О гамильтоновых обходах в орграфах при условии типа Мейнила

С. Х. Дарбинян

Инситут проблем информатики и автоматизации НАН РА и ЕрГУ

Резюме

Доказывается, что любой сильно связный p -вершинный, $p \geq 3$, орграф в котором сумма степеней любых двух различных не смежных вершин не меньше, чем $2p-2$, содержит гамильтоновый обход, т.е. контур, который получается из гамильтонового контура после переориентации одной дуги.

1 Введение

Будем рассматривать конечные орграфы без петель и кратных дуг. Все понятия и обозначения, не определяемые здесь, можно найти в книге Харари [1]. Для целого $i \geq 0$ скажем, что $p-$вершинный орграф G удовлетворяет условию (c_i), если сумма степеней любых двух различных не смежных вершин не меньше чем $2p+i-2$.

Через $D(p,n) = [x_1x_2...x_n; x_1y_1y_2...y_{p-n}x_n]$ обозначим p -вершинный орграф с множеством вершин $\{x_1, x_2, ..., x_n; y_1, y_2, ..., y_{p-n}\}$ и с множеством дуг

$$\{x_1y_1, y_{p-n}x_n\} \cup \{x_ix_{i+1}/1 \leq i \leq n-1\} \cup \{y_iy_{i+1}/1 \leq i \leq p-n-1\}.$$

В частности, орграф $D(p,2)$ есть p - вершинный орграф, который олучается из p - вершинного контура, после переориентации одной дуги. Орграф $D(p,2)$ называется гамильтоновым обходом.

Многие авторы (см.[2-5]) исследовали гамильтоновость и панцикличность орграфов при условии $(c_i), i \geq 0$.Возникает вопрос: при каких условиях гамильтоновый p -вершинный орграф G содержит гамильтоновый обход или цикл длины p с наперед заданными ориентациями дуг.

В работе [6] доказано, что если орграф G удовлетворяет некоторым достаточным условиям гамильтоновости, то орграф G содержит орграф $D(p,2)$. В [5] отмечено что любой p -вершинный орграф, удовлетворяющий условию (c_1), содержит обход любой длины $n, 3 \leq n \leq p$ (кроме некоторых исключений). Обход длины $n-$ это n - вершинный орграф, который получается из контура длины n после переориентации одной дуги.

Здесь мы докажем, что сильно связный p- вершинный, $p \geq 3$, орграф G, удовлетворяющий условию (c_0) (соот. (c_1)) содержит гамильтоновый обход (соот. орграф $D(p,3)$), кроме некоторых исключений.

2 Основные определения и некоторые вспомогательные утверждения

Через $V(G)$ обозначается множество вершин орграфа G, а через $E(G)$– множество его дуг.

Пусть G– орграф, $A, B \subseteq V(G)$ и $x \in V(G)$. Обозначим

$$E(A \to B) = \{yz \in E(G)/y \in A, z \in B\};$$

$$E(A, B) = E(A \to B) \cup E(B \to A);$$

$$O(x) = \{y \in V(G)/xy \in E(G)\}; I(x) = \{y \in V(G)/yx \in E(G)\};$$

$$d(x, A) = |E(x, A)|.$$

Запись $A \to B$ означает, что, если $y \in A$ и $z \in B$, то $yz \in E(G)$. В этих обозначениях, если $A = \{u\}$ или $B = \{u\}$, где u– вершина в G, то в место $\{u\}$ пишем u. Орграф, порожденный подмножеством вершин A, обозначается через $\langle A \rangle$. Если G орграф, то $\overleftarrow{G}$– орграф обратный к орграфу G, т.е. $\overleftarrow{G}$ получается из G после переориентации каждой дуги. Число $d(x) = id(x) + od(x)$, где $id(x)$– полустепень захода, а $od(x)$– полустепень исхода вершины x, называется степенью вершины x. $E(x, y) = \emptyset$, означает, что вершины x и y не смежны между собой. Запись $D \subseteq G$ означает, что орграф D является подграфом орграфа G.

Если H– неориентированный граф с множеством вершин $V(H)$, то через $\overline{H}$ обозначается дополнение графа H, а через H^*– орграф с множеством вершин $V(H)$ и дуга $yz \in E(H^*)$, тогда и только тогда, когда вершины y и z в H смежны. Орграф G называется k-связным, если для любых различных вершин x и y существуют k вершинно непересекающихся путей из x к y. Через D_0 обозначим множество $(2n+1)$ -вершинных орграфов D для которых

$$K^*_{n,n+1} \subseteq D \subseteq (K_n + \overline{K_{n+1}})^*.$$

Через D_1 обозначим орграф $[(K_n \cup K_n) + K_1]^*$, а через D_2– орграф, который получается из K^*_{p-1} и K^*_2 после отождествления одной вершины K^*_{p-1} с одной вершиной K^*_2.

T_5– это 5– вершинный турнир с множеством вершин $V(T_5) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y\}$ и с множеством дуг

$$E(T_5) = \{x_i x_{i+1(mod(4))}; 1 \le i \le 4\} \cup \{x_1x_3, x_2x_4, x_1y, yx_2, x_3y, yx_4\}.$$

Через C_k обозначается контур длины κ, а через $[m, n]$– множество целых чисел, не меньших m и не больших n. Пусть $C_k = x_1x_2...x_kx_1$ (всюду индексы вершин контура C_k берутся по $mod(k)$, т.е. $x_{k+i} = x_i$) , и пусть путь $P = x_1x_2...x_m, m \ge 2$. Если $x \notin V(C_k)$ (соответственно, $x \notin V(P)$), и $x_ix, xx_{i+1} \in E(G), 1 \le i \le k$ (соответственно, $1 \le i \le m-1$), то скажем, что контур $x_1x_2...x_ixx_{i+1}...x_kx_1$ (соответственно, путь $x_1x_2...x_ixx_{i+1}...x_m$) получается из контура C_k (соответственно, из пути P) удлинением вершиной x. Если орграфы G и D изоморфны, то напишем, что $G = D$.

