Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 19, 1998, 81-88.

К теории оптимального управления. Анализ основных концепций

А. С. Шахвердян, С. В. Шахвердян

Институт "Арматом"

Аннотация

В настоящее время по теории оптимального управления непрерывными системами имеется огромное количество работ (несколько десятков тысяч). Дать полный анализ по ним не представляется реальным и, главное, целесообразным, поэтому в работе анализируются основные концепции, единые почти для всех работ.

1. О принципе максимума

Для задач оптимального управления непрерывными системами общепризнанным необходимым условием оптимальности является обычный принцип максимума. Доказательство принципа максимума приводится во всех учебниках и монографиях по оптимальному управлению. Оно по существу, проводится на единой основе по единой схеме.

Для формулировки и анализа принципа максимума рассмотрим стандартную задачу оптимального управления.

Рассмотрим управляемый объект, движение которого описывается уравнением

$$\dot{x} = f(x,u) \tag{1.1}$$

где $x = (x_1,...,x_n)$ - n-мерный фазовый вектор; $u = (u_1,...,u_m)$ - m-мерный управляющий вектор; $f(x,u) = (f_1(x,u),...,f_n(x,u))$ - n-мерная вектор-функция, непрерывная по совокупности переменных x и u и непрерывно дифференцируемая по x. Функции $f_i(x,u)$, $i = \overline{1,n}$ определены $\forall x \in X$ и $\forall u \in U$, где $X = E^n$; U - ограниченное замкнутое множество m - мерного пространства E^m; E^n и E^m - n и m-мерные вещественные евклидовы пространства.

Среди всех допустимых управлений $u(t)$, переводящих фазовую точку из положения x^0 в положение x^T, требуется найти такое, при котором функционал

$$J = \int_0^T f_0(x,u)dt \tag{1.2}$$

принимая минимальное (максимальное) значение, где $x(t)$ решение системы (1.1) с начальным условием $x(0) = x^0$, соответствующее управлению $u(t)$ и проходящее в момент T через точку $x(T) = x^T$; x^0 и x^T - n - мерные заданные векторы; T - период управления, не фиксирован. Здесь и всюду ниже допустимым управлением называется измеримая вектор-функция $u(t) \in U$, переводящая фазовую точку из x^0 в x^T. Задача (1.1), (1.2) является стандартной задачей оптимального управления без ограничения на фазовые координаты. В (1.2) предполагается, что и $f_0(x,u)$ обладает теми же свойствами, что и $f_i(x,u)$, $i = \overline{1,n}$.

Обозначим

$$\dot{x}_0 = f_0(x,u), \qquad x_0(0) = 0, \quad x_0(T) = J \tag{1.3}$$

в силу чего фазовое пространство расширяется до n+1, а система (1.1) дополняется уравнением (1.3). Тогда расширенную систему можно переписать в виде

$$\dot{\bar{x}} = \bar{f}(x,u), \quad \dot{x}(0) = \bar{x}^0 = (0,x^0) \tag{1.4}$$

$$\bar{x} = (x_0,x), \quad \bar{f} = (f_0,f)$$

Теперь рассмотренную выше задачу можно сформулировать в следующей эквивалентной форме.

В (n+1) - мерном фазовом пространстве $\bar{X} = E^{n+1}$ даны точка $\bar{x}^0$ и прямая L, параллельная оси x_0 и проходящая через точку (0, x^T). Среди всех допустимых управлений требуется найти такое, при котором фазовая траектория, являющаяся решением системы (1.4), в момент T пересекает прямую в точке с минимальной (максимальной) координатой x_0(T).

Введем в рассмотрение обычную функцию Гамильтона [1]

$$H(\psi, x, u) = \langle \psi, \bar{f}(x, u) \rangle \tag{1.5}$$

и систему сопряженных уравнений

$$\dot{\psi}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{0,n} \tag{1.6}$$

которая имеет при любых начальных условиях единственное решение, определенное и непрерывное на всем отрезке [0,T], где $\langle \cdot,\cdot \rangle$ - скалярное произведение двух векторов.

