Математические вопросы кибернетик и вычислительной техники 20, 1998, 24–38.

Трековые языки, соответствующие процессам в графах со входами

К. Б. Амбарцумян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА И ЕрГУ

Резюме

В данной работе исследована распознаваемость языков, соответствующих процессам в конвейерном графе со входами. Каждый процесс в конвейере определяет некоторый граф частичного порядка, являющийся подграфом графа развертки. Можно говорить о языке последовательностей вершин графа процесса, которые являются протоколами процесса, сохраняющих причинно-следственные связи между элементарными событиями. В работе построено семейство расширяющихся языков протоколов процессов, являющихся распознаваемыми конечными автомтами.

1. Вводная часть

Рассмотрение графа развертки конвейера позволяет говорить о причинно-следственных связях между элементарными событиями, составляющими процесс. Под элементарным событием понимается при этом преобразование, совершаемое одним из функциональных элементов, составляющих сеть конвейера. В этом смысле каждый процесс в конвейере определяет некоторый граф частичного порядка, являющийся подграфом графа развертки и можно говорить о языке последовательностей вершин графа процесса, сохраняющих причинно-следственные связи между элементарными событиями, которые являются протоколами процесса.

Обратимся теперь к точным определениям.

Определения:

1. Пусть $G=(V_G,E_G)$ – конечный, связный орграф с множеством вершин V_G и множеством дуг E_G. Граф $R(G)=(V_G\times\mathbb{Z},E)$, где $\mathbb{Z}$ множество целых чисел, есть развертка графа G, если $E=\{(w,w')/w=v.t,w'=v'.t+1,t\in\mathbb{Z},(v,v')\in E_G\}$.

2. Подмножество $p=(V_p,E_p)\subset(V_G\times\mathbb{Z},E)$ называется процессом в графе G, если $w=v.t\in V_p$ тогда и только тогда, когда $\uparrow w=\{v'.t-1/(v',v)\in E_G\}$ для всех $w\in V_G\times\mathbb{Z}$, $\uparrow w\neq\varnothing$.

3. Пусть $S=(V_S,E_S,\lambda_S)$ – произвольный, помеченный, ациклический орграф, где $\lambda_S:V_S\to A$. Языком соответствующим графу S будем называть язык $L(S)$ в алфавите меток A, состоящий из всех слов $l=a_1a_2...a_{|V_S|}\in A^*$ таких, что существует последовательность вершин графа S $v_1,...,v_{|V_S|}$, не противоречащая частичному порядку, определяемому графом S, и такая, что $\lambda_S(v_i)=a_i$ для $i=1,...,|V_S|$.

4. Рассмотрим произвольный орграф $G=(V_G,E_G)$ и множество всех его процессов $P(G)$. Пусть $p=(V_p,E_p)\subset R_G=(V_G\times\mathbb{Z},E_R)$ – произвольный процесс из множества $P(G)$. Определим на вершинах R_G функцию λ_p следующим равенством: $\lambda_p(v,t)=v$. Рассмотрим помеченный граф $p'=(V_p,E_p,\lambda_p)$, для которого определен язык $L(p')$, соответствующий графу p'. Языком $L(p)$, соответствующим процессу p, будем называть $L(p)=L(p')$.

5. Пусть $Y\subseteq P(G)$. Языком $L(Y)$, соответствующим множеству процессов Y, будем называть $L(Y)=\bigcup_{p\in Y}L(p)$.

6. Граф $G=(V_G,E_G)$ называется графом со входами, если множество $X(G)=\{v\ /\ v\in V_G,\ v$ не имеет заходящих дуг$\}$ не пустое.

При исследовании языков процессов мы применяем следующую методику. Каждый язык процессов в графе представляется в виде языка в частично-коммутативном моноиде треков. Это делает возможным применение аппарата широко развитой теории треков.

Приведем необходимые определения из теории треков.

Определения:

1. Конечным алфавитом зависимости назовем пару (V,D), где V конечное множество (конечный алфавит), а $D\subseteq V\times V$ рефлексивное, симметричное отношение (отношение зависимости).

2. Пусть (V,D) – конечный алфавит зависимости и $=_I$ –отношение эквивалентности на V^* (множестве всех слов в алфавите V), которое определяется всеми парами $(uabv,\ ubav)$, где $u,v\in V^*$ è $(a,b)\in I=V\times V\backslash D$. Если $=_I$ является конгруенцией, делящей моноид $M(V,D)$, с операцией конкатенации (определение конкатенации будет дано ниже) и единицей (пустое слово в алфавите V), на множество классов конгруенции, $M(V,D)$ называют частично – коммутативным моноидом.

3. Графом зависимости (треком) в конечном алфавите зависимости (V,D) называется помеченный ациклический граф $[U,E,\lambda]$, где U – множество вершин, $E\subseteq U\times U$ множество дуг, $\lambda:U\to A$ метящая функция, такая что $E\cup E^{-1}\cup idU=\lambda^{-1}(D)$.

4. Трек $[U,E,\lambda]$ является реальным, если $\downarrow f=\{q\in U\,/\,q\leq f\}$ (где $q\leq f$, если существует путь из q в f) является конечным для всех вершин f из U.

5. Множество всех графов зависимости для данного алфавита зависимости (V,D) обозначим через $\mathbb{M}(V,D)$.

6. Множество всех реальных треков для данного алфавита (V,D) обозначим через $\mathbb{R}(V,D)=\mathbb{R}$.

7. Конкатенация (произведение) двух графов зависимости определяется следующим образом. Пусть имеются два графа зависимости $[U_1,E_1,\lambda_1]$ и $[U_2,E_2,\lambda_2]$. Говорят, что $[U,E,\lambda]$ является конкатенацией (произведением)

графов зависимости $[U_1,E_1,\lambda_1]$ и $[U_2,E_2,\lambda_2]$ (обозначим $[U_1,E_1,\lambda_1]\circ[U_2,E_2,\lambda_2]=[U,E,\lambda]$), если $[U,E,\lambda]$ является объединением $[U_1,E_1,\lambda_1]$ и $[U_2,E_2,\lambda_2]$, вместе с новыми дугами (g_1,g_2) для всех вершин $g_1\in U_1$, $g_2\in U_2$ таких что $(\lambda_1(g_1),\lambda_2(g_2))\in D$.