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы:

Лемма 1. [7]. Пусть орграф G содержит контур C_m и пусть $x \notin V(C_m)$. Если $d(x, V(C_m)) \ge m+1$,то для любого $r, r \in [2, m+1]$, орграф G содержит контур длины r.

Лемма 2.[8]. Пусть $P = x_1x_2...x_m$– путь, $m \ge 2$, в орграфе G, и $x \notin V(P)$. Если имеет место одно из следующих условий:

а. $d(x, V(P)) \geq m + 2$;

б. $d(x, V(P)) \geq m + 1$, и $xx_1 \notin E(G)$ или $x_m x \notin E(G)$;

в. $d(x, V(P)) \geq m$, $xx_1 \notin E(G)$ и $x_m x \notin E(G)$;

то существует такое $i \in [1, m-1]$, что $x_i x, xx_{i+1} \in E(G)$, т.е. путь P можно удлинить вершиной x.

Из леммы 1 непосредственно следует лемма 3, а из леммы 2 – лемма 4.

Лемма 3. Пусть C_m– контур в p-вершинном орграфе G, где $m \leq p-1$. Если для любой вершины $y \notin V(C_m)$ имеет место $d(y) \geq 2p-m-1$, то для любого подмножества $A \subseteq V(G) - V(C_m)$ существует контур C_{m+a} с множеством вершин $A \bigcup V(C_m)$, где $a = |A|$.

Лемма 4. Пусть $P = x_1 x_2 ... x_m$– путь в p-вершинном орграфе G, где $2 \leq m \leq p-1$. Если для любой вершины $y \notin V(P)$ имеет место $d(y) \geq 2p - m$, то для любого подмножества $A \subseteq V(G) - V(P)$ существует путь из x_1 в x_m с множеством вершин $A \cup V(P)$.

Очевидно, что имеет место следующая

Лемма 5. Пусть p-вершинный, $p \geq 3$, орграф G не содержит гамильтоновый обход. Тогда, если $C_{p-1} = x_1 x_2 ... x_{p-1} x_1$ есть контур в G и $y \notin V(C_{p-1})$, то

а. Для любого $i \in [1, p-1]$ имеет место

$$|E(\{x_i, x_{i+1}\} \to y)| \leq 1; \quad |E(y \to \{x_i, x_{i+1}\})| \leq 1;$$

б. $od(y) \leq (p-1)/2$; $id(y) \leq (p-1)/2$ и $d(y) \leq p-1$.

3 Основные результаты

Теорема 1. Пусть p-вершинный сильно связный орграф G, $p \geq 3$, удовлетворяет условию (c_0). Тогда G содержит гамильтоновый обход, или G изоморфен некоторому орграфу из множесва $D_0 \cup \{D_1, D_2, T_5, C_3\}$.

Для доказательства теоремы 1 достаточно доказать леммы 6 – 8.

Лемма 6. Пусть p-вершинный орграф G, $p \geq 3$, удовлетворяет условию (c_0) и орграф G содержит контур длины $p-1$. Тогда G содержит гамильтоновый обход или $G \in D_0 \cup \{D_2, T_5\}$.

Доказательство. Пусть $C_{p-1} = x_1 x_2 ... x_{p-1} x_1$– произвольный контур в G и $y \notin V(C_{p-1})$. Предположим, что лемма не верна. Тогда G не содержит гамильтоновый обход и $G \notin D_0 \cup \{D_2, T_5\}$.

Сначала докажем утверждения 1 и 2.

Утверждение 1. Не существуют $s \in [1, p-1]$ и $k \in [2, p-2]$ таких, чтобы $x_s y, y x_{s+k} \in E(G)$ и

$$E(y, \{x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_{s+k-1}\}) = \emptyset.$$

Доказательство . Предположим, что для некоторых $s \in [1, p-1]$ и $k \in [2, p-2]$ имеют место $x_s y, y x_{s+k} \in E(G)$ и

$$E(y, \{x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_{s+k-1}\}) = \emptyset. \tag{1}$$

Выберем минимальное k. Случаи $k = 2$ и $k \geq 3$ рассмотрим отдельно.

Случай 1. $k = 2$.

Из $E(y, x_{s+1}) = \emptyset$, леммы 5 (пункт б.) и условия (c_0) вытекает, что $d(y) = d(x_{s+1}) = p-1$. Отсюда, пользуясь леммой 5, получим, что p–нечетное и

$$O(y) = I(y) = \{x_{s+2}, x_{s+4}, ..., x_{s-2}, x_s\}. \tag{2}$$

Следовательно, по лемме 5 (пункт б.) и условию (c_0), для любого $x_j \in \{x_{s+1}, x_{s+3}, ..., x_{s-1}\}$ имеет место $d(x_j) = p-1$, и если рассмотрим контур $x_{j-1}yx_{j+1}x_{j+2}...x_{j-2}x_{j-1}$, то, аналогично (2), получим

$$O(x_j) = I(x_j) = \{x_{j+1}, x_{j+3}, ..., x_{j-1}\}.$$

В результате имеем

$$E(\langle\{x_{s+1}, x_{s+3}, ..., x_{s-1}, y\}\rangle) = \emptyset,$$

т.е. $G \in D_0$, а это противоречит предположению $G \notin D_0$.

Случай 2. $k \geq 3$.

Покажем, что

$$d(y) \leq p - k. \tag{3}$$

Предположим, что $d(y) \geq p-k+1$. Тогда из леммы 5 (пункт а.), вытекает, что $p-k$ является нечетным, $od(y) = id(y) = (p-k+1)/2$ и

$$O(y) = I(y) = \{x_{k+s}, x_{s+k+2}, ..., x_{s-2}, x_s\}.$$

Значит, $x_{s+k}y, yx_{s+k+2} \in E(G)$ и $E(y, x_{s+k+1}) = \emptyset$, а это противоречит минимальности k.