Для сформулированной задачи обычный принцип максимума гласит:

Теорема 1. (Принцип максимума)(см. [1]). Пусть $u(t)$, $t \in [0,T]$ такое допустимое управление, что соответствующая ему траектория $\bar{x}(t)$, исходящая в момент $t = 0$ из точки $\bar{x}^0$, определена на всем $t \in [0,T]$ и проходит в момент T через некоторую точку прямой L. Для оптимальности управления $u(t)$ и траектории $\bar{x}(t)$ необходимо существование такой ненулевой абсолютно непрерывной вектор - функции $\psi(t)$ соответствующей $u(t)$ и $x(t)$, что:

1. Функция $H(\psi^*, x^*, u)$ переменного $u \in U$ почти всюду на [0,T] достигнет в точке $u = u^*$ максимума

$$H(\psi^*, x^*, u^*) = M(\psi^*, x^*) \tag{1.7}$$

2. В конечный момент T выполнены соотношения

$$\psi(T) \le 0, \qquad M[\psi^*(T),\ x^*(T)] = 0 \tag{1.8}$$

Оказывается, что если $\psi^*(t)$, $x^*(t)$, $u^*(t)$ удовлетворяют системе (1.4), (1.6) и условию 1, то функции $\psi_0(t)$ и $M(\psi^*(t), x^*(t))$ переменного t являются постоянными, так что проверку соотношений (1.8) можно проводить не обязательно в момент T, а в любой момент $t \in [0,T]$.

Соотношение (1.7) является основным содержанием принципа максимума. Для раскрытия самой сущности этого соотношения, тем самым и принципа максимума, рассмотрим известное неравенство [1-3]:

$$\langle \psi^*(t), \bar{f}[x^*(t), u(t)] - \bar{f}[x^*(t), u^*(t)] \rangle \le 0 \tag{1.9}$$

из которого и, по существу, всюду выводится соотношение (1.7) следующими двумя шагами, где $\psi^*(t)$, и $x^*(t)$ - решения систем (1.1), (1.6) при оптимальном $u^*(t)$.

Пользуясь определением функции Гамильтона H в виде (1.5) неравенство (1.9) обычно переписывается в виде

$$H[\psi^*(t),x^*(t),u(t)]-H[\psi^*(t),x^*(t),u^*(t)]\le 0 \qquad (1.10)$$

а поскольку это неравенство считается справедливым для любой точки $u\in$ U, то получается соотношение (1.7).

Анализируя переход из (1.9) к (1.7) и суть принципа максимума следует заметить:

1. Если скалярное произведение $\langle\psi^*(t),\bar{f}[x^*(t),u^*(t)]\rangle$ представляет собой значение функции Гамильтона при оптимальном $u^*(t)$, то в скалярном произведении $\langle\psi^*(t),\bar{f}[x^*(t),u(t)]\rangle$ вектор $\psi^*(t)$ определен при оптимальном $u^*(t)$, а вектор - функция $\bar{f}[x^*(t),u(t)]$ - при оптимальном $x^*(t)$ и произвольном $u(t)\in$ U. В силу этого $\langle\psi^*(t),\bar{f}[x^*(t),u(t)]\rangle$ отличается от функции Гамильтона.

2. При фиксированных ψ^*, x^*, соответствующих оптимальному управлению u^*, функция $H=\langle\psi^*,\bar{f}[x^*,u)\rangle$ в общем случае максимума может достигнуть при $u\ne u^*$, следовательно

$$\max_{u\in \mathrm{U}} H(\psi^*,x^*,u)\ne H(\psi^*,x^*,u^*)$$

т.е. стержневое соотношение принципа максимума (условие 1 теоремы 1) в общем случае не выполняется. Вследствие этого и условие 2 теоремы 1 не будет выполняется.

В частном случае, если функция $H(\psi^*,x^*,u)$ имеет максимум при $u=u^*$, то и функция Гамильтона достигнет максимума вместе с функцией $H(\psi^*,x^*,u)$ и принцип максимума справедлив.