8. Любое подмножество множества всех классов конгруенции $=_I$ на частично –коммутативном моноиде $M(V,D)$ называют трековым языком в моноиде $M(V,D)$.

Обектами иследования в данной главе будут языки соответствующие множествам процессов в конвейерных графах со входами и вопросы их распознаваемости конечными автоматами.

Рассмотрим орграф произвольного конвейера $G=(V_G,E_G)$ со входами $X(G)$ и множество его конечных процессов $P^+(G)$. Каждый процесс $p=(V_p,E_p)\in P^+(G)$ является конечным, ациклическим графом, подграфом графа развертки $R_G=(V_G\times\mathbb{Z},E_R)$. Рассмотрение помеченного графа $p'=(V_p,E_p,\lambda_p)$ приводит нас к графу, для которого определен язык $L(p')$, соответствующий графу p'. Очевидно, что если процессы p_1' и p_2' изоморфны как графы, то $L(p_1)=L(p_2)$.

Заметим, что язык $L(p)$ можно интерпретировать в духе Хоара[1], как множество протоколов процесса p.

Входами графа конвейера $G=(V_G,E_G)$ будем называть множество его вершин $X(G)$ не имеющих заходящих дуг.

Обозначим $L(P^+(G))=\bigcup\limits_{p\in P^+(G)} L(P)$. Как известно [2], этот язык является нераспознаваемым с помощью конечных автоматов, если G – связный граф, $|V_G|\geq 2$ и $X(G)\neq\varnothing$. , т.е. G – граф со входами.

Нас интересует вопрос: можно ли сопоставить каждому процессу p семейство бесконечных языков, зависящих от параметра N такое, чтобы выполнялись условия:

1. $L_N(p)\subseteq L(p)$

2. $L_N(p)\neq\varnothing$

3. Язык $L_N(P^+(G))=\bigcup\limits_{p\in P^+(G)} L_N(P)$ распознаваем конечными автоматами

4. При достаточно большом N язык $L_N(P^+(G))=\bigcup\limits_{p\in P^+(G)} L_N(P)$ сколь угодно близок к языку $L(P^+(G))$.

В главе получен положительный ответ на этот вопрос, а именно, указано семейство бесконечных языков $L_N(p)$, зависящих от параметра N такое, что

$$\varnothing\neq L_1(p)\subseteq L_2(p)\subseteq L_3(p)\ldots$$

и для каждого слова $l\in L(P^+(G))$ найдется такое N, что $l\in L_N(P^+(G))$.

Ввиду того, что процессы можно считать помеченными графами частичного порядка, для исследования языков, соответствующих процессам, естественно воспользоваться теорией треков, также являющихся помеченными графами частичного порядка определенного вида.

Определим теперь переход от процессов к трековым языкам. Для рассматриваемого графа $G=(V_G,E_G)$ определим алфавит зависимости (V_G,D_G), где $D_G=\{(v,v') \mid (v,v')\in E_G$ или $(v',v)\in E_G\}$. Легко видеть, что язык $L(P^+(G))$ можно представить как язык в моноиде $\mathbb{M}(V_G,D_G)$. Рассмотрим отображение $H:p\rightarrow 2^{\mathbb{M}(V_G,D_G)}$ такое, что трек

$t=(V_t,E_t)$ принадлежит трековому языку тогда и только тогда, когда $H(p)$ является подграфом p, т.е.

$$t=(V_t,E_t)\in H(p) \Leftrightarrow V_t=V_p,\ E_p\subset E_t$$

Тогда $L(P^*(G))= \bigcup\limits_{p\in P^*(G)} H(p)$

Язык $H(p)$ будем называть трековым языком, соответствующим процессу p.

Пусть $\mathcal{P}\subset P^*(G)$. Тогда $H(\mathcal{P})=\bigcup\limits_{p\in\mathcal{P}}\mathrm{H(p)}$ будем называть трековым языком, соответствующим множеству процессов $\mathcal{P}$.

Известно, что язык $H(P^*(G))$ нераспознаваем конечным автоматом, если G односвязный граф и $X(G)\neq\varnothing$. Поэтому нашей целью будет построить отображение $T_N:p\to 2^{M(V_0,D_0)}$ такое, что $T_N(p)\neq\varnothing$ и

$$t=(V_t,E_t)\in T_N(p) \Rightarrow V_t=V_p,\ E_p\subset E_t$$

тоесть будем ставить в соответствие процессу p лишь некоторое подмножество $T_N(p)$ языка $H(p)$, $T_N(p)\subseteq H_N(p)$.

Наша ближайшая задача построить такой трековый язык T_N, чтобы язык $\dot{O}_N(P^*(G))= \bigcup\limits_{p\in P^*(G)}\mathrm{T_N(P)}$ был распознаваем.

2. Трековые языки, соответствующие процессам в графах, удовлетворяющих условию этажности

Рассмотрим класс графов, который удовлетворяет условию этажности (назовем их этажными графами).

Очевидно, что каждому процессу p однозначно соответствует подграф развертки, натянутый на вершины множества p. Далее, говоря о процессах, будем иметь ввиду как множество вершин, так и соответствующий подграф, что позволит нам воспользоватся обозначением $p=(V_p,E_p)$.

Пусть $G=(V_G,E_G)$ конечный, связный орграф с множеством вершин V_G и множеством дуг E_G, и пусть $\mathbb{V}(G)=\{V_i\ /\ i=1,..,k(\mathbb{V})\}$ есть произвольное разбиение множества вершин V_G, где $k(\mathbb{V})$ есть число классов в разбиении $\mathbb{V}(G)$. Через $V_i.t$, для любого $t\in\mathbb{Z}$, обозначим множество $V_i.t=\{v.t/\ v\in V_i\}\subset R(G)$.

Теорема1.

Развертка $R(G)$ для односвязного графа G имеет счетное множество компонент связности тогда и только тогда, когда граф G удовлетворяет следующему условию этажности:

существует разбиение $\mathbb{V}(G)$ множества вершин V_G такое, что для всех $v\in V_i$ из $(v,v')\in E_G$ следует, что $v'\in V_{i+1}$, а для $(v'',v)\in E_G$ следует, что $v''\in V_{i-1}$.