Из (1), (3) и условия (c_0) имеем, что для всех $l \in [1, k-1]$ выполняется $d(x_{s+l}) \geq p+k-2$. Следовательно, по лемме 3, существует контур длины $p-1$, который не проходит через вершину x_{s+k-1}, а это противоречит лемме 5 (пункт б.), так как $d(x_{s+k-1}) \geq p$. Итак, утверждение 1 доказано.

Утверждение 2. $d(y) = p - 1$.

Доказательство. Предположим, что $d(y) \neq p-1$. Отсюда и из леммы 5 (пункт б.) следует, что $d(y) \leq p-2$. Значит, вершина y не смежна с некоторыми вершинами контура C_{p-1}. Пусть для определенности

$$E(y, \{x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_{s+k-1}\}) = \emptyset; \tag{4}$$

$$E(y, x_s) \neq \emptyset; \quad E(y, x_{s+k}) \neq \emptyset; \tag{5}$$

где $k \geq 2$. Так как $G \neq D_2$, то $x_s \neq x_{s+k}$. Из утверждения 1 имеем, что

$$|E(x_s \to y)| + |E(y \to x_{s+k})| \leq 1. \tag{6}$$

Нетрудно убедиться, что

$$d(y) \leq p - k. \tag{7}$$

Действительно, если $p-k$– четное, то неравенство (7) непосредственно вытекает из леммы 5 (пункт а.). Пусть $p-k$ – нечетное. Тогда по (5) и (6) имеем: либо $x_sy \in E(G)$ и $yx_{k+s} \notin E(G)$, либо $x_sy \notin E(G)$. Поэтому, по лемме 5 (пункт а.), либо $id(y) \leq (p-k+1)/2$ и $od(y) \leq (p-k-1)/2$, либо $id(y) \leq (p-k-1)/2$ и $od(y) \leq (p-k+1)/2$. Отсюда $d(y) \leq p-k$, что и требовалось доказать.

Из (5), (7) и из условия (c_0) вытекает, что для всех $l \in [1, k-1]$ имеет место

$$d(x_{s+l}) \geq p + k - 2. \tag{8}$$

Случай 1. $x_s y \in E(G)$.

Из (5) и (6) имеем $y x_{s+k} \notin E(G)$ и $x_{s+k} y \in E(G)$. По (8) и лемме 4 существует путь $Q = y_1 y_2 ... y_{p-1}$ из x_{s+k} в x_s, содержащий все вершины контура C_{p-1}. Следовательно, $D(p,2) = [y_1 y; y_1 y_2 ... y_{p-1} y]$, а это противоречит предположению, что G не содержит гамильтоновый обход.

Случай 2. $x_s y \notin E(G)$.

Из (5) следует, что $y x_s \in E(G)$. Учитывая рассмотренный случай $x_s y \in E(G)$, можем предполагать, что $y x_{s+k} \notin E(G)$ (иначе для орграфа $\overleftarrow{G}$ имеет место рассмотренный случай $x_s y \in E(G)$). Отсюда и из (5) имеем $x_{s+k} y \in E(G)$. Далее, пользуясь леммой 5 (пункт а.), утверждением 1 и случаем $x_s y \in E(G)$, можем предположить, что $x_{s-1} y, y x_{s+k+1} \in E(G)$.

Очевидно, что для любого $j \in [1, k]$ имеет место

$$x_{s+j} x_{s+j-1} \notin E(G), \tag{9}$$

поскольку в случае $x_{s+j} x_{s+j-1} \in E(G)$ имеем $D(p,2) = [x_{s+j} x_{s+j-1}; x_{s+j} x_{s+j+1} ... x_{s+k} y x_{s+k+1} ... x_{s+j-1}]$, что невозможно.

Пусть, для определенности, $x_1 = x_s$.

Покажем, что для любых i и $j, 1 \leq i \leq j-1 \leq k, x_i x_j \in E(G)$, тогда и только тогда, когда $j = i+1$. Допустим, что это не так. Тогда для некоторых i и $j, 1 \leq i \leq j-1 \leq k, j \neq i+1$, имеет место $x_i x_j \in E(G)$. Рассмотрим контур $C = x_i x_j x_{j+1} ... x_{k+1} y x_{k+2} ... x_{i-1} x_i$. Тогда, по лемме 3 и (8) существует контур длины $p-1$ с множеством вершин

$$\{x_{i+1}, ..., x_{j-2}\} \cup V(C),$$

т.е. этот контур не содержит вершину x_{j-1}. А это противоречит лемме 5 (пункт б.), так как $d(x_{j-1}) \geq p$.

Из доказанного утверждения и (9) вытекает, что для любого подмножество $A \subseteq \{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}$ и для любой вершины $x_i \in \{x_1, x_2, \dots, x_{k+1}\}$ имеет место

$$d(x_i, A) \leq |A - \{x_i\}|. \tag{10}$$

Из (10), в частности, имеем

$$d(x_1, \{x_2, x_3, \dots, x_k\} \leq k - 1; \tag{11}$$

$$d(x_{k+1}, \{x_2, x_3, \dots, x_k\} \leq k - 1. \tag{12}$$

Пусть $P_1 = x_{k+2} x_{k+3} \dots x_{p-1} x_1$ и $P_2 = x_{k+1} x_{k+2} \dots x_{p-1}$.