3. Обычно в задачах оптимального управления используется уравнение $\partial H/\partial u=0$, причем $\partial H/\partial u$ вычисляется при фиксированных ψ^* и x^*, что несомненно справедливо.

Следовательно, в уравнение $\partial H/\partial u=0$ входят u^*, u и чтобы найти его корень как правило u и u^* и отождествляются ($u\equiv u^*$). Очевидно, что такое решение уравнения $\partial H/\partial u=0$ справедливо, если $H(\psi^*,x^*,u)$ достигает максимума при $u=u^*$.

4. Уравнение $\partial H/\partial u=0$ составляется при фиксированных ψ^* и x^*, решается при нефиксированных ψ и x, т.е. очевидно противоречие между выводом уравнения $\partial H/\partial u=0$ и его решением.

Из приведенного выше анализа обычного принципа максимума, а также результатов решения множества примеров непрерывных систем, на котором соотношение (1.7) не выполняется, очевидна необходимость построения новых необходимых условий оптимальности для непрерывных систем, позволяющих определить ту функцию, которая на оптимальном процессе достигает максимума и справедливых для любого класса непрерывных систем.

Вторая часть данной серии работ посвящена именно этим фундаментальным аспектам теории оптимального управления, где доказывается теорема о необходимых условиях оптимальности первого порядка для непрерывных систем, позволяющая определить функцию, которая должна быть максимальной на оптимальном процессе (что очень важно при построении численных алгоритмов решения задач оптимального управления), привести в соответствие вывод и решение уравнения типа $\partial H/\ \partial u=0$. В дополнительное подтверждение принципиальных концепций, изложенных выше, в данной серии работ приводится ряд примеров непрерывных систем, на которых обычный принцип максимума не выполняется. Отметим, что ранее не был обнаружен факт несправедливости обычного принципа максимума на примерах непрерывных систем (здесь речь не идет о задачах, для которых среди измеримых функций оптимальное управление не существует и оптимальное управление ищется в классе обобщенных функций [4]),хотя, как известно, на примерах дискретных систем такой факт обнаружен еще в 1959г. [5,6].

Все изложенные замечания по принципу максимума обусловлены тем, что в условиях 1 и 2 теоремы 1 входят фиксированные векторы ψ^* и x^*, соответствующие оптимальному управлению. Поэтому оказалось необходимым произвести преобразования, позволяющие исключить из теоремы 1 фиксированные векторы ψ^* и x^*.

Во второй части данной серии работ при построении необходимых условий оптимальности векторы ψ и x рассматриваются как функционалы (по компонентно) от управления с отличными от нуля функциональными производными, что позволило исключить фиксированные векторы ψ^* и x^*на оптимальном управлении и доказать новую теорему о необходимых условиях оптимальности первого порядка для непрерывных систем.

Впервые функциональные производные только по вектору ψ рассмотрены в работе [7] при доказательстве необходимых условий оптимальности для дискретных систем и в [8] - для непрерывных систем. В дальнейшем функциональные производные по обоим векторам ψ и x были использованы нами при построении необходимых условий оптимальности для стандартных задач оптимального управления [9] и для той же задачи, но дополненной ограничением на полное изменение управления [10].

2. О теории особых оптимальных управлений

Теория особых оптимальных управлений развивалась в 60 - 70 - х годах. Появилось большое число публикаций, например, [11 - 19], где получено множество необходимых условий оптимальности особых управлений.

Понятие особого управления впервые появилось в [6], после чего оно получило развитие в[15, 16]. Определенное продвижение в решении проблемы было достигнуто после привлечения скобок Пуассона [11 - 13]. В 1964г. Вопрос об оптимальности особых управлений был исследован в [17], где была использована двусторонняя вариация (вариация Келли) и получено довольно изящное условие для проверки на оптимальность особых управлений. Идея работы [17] была развита в [18] и получено условие Коппа - Мойера. При дальнейшем развитии теории особых оптимальных управлений были введены матричные импульсы и новый тип вариации, названный пакетом вариаций [11].