Тогда

$$\mathcal{W}=\{\ \mathrm{W}_t(G,\mathbb{V}) = \bigcup_{i=1}^{k(\mathbb{V})} V_i.t+i-1/\,t\in Z\,\},$$

есть множество всех компонент связности $R(G)$, и каждое $W_t(G,\mathbb{V})$ есть компонента связности графа $R(G)$.

Пример 1.

В качестве примера рассмотрим граф G (рис.1). этот граф удовлетворяет условию этажности. Для него $V_1=\{a,b\}$, $V_2=\{c\}$, $V_3=\{d,f\}$ и $k(\mathbb{V})=3$ (рис.2). На рис. 3 представлен граф $W_0(G,\mathbb{V})$.

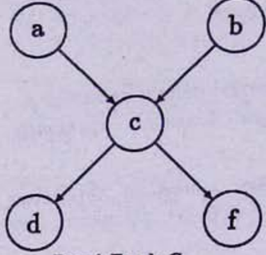

Рис.1 Граф G.

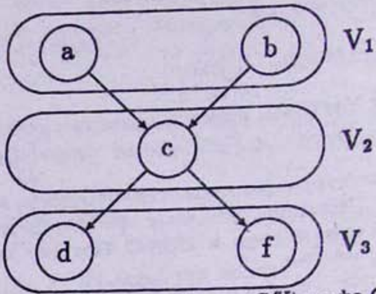

Рис.2 Классы разбиения $G(\mathbb{V})$ графа G.

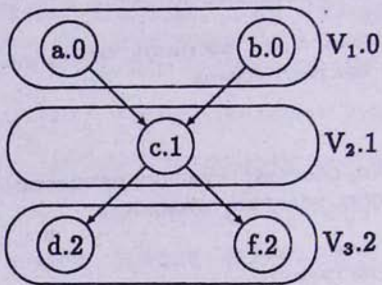

Рис. 3. Граф $W_0(G,\mathbb{V})$.

Определение.

Множества (прцессы) $p,p'\subseteq V_G\times\mathbb{Z}$ подобны, если существует такое $\tau\in\mathbb{Z}$, что $p'=\{v.t+\tau\,/\,v.t\in p\}$. Очевидно, что отношение подобия есть эквивалентность на $P(G)$.
Докажем предварительно следующие утверждения:

Утверждение 1.

Если односвязный граф G таков, что $R(G)$ имеет счетное множество компонент связности, то каждая компонента связности $R(G)$ конечна.

Доказательство.

Из определения $R(G)$ следует, что все компоненты связности $R(G)$ попарно подобны и периодичны.

Пусть R_0 - бесконечная компонента связности $R(G)$. Тогда существует такая вершина $v\in V_G$ и такие $t',t''\in\mathbb{Z}$, что $v.t'$ и $v.t''$ принадлежат R_0. Вследствие периодичности R_0 выполняется: $\{v.t\,/\,t=t'(\mathrm{mod}\,|t'-t''|)\}\subset R_0$. Следовательно, могут существовать не более $|t'-t''|$ компонент связности $R(G)$.

Доказательство теоремы 1.

Пусть $R(G)$ имеет счетное множество компонент связности. Докажем, что G удовлетворяет условию этажности.

Рассмотрим произвольную компоненту связности W. Согласно утверждению 1 компонента связности W - конечна. Тогда обозначим

$$t_{min}=min\{t\,/\,v.t\in W\},\ T_{max}=max\{t\,/\,v.t\in W\},\ \text{и}\ k=T_{max}-t_{min}.$$

Построим множества

$V_0=\{v\,/\,v.t_{min}\in W\}$,

$V_1=\{v\,/\,v.t_{min}+1\in W\}$,

$V_2=\{v\,/\,v.t_{min}+2\in W\}$,

$V_{k\text{-}1}=\{v\,/\,v.T_{max}\in W\}$.

Очевидно, что $V_G=V_0\cup V_1\cup...\cup V_{k\text{-}1}$. Более того, $V_i\cap V_j=\varnothing$ если $i\neq j$, так как по доказательству утверждения1 из $v.t',v.t''\in W$ следует $t'=t''$. По определению $R(G)$ это разбиение обладает нужными свойствами, откуда следует, что G удовлетворяет условию этажности.

Доказательство существования счетного множества компонент связности для графов $G=(V_G,E_G)$, удовлетворяющих условию этажности очевидно следует из определения $R(G)$.

Следствие 1.

$\mathscr{W}$ - класс смежности отношения подобия в $P(G)$.

Следствие 2.

$W_t(G,V)\cong G$.

Доказательства непосредственно следуют из Теоремы 1.

Перейдем к вопросу распознаваемости языков, соответствующих процессам в графе, удовлетворяющие условию этажности.

Пусть $G=(V_G,E_G)$-конечный, ациклический, связный орграф, удовлетворяющий условию этажности, то есть для G существует такое разбиение вершин графа $V(G)=V_1,V_2,...,V_{k(V)}$, что множество

$$\mathscr{W}=\{W_t(G,\mathbb{V})=\bigcup_{i=1}^{k(\mathbb{V})}V_i.t+i-1\,/\,t\in\mathbb{Z}\}$$

есть множество всех компонент связности в $R(G)$. Вначале рассмотрим множество $K(G)$ процессов, состоящих из конечного числа целых компонент развертки, тоесть множество

$$K(G)=\{\ p_{t_1\ldots t_n}=\bigcup_{i=1}^{n}W_{t_i}(G,\mathbb{V})\,/\,n\in N,t_i<t_{i+1},t_i\in Z\}.$$

Пусть $p_{t_1\ldots t_n}=(V_p,E_p)\in K(G)$ и $p'_{t_1\ldots t_n}$ – соответствующий помеченный граф. Очевидно, что $p'_{t_1\ldots t_n}\cong p'_{t'_1\ldots t'_n}$ при любых наборах $t_1<...<t_n$ и $t'_1<...<t'_n$ одинаковой длины. Следовательно граф $p'_{t_1\ldots t_n}$ определяется только параметром n и мы в дальнейшем всегда вместо $p'_{t_1\ldots t_n}$ будем писать p'_n и вместо W'_{t_i} будем писать W'.

