Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 20, 1998, 49–53.

Новые направляющие правила для симплекс метода внутренних точек и их исследование на кубе Кли-Минти

К. А. Тунян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА и ЕрГУ

Резюме

В работе [5] была предложена идея выбирать в преобразовании Гаусса не один элемент, как это принято, а одновременно k элементов - направляющий вектор длины k, где $k \in \{1, \dots, n\}$, n - число столбцов матрицы A. Эта идея позволила получить параметрическое линейное преобразование, зависящее от k, которое с алгебраической точки зрения является "выпуклой" комбинацией преобразования Гаусса ($k = 1$) и преобразования Грама-Шмидта ($k = n$). Используя это преобразование, были обобщены методы исключения, развиты критерий оптимальности Данцига и симплекс метод [6]. Суть развития симплекс метода заключается в следующем. На каждом s-м шаге выбирается направляющий (положительный) вектор длины k_s, который позволяет после шага обобщенного метода исключения Гаусса-Жордана перейти к улучшенному допустимому решению. Другими словами, в этом методе движение к оптимальной точке происходит по псевдобазисам, т.е. мы получаем симплекс метод внутренних точек или просто "симплекс метод". Метод является параметрическим и конечным.

В силу параметрической природы метода существуют различные варианты выбора направляющих векторов (правила) в смысле их длин и индексов. В данной работе мы предлагаем три правила, которые являются развитием первого правила Данцига, и исследуем их на кубе (задаче) Кли-Минти [3,9]. Показано, что для двух правил число шагов, необходимых для решения задачи Кли-Минти "симплекс методом" требуется $2n$ шагов, а для третьего правила мы получаем обычный симплекс метод с первым правилом Данцига, т.е. эта задача решается за 2^{n-1} шагов.

Ключевые слова: преобразования Гаусса и Грама-Шмидта; критерий оптимальности Данцига; симплекс метод; куб Кли-Минти

Обозначения

Мы используем обозначения, предложенные И. В. Романовским [4].

Здесь $x[N]$ - вектор $x = \{x_i\}$ с индексом i, пробегающим конечное множество N; $x[K]$ - соответствующий K-кусок вектора $x[N]$, где $K \subset N$; $x[i]$ - компонента вектора $x[N]$ с индексом i; $z[i, N]$ - i-я строка матрицы $z[M, N] = \{z_{ij}\}$, а $z[M, j]$ - j-й столбец этой матрицы; $z[K, L]$ - подматрица матрицы $z[M, N]$, где $K \subset M$, $L \subset N$.

Матрицы $a[M,N]$ и $b[K,L]$ могут быть перемножены, если $N = K$.

Кроме того, $o[M,N]$ - матрица, все элементы которой равны нулю; $e[M,M]$ - единичная матрица, т.е. матрица, диагональные элементы которой равны единице, а остальные - нулю. $M = \{1,\dots,m\}$, $N = \{1,\dots,n\}$.

Мы не делаем различий между вектор-строкой и вектор-столбцом.

2 Описание "симплекс метода"

Рассмотрим невырожденную каноническую задачу линейного программирования

$$\text{максимизировать} \quad c[N]x[N] \tag{1}$$

$$\text{при условиях} \quad a[M,N]x[N] = a[M,0], \tag{2}$$

$$x[N] \geq o[N], \tag{3}$$

где $x[N]$ - неизвестный вектор-столбец.

Пусть $a[M,M] = e[M,M]$ и $a[M,0] > o[M]$. Обозначим $M' = \{1,\dots,m,m+1\}$, $N' = \{0,1,\dots,n\}$ и рассмотрим две матрицы

$$a[M',N'] = \begin{bmatrix} a[M,N], & a[M,0] \\ a[m+1,N], & a[0,0] \end{bmatrix}, \quad b[M,N] = \{e[M,M], o[M,N \backslash M]\}.$$

В матрице $a[M',N']$ $(m+1)$-ая строка, т.е. вектор $a[m+1,N']$, является вектором оценок относительно начального базиса $a[M,1],\dots,a[M,m]$. $x[N] = b^T[M,N]a[M,0]$ - начальное базисное допустимое решение задачи (1)-(3).

Опишем переход от s-го шага к $(s+1)$-му, где $s = 1,\dots,s$.

Пусть на s-м шаге мы получили текущие матрицы $d[M',N']$ и $c[M,N]$. При $s = 1$ мы полагаем $d[M',N'] = a[M',N']$ и $c[M,N] = b[M,N]$.

