Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 19, 1998, 10–24.

Динамическая модель водораспределения с учетом ресурсных ограничений

Ф. А. Чарчоглян

Институт проблем информатики и автоматизации НАН РА и ЕрГУ

Аннотация

В статье сформулирована и решена динамическая задача поиска режимов оптимального орошения плантаций с учетом ограниченности водных ресурсов рассматриваемого региона. Задача сведена к математической задаче оптимального управления и решена как при частичных так и общих ограничениях водных ресурсов.

В экономико-математической модели [3] не рассматривалось влияние на урожайность сельскохозяйственных культур режимов орошения, т.е. совокупности сроков и норм полива, обеспечивающих при данных климатических и агротехнических условиях неоходимый для данной культуры водный режим почвы. В вышеуказанной модели урожайность культур определялась только в зависимости от оросительных норм m_i, $i \in I_n$, т.е. от общего количества оросительной воды, необходимой для I га определенной культуры за весь вегетационный период $[t_{ni}, t_{ci}]$, где: t_{ni} - дата посева, t_{ci} - дата сбора урожая i-ой культуры.

Таким образом, для нижеследуящих задач мы вводим понятие поливных режимов сельскохозяйственных культур $m_i(t)$, $i \in I_H$, определяющих нормы полива $\forall t \in [t_{ni}, t_{nc}]$, и, соответственно, вводится понятие оптимальных режимов орошения $\omega_i(t)$ $i \in I_n$, обеспечивающих максимально возможные урожаи сельскохозяйственных культур при оптимальном уровне агротехнических работ и усредненных климатических условиях, характерных для рассматриваемого хозяйства. Последние являются известными финкциями и, обычно, задаются в виде план-графиков вегетационных поливов.

Введем понятие некоторой производственной функции $E_i(t, m_i(t))$, характеризующей условное приращение урожайности i-ой культуры в момент времени $t \in [t_{ni}, t_{ci}]$ при ее поливе водой в количестве $m_i(t)$. Будем считать, что для i-ой культуры определена такая непрерывная и дифференцируемая относительно своих аргументов производственная функция , что имеет место

$$Y_i(t) = \int_{t_{ni}}^{t_{ci}} E_i(t, m_i(t))dt, \quad \forall t \in [t_{ni}, t_{ci}]. \tag{1}$$

Введем следующие обозначения:

$$t_c = \max_i\{t_{ci}\}, \quad t_n = \min_i\{t_{ni}\}, \quad i \in I_n, \tag{2}$$

где t_n и t_c, соответственно, общие даты посева и сбора урожая орошаемых культур для хозяйства в целом.

С учетом введенных понятий урожайность i-ой культуры будет задаваться следующим соотношением

$$Y_i(t) = \int_{t_{ni}}^{t_{ci}} \overline{E}_i(t, m_i(t))dt, \quad \forall t \in [t_n, t_c], \tag{3}$$

где

$$\overline{E}_i(t, m_i(t)) = \begin{cases} E_i(t, m_i(t)), & \text{при} \quad t_m \le t \le t_{ci}, \\ 0, & \text{при} \quad t < t_{ni}, t > t_{ci}. \end{cases} \tag{4}$$

Тогда выражение (3) для собранного урожая примет вид:

$$Y_i(t_c) = \int_{t_n}^{t_c} \overline{E}_i(t, m_i(t))dt, \quad i \in I_n \tag{5}$$

Заметим, что (4) в соотношениях (3) и (5) учитывает тот факт, что даты посева и сбора урожая различных культур хозяйства неодинаковы.

Таким же образом, как и в (3) зависимости урожая сельскохозяйственных культур от оросительных норм рассматриваем в виде параболы второго порядка

$$Y_i(t_c) = l_i^2 z_i^2 + l_i^1 z_i + l_i^0, \quad i \in I_n; \tag{6}$$

где

$$l_i^2 = -d_i, \quad l_i^1 = 2d_i\tilde{z}_i, \quad l_i^0 = y_i^0 \tag{7}$$

являются известными величинами. Здесь z_i и $\tilde{z}_i$ полностью соответствуют m_i и $\tilde{m}_i$ в [3], что и отображено на рис.1

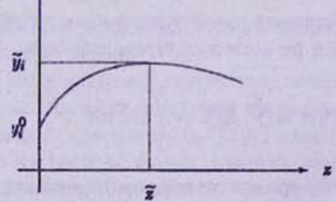

Рис. 1.