Очевидно, что $p'_1=W'(G,\mathbb{V})\in M(V_G,D_G)$, то есть является треком. Но $p'_n=\bigcup_{i=1}^{n}W'(G,\mathbb{V})$ для $n\geq 2$ уже не является графом зависимости, так как в p'_n отсутствуют некоторые дуги между вершинами вида (g_1,g_2), где $(\lambda_1(g_1),\lambda_2(g_2))\in D$. Например (продолжая пример1), в графе $p'_{0,1}$ (рис. 4) отсутствуют дуги между вершинами $a.0$ и $a.1$, $b.0$ и $b.1$, $c.0$ и $c.1$ . . . .

Для того, чтобы дополнить p'_n до графа зависимости, то есть чтобы сопоставить процессу p_n трек, нужно провести дополнительные дуги (мы их назовем нефундаментальными). Сделать это возможно различными способами. Применение всех возможных способов приводит к трековому языку $H(p'_n)$. Рассмотрим сначала следующее отображение $T_c(p_n)$:

$$T_c(p_n)=W'(G,V)\circ\_\ {}_{n\text{-}1}\ \_\circ W'(G,V).$$

Тоесть нефундаментальные дуги определяются конкатенацией треков

Утверждение 2.

Для каждого n язык $T_c(p_n)$ распознаваем конечным автоматом.

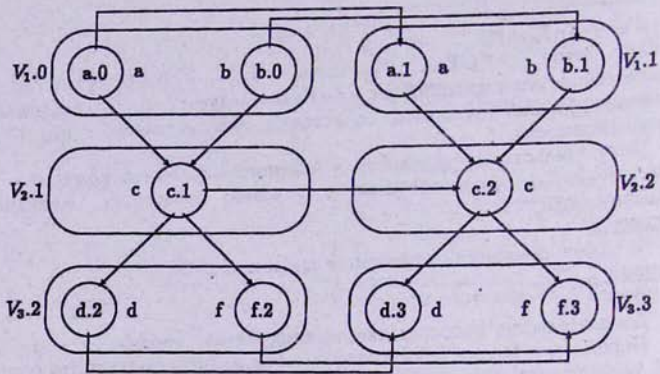

Рис. 4. Граф $p'_{0,1}$.

Следствие 3.

Язык $(W')^*$ – распознаваемый трековый язык, где * – знак итерации.

Доказательство.

Так как W' – конечный граф зависимости, то он распознаваем конечным автоматом. По определению он является связным графом. Из следствия 2.2.6 [3] вытекает, что $(W')^*$ распознаваемый трековый язык.

Следствие 4.

Рассмотрим отображение $T_c{:}K(G)\to 2^{M(V_0,D_0)}$, где $T_c(p_n)=(W')^n$. Тогда язык $T_c(K(G))$ - распознаваемый трековый язык.

Заметим, что язык $T_c(K(G))$ удовлетворяет нашим условиям 1-3, но не удовлетворяет условию 4.

Как уже отмечалось, граф $p'_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n} W'(G,V)$ $(n\in Z,\ t_i<t_{i+1})$ не всегда является треком из-за отсутствия нефундаментальных дуг. Разные способы добавления этих дуг (очевидно, что их конечное количество для данного n) приводят к возникновению различных треков и эти способы определяют различные отображения $T{:}p\to 2^{M(V_0,D_0)}$. Напомним, что нашей задачей является нахождение таких отображений T, которые приводили бы к распознаваемым языкам, удовлетворяющим всем условиям 1-4.

Продолжим построение для множества процессов $K(G)$ в этажных графах.

Разделим процесс добавления в p'_n нефундаментальных дуг на два этапа.

<u>1-ый этап.</u> На этом этапе к графу p'_n будут добавлены дуги, не меняющие языка $L(p'_n)$, то есть будет построен некоторый граф s_n такой, что $L(s_n)=L(p'_n)$.

Зафиксируем произвольный порядок на n копиях графа W'. На этом этапе добавляются только те нефундаментальные дуги (g_1,g_2), которые не нарушают этого порядка, то есть все те дуги, для которых $g_1\in W'_i$, $g_2\in W'_{i+1}$ $(i=1,\dots,n\text{-}1)$ и $\lambda(g_1)=\lambda(g_2)$. Полученный в результате граф обозначим через s_n. Граф s_n также не обязательно является треком, так как в нем проведены не все недостающие нефундаментальные дуги. Например (продолжая пример 1), после добавления нефундаментальных дуг на

1-ом этапе граф $p'_{0,1}$ (рис. 4) преобразуется в граф s_2 (рис. 5), а все еще отсутствующие дуги между вершинами $c.1$ и $a.1$, $c.1$ и $b.1$, $d.2$ и $c.2$, $f.2$ и $c.2$.

Определение

Пусть F – произвольный граф зависимости и $F_1 \circ F_2$ есть произвольное разложение графа $F: F=F_1 \circ F_2$. Тогда F_1 называется префиксом F и множество всех префиксов F обозначается через $pref(F)=\{F_1 \,/\, \exists F_1: F=F_1 \circ F_2\}$.

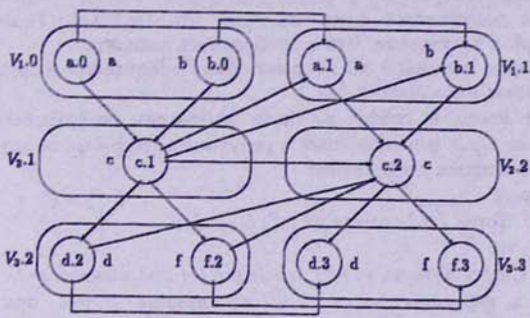

Рис. 5. Граф s_2.

Рассмотрим p'_n и s_n. Если через $|p'_n|$ (соответственно $|s_n|$) обозначим число вершин графа p'_n (соответственно s_n), а через $|p'_n|_a$(соответственно $|s_n|_a$) число вершин графа p'_n (соответственно s_n) помеченных меткой a, то очевидно что:

1. Для произвольных $a,b \in V_G$(множество меток), верно что
   a) $|p'_n|=|s_n|=n \cdot |V_G|$
   b) $|p'_n|_a=|s_n|_a=n$
2. Для произвольного префикса F графа s_n и для произвольных меток a и b, из $a \geq b$ в графе G (будем писать $a \geq b$, если есть дуга из b в a) следует, что $|F|_a \geq |F|_b$.