Если путь P_1 можно удлинить вершиной x_{k+1}, то по лемме 4 и (8) имеем, что существует путь $y_1 y_2 \dots y_{p-1}$ с множеством вершин $V(C_{p-1})$, где $y_1 = x_{k+2}$ и $y_{p-1} = x_1$. Отсюда $D(p,2) = [y y_{p-1}; y y_1 y_2 \dots y_{p-1}]$, а это невозможно. Значит путь P_1 невозможно удлинить вершиной x_{k+1}. Аналогичным образом получим, что путь P_2 невозможно удлинить вершиной x_1. Следовательно, пользуясь леммой 2 и $x_1 x_{k+1} \notin E(G)$, получим

$$d(x_{k+1}, V(P_1)) \leq p - k - 1, \quad d(x_1, V(P_2)) \leq p - k - 1. \tag{13}$$

Предположим, что $E(x_1, x_{k+1}) = \emptyset$. Тогда по условию (c_0) имеет место

$$d(x_1) + d(x_{k+1}) \geq 2p - 2.$$

Отсюда, из (11) - (13) вытекает, что

$$d(x_1, V(P_2)) = d(x_{k+1}, V(P_1)) = p - k - 1.$$

Следовательно, из $E(x_1, x_{k+1}) = \emptyset$ и леммы 2, получим $x_1x_{k+2}, x_{p-1}x_{k+1} \in E(G)$. Отсюда имеем контур $yx_1x_{k+2}x_{k+3}\dots x_{p-1}x_{k+1}y$. По лемме 3 и (8) существует контур длины $p-1$, с множеством вершин $V(G) - \{x_k\}$. А это противоречит лемме 5 (пункт б.), так как $d(x_k) \geq p$.

Теперь предположим, что $E(x_1, x_{k+1}) \neq \emptyset$. Тогда из $x_1x_{k+1} \notin E(G)$ имеем $x_{k+1}x_1 \in E(G)$. Нетрудно убедиться, что существует путь $y_1y_2\dots y_{p-2}$, где $y_1 = x_{k+2}$ и $y_{p-2} = x_1$, который получается из пути P_1 удлинением вершинами $x_2, x_3, \dots, x_k$. Действительно, если это не так, то для некоторых вершин $u_1, u_2, \dots, u_d \in \{x_2, x_3, \dots, x_k\}$, $1 \leq d \leq k-1$, по лемме 2 и (10) имеет место

$$d(u_i) \leq p + k - 3,$$

а это противоречит неравенству (8).

В результате получили $D(p, 2) = [x_{k+1}x_1; x_{k+1}yy_1\dots y_{p-3}y_{p-2} = x_1]$, что противоречит нашему предположению. Таким образом утверждение 2 доказано.

Из утверждения 2 и леммы 5 (пункт б.) имеем, что $p-$ нечетное и $id(y) = od(y) = (p-1)/2$. Пользуясь леммой 5 (пункт а.), можем предположить, что

$$O(y) = \{x_2, x_4, \dots, x_{p-1}\}.$$

Отсюда, из $G \neq D_2$ и утверждения 1 получим

$$I(y) = \{x_1, x_3, \dots, x_{p-2}\}.$$

Очевидно, что $p \geq 5$. Так как орграф G не содержит гамильтоновый обход, то для всех $i \in [1, p-1]$ имеет место $x_{i+1}x_i \notin E(G)$. Предположим, что для некоторого $i \in [1, p-1]$ имеет место $x_{i-1}x_{i+1} \in E(G)$. Не нарушая общности, можем предположить, что $i-$ нечетное (иначе рассмотрим орграф $\overleftarrow{G}$).

Если бы $x_ix_{i+2} \in E(G)$, то $D(p, 2) = [x_{i-1}x_{i+1}; x_{i-1}x_ix_{i+2}x_{i+3}\dots x_{i-2}yx_{i+1}\}$. Значит, $x_ix_{i+2} \notin E(G)$. Если бы $x_{i-2}x_i \in E(G)$ и $p \geq 7$, то для контура $x_{i+1}x_{i+2}yx_{i+3}x_{i+4}\dots x_{i-2}x_{i-1}x_{i+1}$ имело бы место $|E(\{x_{i-2}, x_{i-1}\} \to x_i)| = 2$, а это противоречит лемме 5 (пункт а.). Если же $x_{i-2}x_i \in E(G)$ и $p = 5$, то очевидно, что $x_{i+1}x_{i-1} \notin E(G)$. Значит $G = T_5$, а это противоречит нашему предположению. Итак, показали, что

$$x_ix_{i+2} \notin E(G), \quad x_{i-2}x_i \notin E(G). \tag{14}$$

Далее, так как G не содержит гамильтоновый обход, то очевидно, что путь

$$x_{i+2}x_{i+3}\dots x_{i-2}$$

невозможно удлинить вершиной x_i. Отсюда, пользуясь леммой 2, (14) и

$$|E(x_i, \{y, x_{i-1}, x_{i+1}\})| = 3$$

получим $d(x_i) \leq p-2$. А это противоречит утверждению 2, так как контур

$$x_{i-2}yx_{i-1}x_{i+1}x_{i+2}\ldots x_{i-2}$$

имеет длину $p-1$ и не содержит вершину x_i.

Теперь предположим, что для всех $i \in [1,p-1]$ имеет место $x_{i-1}x_{i+1} \notin E(G)$. Тогда очевидно, что $p \geq 7$.

Пусть для некоторого $i \in [1,p-1]$ имеет место $E(x_{i-1},x_{i+1}) = \emptyset$. Из условия (c_0) имеем,

$$d(x_{i-1}) + d(x_{i+1}) \geq 2p-2. \tag{15}$$

Для определенности предположим, что $i-$ четное. Очевидно, что путь $x_{i+2}x_{i+3}\ldots x_{i-1}$ невозможно удлинить вершиной x_{i+1}, а путь $x_{i+1}x_{i+2}\ldots x_{i-2}-$ вершиной x_{i-1}. Поэтому, пользуясь леммой 2 и (15), получим

$$d(x_{i+1}) = d(x_{i-1}) = p-1,$$

и $x_{i-2}x_{i+1}, x_{i-1}x_{i+2} \in E(G)$. Значит $D(p,2) = [x_{i-2}x_{i+1};\ x_{i-2}x_{i-1}x_{i+2}\ldots x_{i-3}yx_ix_{i+1}]$, что невозможно.