Усиленное внимание к теории особых оптимальных управлений говорит, с одной стороны, о сложности проблемы и недостаточности и неэффективности необходимых условий оптимальности - с другой. Это утверждение подтверждается и в [11], где рассмотрено значительное количество примеров (около 40), на которых проверяются различные необходимые условия оптимальности особых управлений.

Примеры, рассмотренные в [11], нами были проанализированы и оказалось, что из всех 40 примеров, только в двух примерах особые управления оптимальны, причем в них и некоторые неособые управления были оптимальны. Во всех остальных примерах особые управления оказались неоптимальными. Таким образом в специальной монографии по особым оптимальным управлениям [11] не оказалось почти ни одной задачи с особыми управлениями, хотя было бы очень интересно рассматривать именно такие задачи, которые действительно особые. Кроме того при проверке необходимых условий оптимальности особых управлений обнаружилось, что в большинстве случаев особое управление неоптимально, однако условие Келли и Коппа - Мойера выполняются. Имелись и некоторые случаи, когда особое управление неоптимально и указанные условия не выполняются, т.е. они оказались эффективными.

В качестве примера задачи с особым управлением в [20] рассмотрена автономная линейная система второго порядка с одной управляющей переменной и критерием качества, содержащим квадратичную форму только от фазовых переменных, причем допустимая область управления считается неограниченной. Решение задачи включает: начальный участок с импульсным управлением типа δ - функции Дирака, мгновенно переводящим объект из начального состояния $x(0) = \{x_1(0), x_2(0)\}$ вдоль прямых $x_1 + x_2 = \text{const}$ на особый участок; дальнейшее движение вдоль особого участка (промежуточного) до прямой $x_1 + x_2 = 0$, проходящей через начало координат; конечный участок с импульсным управлением также типа δ - функции, но обратного знака, переводящим объект из особого участка вдоль прямой $x_1 + x_2 = 0$ в начало координат. Здесь появление особого участка объясняется тем, что прямые $x_1 + x_2 = \text{const}$ и $x_1 + x_2 = 0$ параллельны.

Подробный анализ этой задачи показал, что $\forall\, a \in [1, \infty)$ оптимальное управление при $|u| \le a$ имеет вид

$$u^* = \begin{cases} a & \text{при } 0 \le t \le t_1 \\ -a & \text{при } t_1 \le t \le T \end{cases} \tag{1.11}$$

т.е. особого участка нет, где

$$t_1 = \frac{x_2(0) + aT}{2a},\ T = \frac{x_2(0)}{a} + \sqrt{\frac{2x_2^2(0)}{a^2} + \frac{4c}{a}} \tag{1.12}$$

$$c = x_1(0) + x_2(0)$$

t_1 - момент переключения u^* с a на $-a$; T - период управления; a - может быть сколь угодно большим, но $< \infty$. Решение (1.11) остается в силе и для абстрактного случая $a = \infty$, поскольку в бесконечности параллельные прямые пересекаются. Из (1.12) следует: при $a \to \infty$, $t_1 \to T/2$, $T \to 0$, следовательно критерий качества $J \to 0$, между тем при решении с особым участком $J > 0$. Таким образом и в задаче, рассмотренной в [20], появление особого управления сомнительно.

В задаче оптимизации движения космических аппаратов в произвольном гравитационном поле на участке промежуточной тяги были рассмотрены особые решения [21]. В, частности, в кеплеровском поле такие особые дуги с промежуточной тягой построены Д.Ф. Лоуденом [22]. Однако, в [21, 23, 24] по поводу этих решений отмечается, что часто они неоптимальны и в общем случае вопрос об их оптимальности до конца неясен. Таким образом и в этой реальной задаче появление особых участков ставится под сомнение. Аналогичная ситуация возникает и в задаче о спуске космического аппарата, где участки с максимальным и минимальным управлением стыкуются с участком с особым управлением [25], оптимальность которого не обоснована.