Метод добавления нефундаментальных дуг на первом этапе хорош тем, что не приводит к изменению языка $L(p_n)$. Более того, изменение направления хотя бы одной нефундаментальной дуги в графе s_n (обозначим такой граф через f_n) привело бы к уменьшению языка $L(s_n)$, тоесть тогда уже $L(s_n) \supset L(f_n)$.

Верно следующее:

Утверждение3.

$L(p'_n)=L(s_n)$ и более того $L(p'_n) \supset L(f_n)$ (здесь имеется ввиду собственное включение).

Доказательство.

По определению, в графе s_n дуги между W'_i и W'_{i+1} имеют одинаковое направление (из W'_i к W'_{i+1}). Докажем, что из добавленных нефундаментальных дут, скажем (g_1,g_2) направлена от W'_{i+1} к W'_1, а дуга (g_k,g_l) из W'_i к W'_{i+1}. При этом дуга (g_1,g_l) принадлежит графу W'_{i+1}, а дуга (g_2,g_k) - графу W'_i. Пусть графы s_n и f_n отличаются только дугами, связывающими вершины g_1,g_2. Очевидно, что вершины g_1,g_2 могут расположиться:

1. в последовательности вершин графа s_n двумя разными способами:

a) $\ldots g_2 \ldots g_1 \ldots g_k \ldots g_l \ldots$

b) $\ldots g_2 \ldots g_k \ldots g_1 \ldots g_l \ldots$

2. в последовательности вершин графа f_n однозначным образом:

$\ldots g_l \ldots g_2 \ldots g_k \ldots g_l \ldots$

После замены вершин метками в графе s_n, мы получим последовательности слов в алфавите V_G

a) $\ldots \grave{a} \ldots \grave{a} \ldots b \ldots b \ldots$

b) $\ldots a \ldots b \ldots a \ldots b \ldots$

а для графа f_n только последовательность

$\ldots a \ldots b \ldots a \ldots b \ldots$

Обобщая полученный факт, получим, что $L(s_n) \supset L(f_n)$. Причем здесь имеется ввиду собственное включение. Что и требовалось доказать.

Прежде чем перейдем ко второму этапу добавления нефундаментальных дуг, сделаем некоторые наблюдения.

На 1-ом этапе к графу p'_n были добавлены нефундаментальные дуги, не меняющие языка $L(p'_n)$, и полученный в результате граф был обозначен через s_n. Граф s_n обладает следующими свойствами:

1. s_n связный граф.
2. Пусть $t \in H(p_n)$. Тогда $L(s_n)$ содержит $L(t)$: $L(s_n) \supset L(t)$
3. Если $(v, \sqrt{}) \in V_G$ то:
   a) В графе s_n есть путь из $v.i$ $(i=1,\ldots,n-1)$ в $\sqrt{}.i+j$ при каждом $j=1,\ldots,n-j$.
   b) В графе s_n вершины $v.i$ и $\sqrt{}.i-j$ не связаны путем при каждом $j=1,\ldots,i-1$, следователно, далее пойдет речь о добавлении дуг именно между такими вершинами.
4. Рассмотрим s_n. Пусть $(v, \sqrt{}) \in E_G$ и $i<j$, тоесть нет пути, связывающего $v.j$ и $\sqrt{}.i$. Тогда:
   a) Если к графу s_n добавить дугу $(\sqrt{}.i, v.j)$, то следствием являются транзитивные дуги $(\sqrt{}.i-\varepsilon, v.j+\delta)$ для всех $\varepsilon=1,\ldots,i-1$, $\delta=1,\ldots,n-j$.
   b) Если к графу s_n добавить обратную дугу $(v.j, \sqrt{}.i)$, то следствием являются транзитивные дуги $(v.j-\delta, \sqrt{}.i+\varepsilon)$ для всех $\varepsilon=1,\ldots,n-i$, $\delta=1,\ldots,j-1$.

Теперь перейдем ко второму этапу добавления нефундаментальных дуг и это добавление уже будет выполняться применительно к графу s_n.

Нас интересуют только такие способы проведения нефундаментальных дуг, которые не приводят к образованию циклов. Если допустить все возможные способы независимого проведения дуг, указанных в Свойстве 3, то обязательно возникнут циклы. А именно, если $i_1<i_2<i_3<i_4$, то одновременное добавление дуг $(\sqrt{}.i_2, v.i_3)$ и $(v.i_4, \sqrt{}.i_1)$ приведет к появлению цикла $(v.i_3, v.i_4)$, $(v.i_4, \sqrt{}.i_1)$, $(\sqrt{}.i_1, \sqrt{}.i_2)$, $(\sqrt{}.i_2, v.i_3)$. Отсюда следует, что при добавнении дуг следует руководствоваться следующим правилом:

Если $i_1<i_2<i_3$ и уже добавлена дуга $(v.i_3, \sqrt{}.i_1)$, то дуга $(\sqrt{}.i_2, v.i)$ может быть добавлена только для $i>i_3$.

Отсюда вытекает следующее утверждение.

Обозначим через $G_{(a,b)}$ орграф $G_{(a,b)}=(V_{G_{(a,b)}}=\{a,b\}, E_{G_{(a,b)}}=\{(a,b)\})$ (Рис 6).

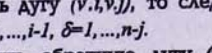

Рис. 6. Граф $G_{(a,b)}$.

Утверждение 4.

1. Процессу p_n в графе $G_{(a,b)}$ соответствует язык

$$L(p_n)=H(p_n) \stackrel{\text{def}}{=} H(n,a,b) \in \mathbb{M}(V_{G_{(a,b)}}, D_{G_{(a,b)}}),$$

состоящий из всех треков t, удовлетворяющих усовиям:

a) $|t|_a=|t|_b=n$

b) Для каждого $t' \in pref(t)$ выполняется $|t'|_b \geq |t'|_b$.

2. Пусть G - произвольный граф со свойством этажности и пусть $p_n \in K(G)$. Тогда процессу p_n соответствует язык $H(p_n) \subset \mathcal{M}(V_G, D_G)$ такой, что $t \in H(p_n)$ тогда и только тогда, когда для каждой дуги $(v, v') \in E_G$ проекция трека t на алфавит $\{v, v'\}$ принадлежит языку $H(n, v, v')$.

Пример.

