) - y_{5,i},\\
&a_{5,i} = a_{6,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) - (y_{3,i} + y_{4,i}) - y_{5,i},\\
&a_{7,i} = a_{8,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) - (y_{3,i} + y_{4,i}) + y_{5,i},\\
&a_{9,i} = a_{10,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) - (y_{3,i} - y_{4,i}) + y_{5,i},\\
&a_{11,i} = a_{12,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) - (y_{3,i} - y_{4,i}) - y_{5,i},\\
&a_{13,i} = a_{14,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) + (y_{3,i} - y_{4,i}) - y_{5,i},\\
&a_{15,i} = a_{16,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) + (y_{3,i} - y_{4,i}) + y_{5,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, 6,\\
&\qquad a_{i,j} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 16, \quad j = 6, 7, \ldots, 16.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Далее вычисляются элементы матрицы $B = AH$.

$$\begin{aligned}
&b_{i,1} = b_{i,2} = (a_{i,1} + a_{i,2}) + (a_{i,3} + a_{i,4}) + a_{i,5},\\
&b_{i,3} = b_{i,4} = (a_{i,1} + a_{i,2}) + (a_{i,3} + a_{i,4}) - a_{i,5},\\
&b_{i,5} = b_{i,6} = (a_{i,1} + a_{i,2}) - (a_{i,3} + a_{i,4}) - a_{i,5},\\
&b_{i,7} = b_{i,8} = (a_{i,1} + a_{i,2}) - (a_{i,3} + a_{i,4}) + a_{i,5},\\
&b_{i,9} = b_{i,10} = (a_{i,1} - a_{i,2}) - (a_{i,3} - a_{i,4}) + a_{i,5},\\
&b_{i,11} = b_{i,12} = (a_{i,1} - a_{i,2}) - (a_{i,3} - a_{i,4}) - a_{i,5},\\
&b_{i,13} = b_{i,14} = (a_{i,1} - a_{i,2}) + (a_{i,3} - a_{i,4}) - a_{i,5},\\
&b_{i,15} = b_{i,16} = (a_{i,1} - a_{i,2}) + (a_{i,3} - a_{i,4}) + a_{i,5}), \quad i = 1, 3, \ldots, 15,\\
&b_{2i-1,j} = b_{2i,j}, \quad i = 1, 2, \ldots, 8, \quad j = 1, 2, \ldots, 16.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Для обеспечения необходимого коэффициента сжатия по каналу отправляются следующие элементы:

$$\begin{aligned}
&p_{1,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) + (y_{3,i} + y_{4,i}),\\
&p_{2,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) - (y_{3,i} + y_{4,i}),\\
&p_{3,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) + (y_{3,i} - a_{4,i}),\\
&p_{4,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) - (y_{3,i} - y_{4,i}),\\
&p_{5,i} = y_{5,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, 5.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

А при восстановлении изображения необходимо выполнить следующие вычисления:

$$
\begin{aligned}
&a_{1,i} = p_{1,i} + p_{5,i}, \quad a_{3,i} = p_{1,i} - p_{5,i},\\
&a_{5,i} = p_{2,i} - p_{5,i}, \quad a_{7,i} = p_{2,i} + p_{5,i},\\
&a_{9,i} = p_{3,i} + p_{5,i}, \quad a_{11,i} = p_{3,i} - p_{5,i},\\
&a_{13,i} = p_{4,i} - p_{5,i}, \quad a_{15,i} = p_{4,i} + p_{5,i}, \quad i = 1, 2, \ldots, 15.
\end{aligned}
$$

Замечание 2.3. Для сжатия и восстановления фрагмента изображения размерности 6×16 в $256/25$ раз необходимо выполнить 607 и 168 сложения соответственно.

.4 Алгоритм при $m = 16$ ($k = 16$).

лементы $z_{i,j}$, $i = 1, 2, 3, 4$, $j = 1, 2, \ldots, 16$ и $y_{i,j}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$ вычисляются соответственно по формулам (2.4) и (2.5). А элементы матриц $A = HY'$ и $B = AH$ определяются з следующих формул:

$$
\begin{aligned}
&a_{1,i} = \cdots = a_{4,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) + (y_{3,i} + y_{4,i}),\\
&a_{5,i} = \cdots = a_{8,i} = (y_{1,i} + y_{2,i}) - (y_{3,i} + y_{4,i}),\\
&a_{9,i} = \cdots = a_{12,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) - (y_{3,i} - y_{4,i}),\\
&a_{13,i} = \cdots = a_{16,i} = (y_{1,i} - y_{2,i}) + (y_{3,i} - y_{4,i}), \quad i = 1, 2, 3, 4,\\
&\qquad a_{i,j} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 16, \quad j = 5, 6, \ldots, 16.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&b_{i,1} = \cdots = b_{i,4} = (a_{i,1} + a_{i,2}) + (a_{i,3} + a_{i,4}),\\
&b_{i,5} = \cdots = b_{i,8} = (a_{i,1} + a_{i,2}) - (a_{i,3} + a_{i,4}),\\
&b_{i,9} = \cdots = b_{i,12} = (a_{i,1} - a_{i,2}) - (a_{i,3} - a_{i,4}),\\
&b_{i,13} = \cdots = b_{i,16} = (a_{i,1} - a_{i,2}) + (a_{i,3} - a_{i,4}).
\end{aligned}
$$

Замечание 2.4. Для сжатия и восстановления фрагмента изображения размерности 6×16 в 16 раз необходимо выполнять всего 464 сложения.