Пусть теперь для всех $i \in [1,p-1]$ имеет место $E(x_{i-1},x_{i+1}) \neq \emptyset$. Тогда для всех $i \in [1,p-1]$ $x_{i+1}x_{i-1} \in E(G)$. Следовательно, $D(p,2) = [x_4x_2; x_4x_5x_3yx_6x_7\ldots x_{p-1}x_1x_2]$.

Итак, во всех возможных случаях мы пришли к противоречию. Лемма 6 доказана.

Лемма 7. Пусть p -вершинный, $p \geq 3$, гамильтоновый орграф G удовлетворяет условию (c_0). Если G не содержит контур длины $p-1$, то орграф G содержит гамильтоновый обход, или $G = C_3$.

Доказательство. Предположим, что лемма не верна, т.е. орграф G не содержит гамильтоновый обход, и $G \neq C_3$. Пусть $C_p = x_1x_2\ldots x_px_1$ есть гамильтоновый контур в G. Очевидно, что для всех $i \in [1,p]$ имеет место $x_{i-1}x_{i+1} \notin E(G)$ и $x_ix_{i-1} \notin E(G)$. Отсюда вытекает, что $p \geq 5$.

Утверждение 3. Для всех $i \in [1,p]$ имеет место $E(x_{i-1},x_{i+1}) = \emptyset$.

Доказательство. Предположим, что для некоторого $i \in [1,p]$ имеет место

$$E(x_{i-1},x_{i+1}) \neq \emptyset.$$

Тогда $x_{i+1}x_{i-1} \in E(G)$, и пусть, для определенности, $x_i = x_1$, т.е. $x_2x_p \in E(G)$.

Случай 1. Для некоторого $k \in [4,p-1]$ имеет место $x_1x_k \in E(G)$.

Пусть k является минимальным, т.е.

$$E(x_1 \to \{x_3,x_4,\ldots,x_{k-1}\}) = \emptyset. \tag{16}$$

Предположим, что существует такое $s \in [3,k-1]$, что $x_sx_1 \in E(G)$. Очевидно, что $s \leq k-2$. Пусть s является наибольшим. Тогда

$$E(x_1,\{x_{s+1},x_{s+2},\ldots,x_{k-1}\}) = \emptyset. \tag{17}$$

Пусть $P_1 = x_kx_{k+1}\ldots x_{p-1}$, $P_2 = x_3x_4\ldots x_s$, $P_3 = x_2x_3\ldots x_sx_1x_kx_{k+1}\ldots x_p$ и $A = \{x_{s+1},x_{s+2},\ldots,x_{k-1}\}$.

Так как пути P_1 и P_2 невозможно удлинить вершиной x_1 и $x_1x_3 \notin E(G), x_{p-1}x_1 \notin E(G)$, то по лемме 2 и (17) имеем

$$d(x_1) \leq p - a - 1, \tag{18}$$

где $a = |A|$. Отсюда, из (17) и условия (c_0) витекает, что для любого $l \in [1, a]$ имеет место

$$d(x_{s+l}) \geq p + a - 1. \tag{19}$$

Очевидно, что путь P_3 невозможно удлинить всеми вершинами множества A. Значит для некоторых вершин $u_1, u_2, \dots, u_d \in A$, $\quad 1 \leq d \leq a$, по лемме 2, имеет место

$$d(u_i) \leq p + d - 1 \leq p + a - 1.$$

Отсюда и из (19) вытекает, что $d = a$, и орграф $\langle A \rangle$ является полным орграфом. Следовательно, $d = 1$. Нетрудно заметить, что пути $x_2x_3 \dots x_{s-1}$ и $x_{k+1}x_{k+2} \dots x_p$ невозможно удлинить вершиной x_{k-1}. Поэтому, так как $x_{s-1}x_{k-1} \notin E(G)$ и $x_{k-1}x_{k+1} \notin E(G)$, то по лемме 2 имеет место $d(x_{k-1}) \leq p - 2$, а это противоречит неравенству (19).

Теперь предположим, что

$$E(\{x_3, x_4, \dots, x_{k-1}\} \to x_1) = \emptyset.$$

Отсюда и из (16) имеем

$$E(x_1, \{x_3, x_4, \dots, x_{k-1}\}) = \emptyset. \tag{20}$$

Поэтому, так как путь P_1 невозможно удлинить вершиной x_1 и $x_{p-1}x_1 \notin E(G)$, то по лемме 2 имеем $d(x_1) \leq b + 2$, где $b = |V(P_1)|$. Следовательно, по (20) и условию (c_0), для любой вершины $x_i, i \in [3, k-1]$, имеет место

$$d(x_i) \geq 2p - b - 4. \tag{21}$$

Рассмотрим контур $C_{b+2} = x_1x_kx_{k+1} \dots x_px_1$. Очевидно, что контур C_{b+2} невозможно удлинить всеми вершинами $x_3, x_4, \dots, x_{k-1}$, поскольку, в противном случае G содержал бы контур длины $p-1$. Следовательно, для некоторых вершин $u_1, u_2, \dots, u_d \in \{x_3, x_4, \dots, x_{k-1}\}$, $\quad 1 \leq d \leq k-3$, по лемме 1 имеем $d(u_i) \leq p + d - 1 \leq p + k - 4$. Отсюда, из (21) и $b = p - k$ вытекает, что $d = k - 3$ и орграф $\langle \{x_2, x_3, \dots, x_{k-1}\} \rangle$ является полным орграом. Значит $x_3x_2 \in E(G)$, что невозможно.

Случай 2. $E(x_1 \to \{x_4, x_5, \dots, x_{p-1}\}) = \emptyset$.