Рассмотрим граф G из примера1 и процесс p_2 графа G (Рис. 7). Пусть $t_0 \in H(p_2)$ (Рис. 8), тогда очевидно что проекция t_0 на скажем $G_{(a,c)}$ есть $t_1 \in H(2,a,c)$ (Рис. 9).

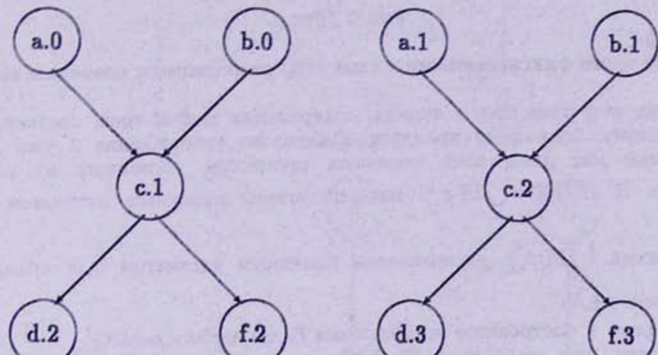

Рис. 7 Процесс p_2 графа G.

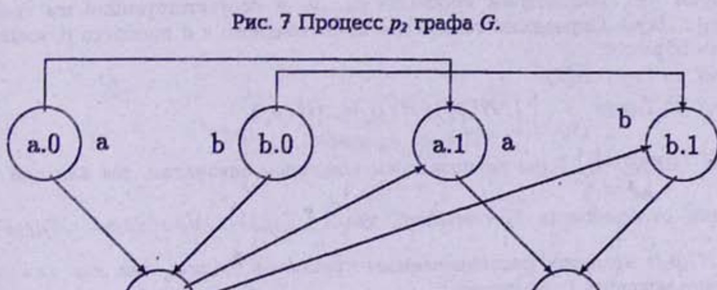

Рис. 8 Трек t_0.

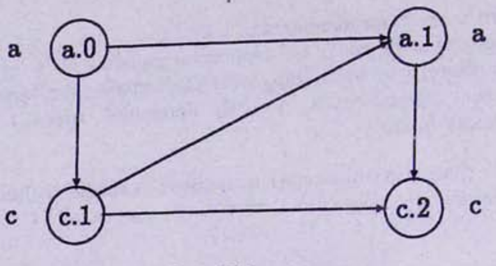

Рис. 9 Трек t_1.

Следствие 5.

Для каждого фиксированного n язык $H(p_n)$ распозноваем конечным автоматом.

До сих пор речь шла о языках, содержащих любой трек, соответствующий фиксированному конечному процессу. Однако из утверждения 5 уже ясно, что интересующий нас язык всех конечных процессов, состоящих из компонент, изоморфных G, $H(K(G))=\bigcup_n H(p_n)$ нераспознаваем конечным автоматом. Однако, например, язык $\bigcup_{n=1}^{N} H(p_n)$ распознаваем конечным автоматом (для произвольного фиксированого $N\in\mathbb{N}$).

Перейдем к построению отображения T_N для любого $p_n\in K(G)$.

Допустим, что задан граф $G=(V_G,E_G)$, удовлетворяющий условию этажности. Зафиксируем $N\geq 1$. Рассмотрим процессы $p_1,\ldots,p_N$ и соответствующие им трековые языки $H(p_1),\ldots,H(p_N)$. Определим теперь для произвольного n и процесса p_n язык $T_N(p_n)$ следующим образом:

1. Если $n\leq N$, то $T_N(p_n)=H(p_n)$.
2. Если $n>N$, то $T_N(p_n)=\bigcup_{i_1+i_2+\ldots+i_r=n,\ i_r\leq N} H(p_{i_1})\circ H(p_{i_2})\circ\ldots\circ H(p_{i_r})$.

Тогда язык $T_N(K(G))=\bigcup_n T_N(p_n)$ распознаваем конечным автоматом, так как при таком определении отображения T_N очевидно, что $\bigcup_n T_N(p_n)=(T_N(p_1)\cup T_N(p_2)\cup\ldots\cup T_N(p_N))^*$, где $(T_N(p_1)\cup\ldots\cup T_N(p_N))$ является распознаваемым трековым языком, так как каждый из треков, принадлежащих $T_N(p_i)$ связан.

Утверждение 5.

Язык $T_N(K(G))=\bigcup_{n\in Z,\ p_n\in K(G)} T_N(p_n)$ распознаваем конечным автоматом.

$T_N(K(G))\subset T_{N+1}(K(G))$ и для каждого слова $l\in L(K(G))$ существует N такое, что $l\in L_N(K(G))$.

Итак, нами построено семейство языков, удовлетвоющих условиям 1-4, но только таким, где множество $P^+(G)$ всех конечных процессов заменено на множество $K(G)$.

До сих пор исследовались только процессы принадлежащие множеству $K(G)$. Возникает вопрос о произвольных конечных процессах множества $P^+(G)$. Покажем, что аналогичные результаты можно сформулировать для процессов, принадлежащих множеству $P^+(G)$.

Рассмотрим все возможные различные подпроцессы графа W' с точностью до изоморфизма помеченных графов и обозначим их через $A_1,\ldots,A_s$. Будем называть их элементами графа G. Заметим, что если элемент A_i состоит из нескольких компонент связности, то каждая из этих компонент также является элементом. Мы будем рассматривать только множество $A=\{A_1,\dots,A_k\}$ односвязных элементов.

Пример.

Для графа G (Рис. 10), элементами являются графы A_1, A_2, A_3 (Рис. 11) и процессу p (Рис. 12) тогда сопоставляется последовательность $A(p)=(A_1; A_2; A_3)$.

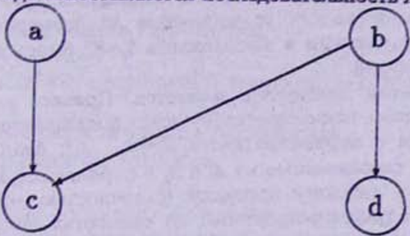

Рис 10 Граф G.