В задачах оптимизации переходных процессов в ядерных реакторах гамильтониан линеен по управлению [26], поэтому в их решение включают особые участки. Однако, проведенные нами численные эксперименты показали, что и в этих задачах нет особых решений.

Таким образом анализ множества примеров из [11] и примеров из [20 - 26] дает основание поставить под сомнение (быть может преждевременно) само существование задач с особыми решениями.

В работах по особым оптимальным управлениям предполагая, что особое управление существует, предлагаются строго обоснованные методы решения задач с особыми управлениями. Но когда эти решения оказываются не оптимальными, тогда возникают вопросы - как решить такие задачи и как проверить их оптимальность и зачем нужно множество условий проверки особых управлений на оптимальность, тем более тогда, когда эти условия выполняются, но особое управление не является оптимальным.

В работе [27] предлагается численный метод решения задач с особыми управлениями, причем возможности метода демонстрируются на примере задачи стабилизации спутника. Следует отметить, что эта же задача методом последовательной линеаризации была решена в [25], где вообще нет упоминания об особенности управления. В этой задаче управление трехмерное, оптимальные значения компонент таковы: $u_1(t)$ - непрерывная функция времени; $u_2(t)\equiv 0$, $\forall t \in [0\ ;0{,}1]$; $u_3(t)$ - набор δ - функции, носители которых расположены вблизи точек $x_2(t)=0$.

В работе [28] предложен метод приращений для решения линейно - квадратичных задач оптимального управления. Метод комбинирует две процедуры улучшения и включает в себя традиционную операцию на максимум гамильтониана

$$u^{*}=\operatorname{argmax} H(\psi^{*},x^{*},u,t),\ u\in \mathrm{U} \tag{1.13}$$

вместе с задачей Коши для фазовой и сопряжено - матричной систем. Там же дается определение скользящих режимов: решение $x(u,t)$ называется скользящим режимом на [0,T], если функция переключения $g[x(u,t)]=0$, $\forall t \in$ [0,T] (в традиционном понимании участок траектории с $g[x(u,t)]=0$ называется особым [11]). Интересен следующий факт, справедливо отмеченный в [28]: если решение $x(u,t)$ является скользящим на [0,T], то улучшение отсутствует, т.е. на особых участках метод не эффективен. В силу этого для скольжения траектории на $g[x(u,t)]=0$ при численном решении задачи предлагается использовать стандартные схемы нахождения особых оптимальных управлений (если они существуют).

Для иллюстрации возможности процедуры улучшения рассматривается простейший пример

$$\begin{gathered}\dot{x}_1=u,\qquad \dot{x}_2=\frac{1}{2}x_1^2,\qquad x_2(2)\to\min\\ x_1(0)=1,\quad t\in[0,2]\\ u\in \mathrm{U}=[-1,1]\end{gathered} \tag{1.14}$$

После двойного применения процедуры улучшения получено решение

$$v(t)=\begin{cases}-1, & t\in[0,\ 2/3)\\ -\frac{1}{4}, & t\in(2/3\ ,2]\end{cases} \qquad v\in U$$

Дальнейшее применение процедуры улучшения, как отмечено в [28], приводит к минимизирующей последовательности, которая в [28] до конца не доведена. В задаче (1.14) оптимальное управление имеет вид

$$u(t)=\begin{cases}-1, \quad t\in[\,0,\ 1)\\ \text{либо } 0\ \text{ - особое управление}\\ \text{либо } \pm\ a - \text{скользящий режим, } t\in(1,2],\ a\in[-1,1]\end{cases}$$

где особое управление и скользящий режим понимается по традиционному определению, т.е. задача (1.14) имеет не единственное решение. Кстати, в [28] нет упоминаний о не единственности решения.