1°. Если относительные оценки $d[m+1,j] \geq 0$ для всех $j \in N$, то

$$x[N] = c^T[M,N]d[M,0]$$

- оптимальное допустимое решение задачи (1)-(3).

2°. Пусть $K = K_1 \cup K_2$ есть некоторое подмножество активных и неактивных столбцов, т.е. $d[m+1,j] < 0$ для всех $j \in K_1$ и $d[m+1,j] = 0$ для всех $j \in K_2$. Определим

$$\theta_f = \frac{d[f,0]}{\|d[f,K_f]\|} = \min_i \frac{d[i,0]}{\|d[i,K_i]\|}$$

для тех i, для которых $d[i,K_i]$ содержит все положительные компоненты вектора $d[i,K]$.

3°. Выбираем направляющий вектор $d[f,K_f]$ и преобразуем элементы матрицы $d[M',N']$ согласно шагу обобщенного метода исключения Гаусса-Жордана.

Полагаем

$$d'[i,N'] = \begin{cases} \frac{d[i,N']}{d[i,K_i]} & \text{при } i = f, \\ d[i,N'] + \alpha_i d'[f,N'] & \text{при } i \neq f, \end{cases}$$

где $\alpha_i = -d[i,K_f]d'[f,K_f]$, $\quad i \neq f$.

4°. Формируем матрицу $c'[M,N]$, которая получается из матрицы $c[M,N]$ заменой строки $c[f,N]$ на строку $c'[f,N]$. Элементы этой строки определяются следующим образом:

$$c'[f,j] = \begin{cases} d'[f,j] & \text{для всех } j \in K_f, \\ o[j] & \text{для всех } j \in N \backslash K_f. \end{cases}$$

Другими словами, строки матрицы $c'[M,N]$ будут

$$\left.\begin{array}{rcl} c'[f,N] & = & \{d'[f,K_f], o[N\backslash K_f]\}, \\ c'[i,N] & = & c[i,N] \ \text{ для всех } i \in M\backslash f. \end{array}\right\}$$

5°. Полагая $d[M',N'] = d'[M',N']$, $c[M,N] = c'[M,N]$ и $s = s+1$, переходим к п.1°.

Замечание. *Если для некоторого* $j_0 \in N$ $\quad d[m+1,j_0] < 0$ *и* $d[M,j_0] \le o[M]$, *то задача* (1)-(3) *неразрешима.*

3 О выборе направляющего правила

"Симплекс метод" является параметрическим методом, и путь к оптимальной точке зависит от выбора длины и индексов направляющего вектора. Здесь возникает задача, поставленная проф. Н.З.Шором: найти такую стратегию выбора направляющих векторов, которая позволяет кратчайшим путем достичь оптимума. В [7,8] было предложено следующее общее правило.

На каждой итерации организуется прямой ход и обратный ход. При прямом ходе число положительных компонент допустимого решения увеличивается, а при обратном ходе - уменьшается. Это правило может быть реализовано различными способами. В данной работе мы предлагаем при прямом ходе выбирать одно из следующих правил.

1. Выбираем активный столбец, который не должен быть псевдобазисным, используя первое правило Данцига, и все неактивные столбцы (напр., единичные столбцы).

2. Выбираем все активные столбцы, которые должны быть не псевдобазисными, и все неактивные столбцы.

3. Выбираем все активные столбцы, которые должны быть не псевдобазисными.

Если число положительных компонент допустимого решения не увеличивается, то мы организуем обратный ход, используя первое правило Данцига.

Заметим, что если при прямом ходе длина направляющего вектора равна единице, то соответствующий столбец на данном шаге не рассматриваем.

4 Исследование направляющих правил на задаче Кли-Минти

Задача Кли-Минти [9] в канонической форме имеет следующий вид:

$$\text{максимизировать} \qquad \sum_{j=1}^{n} 10^{n-j} x_j \tag{4}$$

$$\text{при условиях} \quad 2\sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} x_j + x_i + x_{n+i} = \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} b_j + b_i, \quad i = 1,\ldots,n, \tag{5}$$

$$x_j \ge 0, \qquad\qquad j = 1,\ldots,2n, \tag{6}$$

где $1 = b_1 \ll b_2 \ll \ldots \ll b_n$.

Заметим, что $x = (0,\ldots,0,x_{n+1},\ldots,x_{2n})^T$, где $x_{n+i} = \sum_{j=1}^{i-1} 10^{i-j} b_j + b_i, \quad i = 1,\ldots,n,$ является начальным базисным допустимым решением задачи (4)-(6).