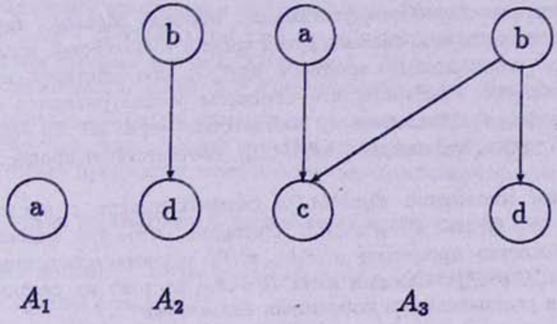

Рис 11. Элементы графа G.

Рис. 12 Процесс p.

Множество всех треков $H(p)$, соответствующих процессу p, полностью пределяется последовательностью элементов $A(p)$. Очевидно, что если p и p'

процессы в графе G (Рис. 10), которым соответствуют последовательности $(A_3; A_2; A_1)$ и $(A_1; A_2; A_3)$, то вообще говоря, $H(p)\neq H(p')$. Очевидно, например, что $H(p)$ содержит такой трек, в котором c может быть после одного a, а $H(p')$ такого трека не содержит.

Отметим трудность, возникающую при переходе от множества процессов $K(G)$ к множеству $P^+(G)$. Любой процесс $p\in K(G)$ описывался последовательностью изоморфных графов W и процессы могли отличаться друг от друга лишь числом элементов в последовательности (с точностью до изоморфизма графов). Граф S_n получался обязательно связным и выполнялось $S_n=W^n$ (здесь имеется ввиду операция конкатенация над треками).

В новой ситуации положение меняется. Процесс $p\in P^+(G)$, вообще говоря, описывается некоторым подмножеством всех последовательностей элементов, а точнее говоря, треком с алфавитом меток $A=\{A_1,\dots,A_s\}$. Дело здесь в том, что если $A_i\cap A_j=\varnothing$, то процессы составленные из A_i и A_j в порядке A_iA_j или A_jA_i изоморфны как графы. Следовательно, каждому процессу (с точностью до изоморфизма графов) будет соответствовать трек, построенный на элементах этого процесса. Возможно, что соответствующий граф $S(p)$ будет многосвязным.

Уточним все сказанное.

Рассмотрим частично-коммутативный моноид $\mathbb{M}(A,D_A)$, где D_A алфавит зависимости такой, что A_i и A_j связаны дугой тогда и только тогда, когда $A_i\cap A_j=\varnothing$.

Очевидно, что каждому процессу $p\in P^+(G)$ соответствует некоторый трек $t(p)\in\mathbb{M}(A,D_A)$ и обратно. Напомним, что процессы рассматриваются с точностью до изоморфизма графов p'. Обозначим это соответствие через $\varphi: P^+(G)\rightarrow\mathbb{M}(A,D_A)$.

Очевидно также, что каждому $t\in\mathbb{M}(A,D_A)$ соответствует процесс $p=\varphi^{-1}(t)$ и язык $L(p)$.

Рассмотрим множество $\Phi_N\subset\mathbb{M}(A,D_A)$ связных треков с числом вершин, не превосходящим N. Пусть $\Phi_N=\{F_1,\dots,F_s\}$. Очевидно, что это множество конечно. Рассмотрим множество процессов $\varphi^{-1}(F_1),\dots,\varphi^{-1}(F_s)$ и соответствующие им трековые языки $H(\varphi^{-1}(F_1)),\dots,H(\varphi^{-1}(F_s))$. Каждый язык $H(\varphi^{-1}(F_i))$ состоит из связных треков. Эти языки конечны и распознаваемы конечными автоматами.

Для произвольного процесса $p\in P^+(G)$ и $\varphi(p)$ построим разложение $\varphi(p)=F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\dots\circ F_{i_k}$, где $F_{i_j}\in\Phi_N$. Очевидно, что такое разложение неоднозначно. Рассмотрим все допустимые разложения. Процессу p поставим в соответствие язык

$$T_N(p)=H(\varphi^{-1}(F_{i_1}))\circ H(\varphi^{-1}(F_{i_2}))\circ\dots\circ H(\varphi^{-1}(F_{i_k}))\ -$$

конечно-автоматный язык.

Рассмотрим теперь язык $(F_1\vee F_2\vee\dots\vee F_s)^*\subset\mathbb{M}(A,D_A)$, который является конечно-автоматным, ввиду связности треков $F_1,\dots,F_s$.

Докажем равенство

$$T_N(P^+(G))=\bigcup_{p\in P^+(G)}T_N(p)=(H(\varphi^{-1}(F_1))\cup H(\varphi^{-1}(F_2))\cup\dots\cup H(\varphi^{-1}(F_s)))^*$$

Дествительно, если некоторый трек t принадлежит итерации, то t имеет вид $t_{i_1}\circ t_{i_2}\circ\dots\circ t_{i_k}$, где каждый трек t_{i_j} принадлежит одному из языков $H(\varphi^{-1}(F_1)),H(\varphi^{-1}(F_2)),\dots,H(\varphi^{-1}(F_s))$.

Пусть $t_{i_j}\in H(\varphi^{-1}(F_{i_j}))$. Тогда треку $F=F_{i_1}\circ F_{i_2}\circ\dots\circ F_{i_k}$ соответствует процесс $p=\varphi^{-1}(F)$, то есть $t\in T_N(p)$ и следовательно, $t\in T_N(P^+(G))$.

Обратное вложение очевидно.

Поскольку каждый трек, принадлежащий $H(\varphi^{-1}(F_i))$ связен, то $T_N(P^+(G))$ – конечно-автоматный язык.

Итак, мы имеем:

Теорема 2.

Для каждого графа $G=(V_G,E_G)$ со свойством этажности существует отображение $T_N:p\to 2^{M(V_G,D_G)}$ такое, что

1. Бесконечный язык $\dot{O}_N(P^+(G))=\bigcup_{p\in P^+(G)}T_N(P)$ распознаваем конечным автоматом
2. Для каждого $p\in P^+(G)$ имеет место $T_N(p)\cap H(p)\neq\varnothing$.
3. $\dot{O}_N(P^+(G))\subset\dot{O}_{N+1}(P^+(G))$
4. Для каждого слова $l\in L(P^+(G))$ существует N такое, что $l\in T_N(P^+(G))$.

.3. Трековые языки соответствующие процессам в произвольных графах со входами

В этом параграфе обектом исследования являются трековые языки, соответствующие процессам в произвольных графах со входами, в частности таких, которые не удовлетворяют условию этажности.