Предположим, что $E(\{x_3, x_4, \dots, x_{p-2}\} \to x_1) = \emptyset$, так как в противном случае в $\overleftarrow{G}$ имел бы место уже рассмотреный случай. Значит

$$E(x_1, \{x_3, x_4, \dots, x_{p-1}\}) = \emptyset. \tag{22}$$

Отсюда, из $x_2x_1 \notin E(G)$ и $x_1x_p \notin E(G)$ имеем $d(x_1) = 2$. Поэтому, из (22) и условия (c_0) вытекает, что $d(x_i) \geq 2p - 4$ для всех $i \in [3, p-1]$. Рассмотрим контур $C_3 = x_1x_2x_px_1$. Пользуясь леммой 3, получим, что существует контур длины $p - 1$, что невозможно. Итак, утверждение 3 доказано.

Из утверждения 3 вытекает, что $p \geq 7$. Выберем $x_jx_k \in E(G), k \neq j + 1$, таким образом, чтобы число $|k - j|$ было минимальным. Пусть, для определенности, $j = 1$. Из утверждения 3 имеем, что $4 \leq k \leq p - 2$. Далее нетрудно показать, что для всех $i \in [k+1, p]$ имеют место

$$|E(x_2 \to x_i)| + |E(x_{k-1} \to x_{i+1})| \leq 1;$$

$$|E(x_{i-1} \to x_2)| + |E(x_i \to x_{k-1})| \leq 1.$$

Отсюда следует,что

$$d(x_2) + d(x_{k-1}) \leq 2p - 4. \tag{23}$$

Следовательно, вершины x_2 и x_{k-1} смежные. Из (23) вытекает, что $d(x_2) \leq p-2$ или $d(x_{k-1}) \leq p-2$. Не нарушая общности, можем предположить, что $d(x_2) \leq p-2$ (иначе рассмотрим орграф $\overleftarrow{G}$).

Далее рассмотрим случаи $k \geq 5$ и $k = 4$ по отделности.

Случай 1. $k \geq 5$.

Из минимальности k имеем, что $x_{k-1}x_2 \in E(G)$. Следовательно, по утверждению 1, $k \geq 6$. Так как $x_{k-1}x_2 \in E(G)$ и $x_4x_2 \notin E(G)$, то существует такое $s \in [5, k-1]$, что $x_sx_2 \in E(G)$ и

$$E(\{x_3, x_4, \ldots, x_{s-1}\} \to x_2) = \emptyset.$$

Пусть $A = \{x_3, x_4, \ldots, x_{s-1}\}$. Из минимальности k следует, что

$$E(\{x_1, x_p\} \to A) = \emptyset \tag{24}$$

и для любого $A_1 \subseteq A$ и для любой вершины $u \in A_1$ имеет место

$$d(u, \{x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{k-1}\}) \leq |\{x_s, x_{s+1}, \ldots, x_{k-1}\}|; \tag{25}$$

$$d(u, A_1) \leq |A_1| - 1; \quad d(u, x_2) \leq 1; \quad d(u, x_k) \leq 1. \tag{26}$$

Удлиним путь $x_kx_{k+1}\ldots x_p$ вершинами множества A, насколько это возможно. Очевидно, что некоторые вершины $u_1, u_2, \ldots, u_d \in A, 1 \leq d \leq |A|$, не принадлежат удлиненному пути. Поэтому, пользуясь леммой 2 и учитывая (24) =- (26) получим

$$d(u_i) \leq p - 2.$$

Следовательно, вершины $u_i, 1 \leq i \leq d$, смежны с вершиной x_2. Отсюда и из минимальности s и k имеем $d = 1$, $u_1 = x_3$, и существует путь $Q = y_1y_2\cdots y_{p-1}$ из вершины x_s к вершине x_2, проходящий через все вершины множества $V(G) - \{x_3\}$. Имеем, что $x_s = y_1$, $x_2 = x_{p-1}$, $x_{s+1} = y_2, \ldots, x_k = y_{k-s+1}$, $x_1 = y_{p-2}$, $x_p = y_{p-3}$. Очевидно, что $E(x_3 \to V(Q)) \neq \emptyset$. Следовательно, для некоторого $l \in [3, p-3]$ имеет место $x_3y_l \in E(G)$. Пусть l является наименьшим, т.е.

$$E(x_3 \to \{y_1, y_2, \ldots, y_{l-1}\}) = \emptyset.$$

Предположим, что для некоторого $q \in [1, l-1]$ имеет место $y_qx_3 \in E(G)$. Пусть q является наибольшим, т.е.

$$E(\{y_{q+1}, y_{q+2}, \ldots, y_{l-1}\} \to x_3) = \emptyset. \tag{27}$$

Пусть $P_1 = y_1y_2\dots y_q$ и $P_2 = y_ly_{l+1}\dots y_{p-2}$. Так как пути P_1 и P_2 невозможно удлинить вершиной x_3 и $x_3y_1 \notin E(G)$, $y_{p-3}x_3 \notin E(G)$, $E(x_3, y_{p-2}) = \emptyset$, то, пользуясь леммой 2, получим

$$d(x_3) \le p + q - l - 1. \tag{28}$$

Кроме того, очевидно, что путь $R = y_1y_2\dots y_qx_3y_ly_{l+1}\dots y_{p-1}$ невозможно удлинить всеми вершинами $y_{q+1}, y_{q+2}, \dots, y_{l-1}$. Поэтому для некоторых вершин $u_1, u_2, \dots, u_d \in \{y_{q+1}, y_{q+2}, \dots, y_{l-1}\}$, $\quad 1 \le d \le l - q - 1$, по лемме 2 имеем

$$d(u_i) \le p + l - q - 2. \tag{29}$$

С другой стороны из (27), (28) и из условия (c_0) имеем $d(u_i) \ge p + l - q - 1$, что противоречит неравенству (29).