Хорошо известно, что симплекс метод с первым правилом Данцига решает задачу (4)-(6) за 2^{n-1} шагов (см., напр. [9]). Правила 1-3 являются развитием первого правила Данцига, поэтому представляет интерес их исследование на задаче (4)-(6).

Заметим, что здесь в правилах 1 и 2 в качестве неактивых столбцов будем рассматривать только единичные столбцы, т.е. столбцы, у которых одна компонента равна единице, а все остальные равны нулю.

Теорема. *а) Если в "симплекс методе" при прямом ходе используется правило 1, то задача* (4)-(6) *решается за* $2n$ *шагов. При прямом ходе за* n *шагов мы переходим от начального базисного допустимого решения к строго внутренней точке* $x[N] = 1/2(b_1, \ldots, b_n, b_1, \ldots, b_n)^T$ *и проходим первую половину пути, а при обратном ходе за* n *шагов переходим от строго внутренней точки к оптимальному базисному решению и проходим вторую половину пути.*

б) Правила 1 и 2 для задачи (4)-(6) *совпадают.*

в) Если в "симплекс методе" при прямом ходе используется правило 3, то мы получаем обычный симплекс метод с первым правилом Данцига, т.е. задача (4)-(6) *решается за* 2^{n-1} *шагов.*

Доказательство Теоремы нетрудно провести индукцией по n.

Приведем схему доказательства Теоремы для утверждения *а)*.

Мы отталкиваемся от начальной симплексной таблицы задачи (4)-(6).

На первом шаге, согласно правилу Данцига, выбирается первый активный столбец. Так как по условию $b_2 \gg b_1$, то b_2 выбирается таким, чтобы $\theta_1 = \min\limits_i \theta_i$. В результате на первом шаге выбирается направляющий вектор длины 2, т.е. $d[1, K_1] = (d[1,1] = 1, d[1, n+1] = 1)$. После шага обобщенного метода исключения мы получаем текущую систему, в правой части которой, за исключением первого уравнения, отсутствует параметр b_1.

На втором шаге, согласно правилу Данцига, выбирается второй активный столбец. Так как по условию $b_3 \gg b_2$, то b_3 выбирается таким, чтобы $\theta_2 = \min\limits_{i \neq 1} \theta_i$. При $i = 1$ $d[1, K_2] = o[K_2]$, поэтому θ_1 не рассматривается.

Таким образом, на втором шаге выбирается направляющий вектор также длины 2, т.е. $d[2, K_2] = (d[2,2] = 1, d[2, n+2] = 1)$. После шага обобщенного метода исключения мы получаем текущую систему, в правой части которой, за исключением второго уравнения, отсутствует параметр b_2. Продолжая этот процесс, через n шагов мы получаем строго внутреннюю точку.

При обратном ходе на каждом шаге имеется только один активный столбец, который и выбирается согласно правилу Данцига. При этом на $(n+1)$-м шаге направляющим является элемент из n-й строки текущей таблицы, на $(n+2)$-м шаге направляющим является элемент из $(n-1)$-й строки текущей таблицы и т.д.. Через n шагов обратного хода от строго внутренней точки мы переходим к оптимальной точке.

Литература

[1] G. B. Dantzig (1963) *Linear Programming and Extensions.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

[2] Л. В. Канторович (1959) *Экономический расчет наилучшего использования ресурсов.* АН СССР, Москва.

[3] V. Klee and G. J. Minty (1972) *How good is the simplex algorithm?* in: O. Shisha, ed., Inequalities - III, Academic Press, New York, 159-175.

[4] И. В. Романовский (1977) *Алгоритмы решения экстремальных задач.* Наука, Москва.

[5] А. Д. Туниев (1980) *Обобщение методов исключения и полного исключения,* Доклады Академии Наук АрмССР, LXXI, No.3, 141-146.

[6] А. Д. Туниев (1992) *Метод направляющего вектора и его приложения,* Кибернетика и системный анализ, 1, 116-127.

[7] A. D. Tuniev (1997) *Generalized transformation of Gauss and Gram-Schmidt and Simplex Method Development.* Abstract, 16th International Symposium on Mathematical Programming, Lausanne, Switzerland, 272.

[8] К. А. Тунян, *Развитие мультипликативного симплекс метода,* Дискретный Анализ и Исследование Операций, Новосибирск, в печати.

[9] R. J. Vanderbei (1998) *Linear Programming: Foundations and Extensions.* Kluwer Academic Publishers, Boston/London/Dordrecht.