.5 Алгоритм при $m = 9$ ($k = 256/9$)

этом случае элементы $z_{i,j}$, $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \ldots, 16$ и $y_{i,j}$, $i, j = 1, 2, 3$ вычисляются оответственно из формул (2.4) и (2.5).

Вычислим элементы матриц $A = HY'$ и $B = AH$.

$$
\begin{aligned}
&a_{1,i} = \cdots = a_{4,i} = y_{1,i} + y_{2,i} + y_{3,i},\\
&a_{5,i} = \cdots = a_{8,i} = y_{1,i} + y_{2,i} - y_{3,i},\\
&a_{9,i} = \cdots = a_{12,i} = y_{1,i} - y_{2,i} - y_{3,i},\\
&a_{13,i} = \cdots = a_{16,i} = y_{1,i} - y_{2,i} + y_{3,i}, \quad i = 1, 2, 3,\\
&\qquad a_{i,j} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 16, \quad j = 4, 6, \ldots, 16.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&b_{i,1} = \cdots = b_{i,4} = a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3},\\
&b_{i,5} = \cdots = b_{i,8} = a_{i,1} + a_{i,2} - a_{i,3},\\
&b_{i,9} = \cdots = b_{i,12} = a_{i,1} - a_{i,2} - a_{i,3},\\
&b_{i,13} = \cdots = b_{i,16} = a_{i,1} - a_{i,2} + a_{i,3}, \quad i = 1, 5, 9, 13.
\end{aligned}
$$

Для обеспечения необходимого коэффициента сжатия по каналу отправляются следующие числа:

$$p_{1,i} = y_{1,i} + y_{2,i}, p_{2,i} = y_{1,i} - y_{2,i}, p_{3,i} = y_{3,i}, \quad i = 1, 2, 3.$$

При восстановлении производятся следующие вычисления:

$$\begin{array}{lll} a_{1,i} = p_{1,i} + p_{3,i}, & a_{5,i} = p_{1,i} - p_{3,i}, & \\ a_{9,i} = p_{2,i} - p_{3,i}, & a_{13,i} = p_{2,i} + p_{3,i}, & i = 1, 2, 3; \\ b_{i,1} = a_{i,1} + a_{i,2} + a_{i,3}, & b_{i,5} = a_{i,1} + a_{i,2} - a_{i,3}, & \\ b_{i,9} = a_{i,1} - a_{i,2} - a_{i,3}, & b_{i,13} = a_{i,1} - a_{i,2} + a_{i,3}, & i = 1, 5, 9, 13. \end{array}$$

Замечание 2.5. Для сжатия и восстановления фрагмента изображения размерности 16×16 в $256/9$ раз необходимо выполнить 367 и 36 сложения соответственно.

2.6 Алгоритм при $m = 4$ ($k = 64$)

Необходимые элементы $z_{i,j}$ и $y_{i,j}$ вычисляются из формул (2.4) и (2.5). Затем производятся следующие вычисления:

$$\begin{array}{ll} a_{1,i} = \cdots = a_{8,i} = y_{1,i} + y_{2,i}, & \\ a_{9,i} = \cdots = a_{16,i} = y_{1,i} - y_{2,i}, & i = 1, 2, \\ a_{i,j} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, 16, & j = 3, 4, \ldots, 16; \\ b_{i,1} = \cdots = b_{i,8} = a_{i,1} + a_{i,2}, & \\ b_{i,9} = \cdots = a_{i,16} = a_{i,1} - a_{i,2}, & i = 1, 2, \ldots, 16. \end{array}$$

Замечание 2.6. Для сжатия и восстановления фрагмента изображении размерности 16×16 в 64 раз необходимо выполнить всего 296 сложения.

Литература

[1] N. Ahmed, K. R. Rao, Orthogonal Transforms for Digital Signal Processing. Berlin, New York, 1975.

[2] W. K. Pratt, Digital Image Processing. New York, vol.1–2, 1978.

[3] K. R. Rao, P. Yip, Discrete Cosine Transform–Algorithms, Advantages, Applications. Academic Press, London, 1990.

[4] H. G. Sarukhanyan, Decomposition of the Hadamard Matrices and Fast Hadamard Transform. Lecture Notes in Computer Science, vol. 1296, 1997, p. 575–581.

[5] А. Ф. Бадеян, А. Г. Саруханян, Об определении степени однородности фрагмента изображении. РОАИ-3-97, Н.Новгород, 1-3 дек., 1997.

[6] H. Sarukhanyan, A. Badeyan, Fast Walsh-Hadamard Transform of Preassigned Spectral Coefficients. CSIT-97, Yrevan, 1997, p. 150–152.