Теперь предположим, что

$$E(x_3, \{y_1, y_2, \dots, y_{l-1}\}) = \emptyset.$$

Тогда очевидно, что $d(x_3) \le p - l - 1$ и

$$d(y_j) \ge p + l - 1, \quad 1 \le j \le l - 1.$$

Рассмотрим контур $C = x_3y_ly_{l+1}\dots y_{p-1}x_3$.Тогда пользуясь леммой 3, получим, что существует контур длины $p-1$, а это противоречит нашему предположению. Итак, случай $k \ge 5$ рассмотрен.

Случай 2. $k = 4$.

Имеем, $d(x_2) \le p - 2$ и $E(x_2, x_p) = E(x_2, x_4) = \emptyset$. Отсюда и из условия (c_0) вытекает, что $d(x_4) \ge p$ и $d(x_p) \ge p$. Так как $d(x_4) \ge p$, и орграф G не содержит контур длины $p-1$, то $x_3x_6 \notin E(G)$.

Предположим, что существует такое $l \in [7, p]$, что $x_3x_l \in E(G)$. Пусть l является минимальным, т.е.

$$E(x_3 \to \{x_5, x_6, \dots, x_{l-1}\}) = \emptyset.$$

Допустим, что $E(\{x_6, x_7, \dots, x_{l-1}\} \to x_3) \ne \emptyset$. Тогда существует такое $s \in [6, l-2]$, что $x_sx_3 \in E(G)$ и

$$E(x_3, \{x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_{l-1}\}) = \emptyset. \tag{30}$$

Пусть $P_1 = x_4x_5\dots x_s$ и $P_2 = x_lx_{l+1}\dots x_px_1$. Пути P_1 и P_2 невозможно удлинить вершиной x_3. Отсюда, из

$$E(x_3, x_5) = E(x_1, x_3) = E(x_3 \to x_6) = \emptyset,$$

и леммы 2, получим $d(x_3) \le p - l + s - 1$. Следовательно, по (30), для любой вершины $u \in \{x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_{l-1}\}$ имеет место

$$d(u) \ge p + l - s - 1. \tag{31}$$

Далее, так как орграф G не содержит контур длины $p-1$, то контур $x_4x_5\dots x_sx_3x_l x_{l+1}\dots x_px_1x_4$ невозможно удлинить всеми вершинами множества $\{x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_{l-1}\}$. Значит, для некоторых вершин $u_1, u_2, \dots, u_d \in \{x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_{l-1}\}$, $1 \le d \le l - s - 1$, имеет место $d(u_i) \le p + l - s - 2$, $\quad 1 \le i \le d$, а это противоречит неравенству (31).

Теперь допустим, что $E(\{x_6, x_7, \dots, x_{l-1}\} \rightarrow x_3) = \emptyset$. Тогда $E(x_3, \{x_5, x_6, \dots, x_{l-1}\}) = \emptyset$ и $d(x_3) \le p - l + 4$. Отсюда и из условия (c_0) имеем

$$d(x_i) \ge p + l - 6, \quad 5 \le i \le l - 1. \tag{32}$$

Рассмотрим контур $C = x_3 x_l x_{l+1} \dots x_p x_1 x_2 x_3$. Очевидно, что контур C невозможно удлинить всеми вершинами $x_5, x_6, \dots, x_{l-1}$. Значит для некоторых вершин $u_1, u_2, \dots, u_d \in \{x_5, x_6, \dots, x_{l-1}\}$, $1 \le d \le l - 5$, по лемме 2 имеет место $d(u_i) \le p + l - 6$, $1 \le i \le d$. Отсюда и из (32) вытекает, что $d = l - 5$ и $d(u_i, x_4) = 2$, т.е., в частности, $x_5 x_4 \in E(G)$. В результате получили, что орграф G содержит гамильтоновый обход, а это невозможно.

Теперь предположим, что $E(x_3 \rightarrow \{x_5, x_6, \dots, x_p, x_1\}) = \emptyset$. Если $E(\{x_5, x_6, \dots, x_p\} \rightarrow x_3) \neq \emptyset$, то рассмотрим орграф $\overleftarrow{G}$ и, аналогично предедущему случаю, получим, что G содержит контур длины $p - 1$, поэтому мы будем предполагать, что

$$E(x_3, \{x_5, x_6, \dots, x_p, x_1\}) = \emptyset.$$

Тогда $d(x_3) = 2$, и по условию (c_0) для всех x_i, $5 \le i \le p + 1$ имеет место $d(x_i) \ge 2p - 4$. Отсюда и из леммы 4 имеем, что существует путь $y_1 y_2 \dots y_p$ из вершины x_1 в x_4. Поэтому $D(p, 2) = [x_1 x_4; y_1 y_2 \dots y_p]$, есть гамильтоновый обход в G, что противоречит нашему предположению. Лемма 7 доказана.

Лемма 8. Пусть p -вершинный, $p \ge 4$, сильно связный орграф G удовлетворяет условию (c_0). Если $C_m = x_1 x_2 \dots x_m x_1$ максимальный контур в G и $m \le p - 2$, то G содержит гамильтоновый обход или G изоморфен орграфу D_1.

Доказательство. Предположим, что G не изоморфен орграфу D_1. Пусть $G_1, G_2, \dots, G_s$ – компоненты орграфа $\langle V(G) - V(C_m) \rangle$, которые пронумерованы таким образом, что для всех i и j, $1 \le i \le j - 1 \le s - 1$, имеет место $E(V(G_j) \rightarrow V(G_i)) = \emptyset$.