Перед дальнейшим изложением напомним цель, которую мы преследуем.

Пусть $G=(V_G,E_G)$ – произвольный граф со множеством вершин V_G, множеством дуг E_G и множеством входных вершин $X(G)=\{v\,/\,v\in V_G,\ \nexists v':(v',v)\in E_G\}$.

Как уже отмечалось, язык $H(P^+(G))$ нераспознаваем конечным автоматом. Поэтому, как и раньше мы будем стремиться построить отображение $T_N:p\to 2^{M(V_G,D_G)}$ такое, что бесконечный язык $T_N(p)\neq\varnothing$ и $t=(V_t,E_t)\in T_N(p)\Rightarrow V_t=V_p,\ E_p\subset E_t$, то есть будем ставить в соответствие процессу p лишь некоторое подмножество языка $H(p)$, то есть $T_N(p)\subseteq H(p)$.

Ниже мы будем рассматривать графы со входами, то есть такие для которых $X(G)\neq\varnothing$.

Определим для графа G автомат $\mathcal{A}=(V_{\mathcal{A}},E_{\mathcal{A}},Q_{\mathcal{A}},F_{\mathcal{A}})$, следующим образом:

1. Множество вершин есть $V_{\mathcal{A}}=2^{V_G}$.
2. Определим $E_{\mathcal{A}}$. Пусть $Y',Y''\in V_{\mathcal{A}}$ и: $Y'=X'\cup Z'$, где $X'\subset X(G)$, $Z'\subset V_G\backslash X(G)$, $Y''=X''\cup Z''$, где $X''\subset X(G)$, $Z''\subset V_G\backslash X(G)$, тогда $(Y',Y'')\in E_{\mathcal{A}}$ тогда и только тогда, когда для произвольного $v\in Z''$ имеет место $pred(v)\subset Y'$, где через $pred(v)$ обозначим множество всех предшественников вершины v в графе G.
3. Определим начальное состояние $Q_{\mathcal{A}}=2^{V_G}$.
4. Определим финальное состояние $F_{\mathcal{A}}=\{Y_i\,/\,\nexists Y_j\subset V_{\mathcal{A}}$ такое, что $(Y_i,Y_j)\in E_A\}$.
5. Ребру $(Y',Y'')\in E_{\mathcal{A}}$ приписана метка Y'.

Автомат $\mathcal{A}$ задает язык $L(\mathcal{A})$.

Утверждение 6.

Произвольному процессу $p\in P^+(G)$ взаимооднозначно соответствует (обозначим это соответствие через ψ) слово $\psi(p)=\ell\in L(\mathcal{A})$. Иначе говоря, процессу $p\in P^+(G)$ соответствует взаимооднозначно путь из $q\in Q_A$ в $f\in F_A$.

Рассмотрим язык треков $T^0(p)\subset\mathbb{M}(V_G,D_G)$, где $p\in P^+(G)$. Пусть $\psi(p)=Y_{i_1},Y_{i_2},\dots,Y_{i_n}$, тогда

$$T^0(p)=\left\{\Pi(Y_{i_1})\circ\Pi(Y_{i_2})\circ\ldots\circ\Pi(Y_{i_n})\right\},\ \text{где}\ \Pi(Y_i)=\left\{\pi_{i_1},\dots,\pi_{i_{k_i}}\right\}$$

конечное множество слов, являющихся перестановками элементов множества Y_i. Обозначим через $T(P^+(G))=\bigcup_{p\in P^+(G)}T^0(p)$.

Утверждение 7.

Если рассматривать $H(p)$ как множество слов, вложеное в V^*, то $T^0(P^+(G))\cap H(p)\neq\varnothing$ для каждого $p\in P^+(G)$.

Лемма.

$T^0(P^+(G))$ конечно-автоматный язык.

Доказательство.

Построим регулярное выражение для $T^0(P^+(G))$. Рассмотрим регулярное выражение, описывающее язык $L(\mathcal{A})$ в алфавите $\{Y_1,...,Y_r\}$. Заменим каждое вхождение символа Y_l на выражение $(\pi_{1_l}\vee\pi_{l_2}\vee...\vee\pi_{l_n})$. Очевидно, что полученное регулярное выражение описывает язык $T^0(P^+(G))$, то есть утверждение доказано.

Обозначим через $|p|$-длину процесса $p\in(P^+(G))$.

Утверждение 8.

$\bigcup\limits_{|p|\le N} H(p)$ - конечно автоматный язык.

Теорема 4.

Для произвольного графа $G=(V_G,E_G)$ со входами (тоесть $X(G)\neq\varnothing$) существует отображение $T_N{:}p\to 2^{M(V_G,D_G)}$ такое, что

1. $\partial_N(p)\neq\varnothing$ – бесконечный язык.
2. Язык $\partial_N(P^+(G))=\bigcup\limits_{p\in P^+(G)} T_N(P)$ распознаваем конечным автоматом
3. $\partial_N(P^+(G))\subset\partial_{N+1}(P^+(G))$.
4. Для каждого слова $l\in L(P^+(G))$ существует N такое, что $l\in T_N(P^+(G))$.

Доказательство.

Пусть задано N.

Если $|p|\le N$, то положим $T_N(p)=H(p)$, а если $|p|>N$, то положим $T_N(p)=T^0(p)$. Утверждения теоремы являются следствием утверждений 6, 7, 8.

Заметим, что в случае многокомпонентного графа $G=G_1\cup...\cup G_k$ все приведенные рассуждения оказываются также верными. Однако, если все построения выполнить для кождой компоненты G_i в отдельности, то-есть построить язык $T_N(P^+(G_i))$, то язык $T_N(P^+(G_1))\circ...\circ T_N(P^+(G_k))$ будет также автоматным языком, удовлетворяющим всем условиям теоремы, однако включающим в себя язык $T_N(P^+(G))$, как собственное подмножество.

Литература

[1] C. A. R. Hoare, "Communicating Sequential Processes". –L.: Prentice Hall, 1985. p. 256.

[2] К. В. Шахбазян, Ю. Г. Шукурян, "О языках процессов в конечных графах". Кибернетика, 1997, 4, с. 12–32.

[3] P. Gastin, "Recognizable and rational languages of finite and infinite traces". –STACS'91. Lecture Notes in Computer Science 480, 1991, p. 89-104.