Надо полагать, что минимизируюшая последовательность приведет к решению

$$u(t)=\begin{cases}-1, & t\in[0,1)\\ 0\ , & t\in(1,2]\end{cases}$$

причем при $u(t)=0,\ \ t\in(1,2]$, условие Келли выполняется, хотя и скользящий режим оптимален. Таким образом, говоря строго, и задачу (12) нельзя отнести к классу с особыми управлениями.

Процедура (1.13) широко применяется в методах последовательных приближений численного решения задач оптимального управления, между тем в общем случае отмеченные в пункте 1 замечания справедливы и для процедуры (1.13).

Литература

1. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. В. Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1969.
2. Э. Б. Ли, Л. Маркус. Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
3. В. Г. Болтянский. Математические методы оптимального управления. М.:Наука,1973.
4. Л. Янг. Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М.: Мир, 1974.
5. Л. И. Пропой. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. М.: Наука,1973.
6. Л. И. Розоноэр. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем. Ч.I-III. Автоматика и телемеханика, 1959, т.20, № 10-12.
7. С. В. Шахвердян. О необходимых условиях оптимальности для дискретных систем. ДАН АрмССР, 1985, т.80, №5.
8. С. В. Шахвердян. Методы оптимального управления ядерными реакторами. М.: Энергоатомиздат, 1990.

9. A. S. Shahverdian. New conditions of optimality for continuous systems control. Adv. in Modelling and Analysis. C.AMSE press., v.53,№6.

10. А. С. Шахвердян. Необходимые условия оптимальности для систем с ограничениями на полное изменение управления ДНАН Армении, 1995, т.95, № 1.

11. Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. Особые оптимальные управления. М.: Наука,1973.

12. Р. Габасов . К теории необходимых условий оптимальности особых управлений. ДАН СССР, 1968, т. 183, № 2.

13. Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, В. А. Срочко, Н. В. Тарасенко. Условия оптимальности высокого порядка. I, II,III. Автоматика и телемеханика, 1971, №№ 5,6,7.

14. В. И. Гурман. Об оптимальных процессах особого управления. Автоматика и телемеханика. 1965. Т XXVI, № 5.

15. C. D. Johnson, J. E. Gibson. Singular solutions in problems of optimal control. IEEE Trans. Automatic Control. 1963. V.AC-8,№1.

16. D. H. Jacobson, J. L. Speyer. Necessary and sufficient conditions for optimality for singular control problems: a limit approach. J.Math.Anal. and Applic. 1971, v.34,№ 2.

17. H. J. Kelly Singular extremals in Lawden's problem of optimal rocket fight,J.AIAA,1963, v.1. № 7.

18. Р. Копп, Г. Мойер. Необходимые условия оптимальности особых экстремалей. Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 8.

19. H. J. Kelly, R. E. Kopp, H. G. Moyer. Singular extremals in "Topics in Optimization" (ed. by Leitman G.). Acad. Press., New - York - London, 1967.

20. А. Брайсон, Хо Ю - Ши. Прикладная теория оптимального управления. М.: Мир, 1972.

21. В. В. Ивашкин. Оптимизация космических маневров. М.: Наука, 1975.

22. Д. Ф. Лоуден. Оптимальные траектории для космической навигации. М.: Мир, 1966.

23. B. M. F. Veubeke de, J. Geerts. Optimization of multiple impulse orbital transfers by maximum principle. Rept.OA - 4 presented at XV Internat. Astronaut. Congress. Warsaw, 1964.

24. R. E. Kopp, H. G. Moyer. Necessary conditions for singular extremals. AIAA J., 3 № 8, 1965.

25. Р. П. Федоренко. Приближенное решение задач оптимального управления. М.: Наука, 1978.

26. А. П. Рудик. Оптимизация физических характеристик ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1979.

27. В. С. Савченко. Об одном способе численного решения задач с особыми оптимальными управлениями. Изв. АН СССР. Техн.кибернетика, 1989, №2.

28. В. С. Захарченко, В. А. Срочко. Метод приращений для решения квадратичных задач оптимального управления. Изв.АН СССР. Техн. Кибернетика, 1995, № 6.