В работе [4] доказано, что компоненты G_i, $1 \le i \le s$, являюттся полными орграфами, любые две вершины из множества $V(G) - V(C_m)$ смежны между собой, и существуют такие вершины $u, v \in V(G_1)$, $x_i, x_j \in V(C_m)$ (для определенности предположим, что $x_j = x_1$), что $x_1 \neq x_i$, $x_i u, v x_1 \in E(G)$ и

$$E(\{x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_m\}, V(G_1)) = \emptyset.$$

Кроме того, если $s \ge 2$, то $\{x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_m\} \rightarrow V(G_s)$, а если $s = 1$, то орграф $\langle \{x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_m\} \rangle$ является полным орграфом, и существуют такие числа l_1 и l_2, $1 \le l_1 \le l_2 \le i$, что

$$\{x_{l_1}, x_{l_1+1}, \dots, x_i\} \rightarrow V(G_1) \rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_{l_1}\};$$

$$\{x_{l_2}, x_{l_2+1}, \dots, x_i\} \rightarrow \{x_{i+1}, x_{i+2}, \dots, x_m\} \rightarrow \{x_1, x_2, \dots, x_{l_2}\}.$$

Из вышесказаного имеем: если $s \ge 2$, то $D(p, 2) = [x_{i+1} y_{p-m};\ x_{i+1} x_{i+2} \dots x_m x_1 \dots x_i y_1 y_2 \dots y_{p-m}]$, а если $s = 1$, то мы можем предположить, что $l_1 \le i - 1$ (иначе рассмотрим орграф $\overleftarrow{G}$) и, значит $D(p, 2) = [x_i y_{p-m};\ x_i x_{i+1} \dots x_m x_1 x_2 \dots x_{i-1} y_1 y_2 \dots y_{p-m}]$, где $y_1 y_2 \dots y_{p-m}$ – гамильтоновый путь в орграфе $\langle V(G) - V(C_m) \rangle$. Лемма 8 доказана. Тем самым доказана теорема 1.

Нетрудно убедиться, что из теоремы 1 вытекают следствия 1 и 2.

Следствие 1.[6]. Пусть G есть p-вершинный, $p \geq 3$, орграф. Если из неравенства $od(x)+id(y) \leq p-1$ следует, что дуга $xy \in E(G)$, то G содержит гамильтоновый обход.

Следствие 2. [6]. Каждый p-вершинный, $p \geq 3$, орграф с минимальной степенью, не меньшей p, содержит гамильтоновый обход.

Для любого $p \geq 5$ и m, $p-1 \geq m > (p+1)/2$, обозначим через D_p^m– множество всевозможных p–вершинных орграфов G с множеством вершин $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ удовлетворяющих следующим условиям:

а. Сумма степеней любых двух различных не смежных вершин не меньше $2p-1$;

б. $x_1x_p \in E(D)$ и $x_{i+1}x_i \in E(D)$, при всех $i \in [1, p-1]$;

в. $E(x_i, x_{i+m-1}) = \emptyset$ при всех $i \in [1, p-m+1]$.

г. если $2 \leq i+1 < j \leq p$, то $x_jx_i \notin E(G)$. Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся следующая

Теорема [3].Пусть p-вершинный ($p \geq 3$) сильно связный орграф G удовлеворяет условию (c_1). Тогда справедливо одно из следующих утверждений:

1. G является панциклическим, т. е. G содержит контур любой длины r, $r \in [2, p]$;

2. p четное и G изоморфен орграфу $K^*_{p/2,p/2}$ или орграфу $K^*_{p/2,p/2} - \{u\}$, где $u \in E(K^*_{p/2,p/2})$;

3. Для некоторого m, $p-1 \geq m > (p+1)/2$ имеет место $G \in D_p^m$.

Теорема 2. Пусть p -вершинный, $p \geq 4$, сильно связный орграф G удовлетворяет условию (c_1). Тогда G содержит орграф $D(p,3)$.

Доказательство . Предположим, что орграф G не содержит орграф $D(p,3)$. Тогда по теореме ([3]) G содержит контур длины $p-1$. Пусть $C_{p-1} = x_1x_2 \dots x_{p-1}x_1$ и $y \notin V(C_{p-1})$. Очевидно, что для любого $i \in [1, p-1]$ имеет место

$$|E(y \to x_i)| + |E(x_{i+1} \to y)| \leq 1.$$

Из сильной связности G и из условия (c_1) вытекает, что для некоторых $i, j \in [1, p-1]$, $i \neq j$, имеет место $yx_i, x_jy \in E(G)$. Следовательно, существуют такие $l \in [1, p-1]$ и $k \in [2, p-2]$, что $yx_l, x_{l+k}y \in E(G)$ и

$$E(y, \{x_{l+1}, x_{l+2}, \dots, x_{l+k-1}\}) = \emptyset.$$

Поэтому

$$d(y) \leq \sum_{j=l+k}^{l-1} (|E(y \to x_j)| + |E(x_{j+1} \to y)|)$$
$$+2 \leq p-k+1.$$

Отсюда и из условия (c_1) получаем, что для любого $j \in [1, k-1]$ имеет место $d(x_{l+j}) \geq p-k-2$. Следовательно, по лемме 4, существует путь из вершины x_{l+k} к вершине x_l. Итак, получили, что орграф G содержит $D(p,3)$, а это противоречит нашему предположению. Теорема доказана.

Литература

[1] Ф. Харари,Теория графов, Мир, Москва, 1973.

[2] J. C. Bermond and C. Thomassen, Cycles in Digraphs – a Survey, Journal of Graph Theory 5, 1981), pp. 1–43.

[3] С. Х. Дарбинян, Панцикличность орграфов при условии Мейнила, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 20, 1985, 95–117.

[4] С. Х. Дарбинян, Контуры любой длины в орграфах с большими полустепенями, ДАН Арм. ССР, том 75, 4 , 1982, 147–152.

[5] A. Benhocine, Pancyclism and Neyniel's Conditions, Discrete Mathematics, 58, 1986, 113–120.

[6] A. Benhocine, On the Existence of a Specified Cycle in Digraphs with Constraints on Degrees, Journal of Graph Theory, Vol. 8, 1984, 101–107.

[7] R. Haggkvist and C. Thomassen, On Pancyclic Digraphs, Journal of Combinatorial Theory, B, 20, 1976, 20–40.

[8] C. Thomassen, An Ore-type Condition implying a Digraph to be Pancylic, Discrete Math., 19, 1977, 85–92.