С учетом вышеизложенного очевидно, что:

$$Z_i = \int_{t_n}^{t_c} m_i(t)dt, \quad i \in I_n \tag{8}$$

$$\bar{Z} = \int_{t_n}^{t_c} \omega_i(t)dt, \quad i \in I_n \tag{9}$$

Помимо производственной функции введем в рассмотрение еще одну вспомогательную функцию $\mu_i(t), i \in I_n$, представляющей из себя количество воды, израсходованной на полив I га посевной площади культуры от начала вегетационного периода до момента времени $t \in [t_n, t_c]$, или иначе, она фактически представляет собой условное значение оросительной нормы культуры от начала общего поливного сезона хозяйства до момента $t \in [t_n, t_c]$, т. е.

$$\mu_i(t) = \int_{t_n}^{t_c} m_i(t)dt, \quad i \in I_n. \tag{10}$$

Из сравнения (8) с (10) видно, что при $t = t_c$ имеет место

$$\mu_i(t_c) = z_i, \quad i \in I_n \tag{11}$$

Для орошения всех культур хозяйства отводится оросительный фонд воды

$$M(t) = \sum_{i=1}^{n} R_i m_i(t) \tag{12}$$

Аналогичным образом в каждый момент времени величина оптимального оросительного фонда воды хозяйства, обеспечивающего всем культурам оптимальные режимы орошения, определится из нижеследующего соотношения

$$\Omega(t) = \sum_{i=1}^{n} R_i \omega_i(t) \tag{13}$$

С учетом (12) годовой оросительный фонд воды хозяйства определится как

$$M = \sum_{i=1}^{n} R_i z_i = \int_{t_n}^{t_c} M(t)dt \tag{14}$$

Анологичным образом, оптимальный годовой фонд воды хозяйства, обеспечивающий получение максимальных урожаев по всем культурам хозяйства, с учетом соотношений (13) и (9) определится как

$$\Omega(t) = \sum_{i=1}^{n} R_i \tilde{z}_i = \int_{t_n}^{t_c} \Omega(t)dt \tag{15}$$

Хозяйство реализует собранный урожай по всем орошаемым культурам в соответствии со среднепродажными ценами c_i, $i \in I_n$ и получает валовую продукцию орошаемого растениеводства в стоимостном выражении в размере

$$S = \sum_{i=1}^{n} c_i R_i y_i(t_c) \tag{16}$$

Рассмотрим задачу определения рациональных режимов орошения сельскохозяйственных культур в условиях ограниченного годового оросительного фонда воды хозяйства, т.е. при

$$M < \Omega. \tag{17}$$

Задача хозяйства заключается в максимизации вырожденного функционала (16), т.е. валовой продукции растениеводства хозяйства в целом

$$S \to max,$$

при ограничениях и связях (18), (3-16) на управляющие параметры при условии их неотрицательности

$$m_i(t) \geq 0, \quad i \in I_n. \tag{18}$$

Требование неотрицательности управляющих параметров вытекает из их физического смысла.

В анализируемой модели предполагается, что в наиболее напряженный период водопользования пропускная способность внутрихозяйственной оросительной сети допускает всевозможные перераспределения оросительной воды между культурами хозяйства с учетом рациональных режимов орошения.

В качестве критерия оптимальности в рассматриваемой модели принят максимум валовой продукции орошаемого растениеводства хозяйства, так как нашей целью является лишь определение наиболее эффективных (рациональных) поливных режимов, что не требует никаких дополнительных затрат, а только позволяет облегчить и оптимизировать процесс принятия решений по эффективному водораспределению в хозяйстве.

Для решения подобных задач требуются определенные исходные данные в виде тех или иных зависимостей урожая различных сельскохозяйственных культур от режимов орошения. Такой функцией в рассматриваемой модели является производственная функция, которую принимаем в виде параболы второго порядка с учетом логической и физической связи с кривыми урожайности, т.е. имеем:

$$E_i(t, m_i(t)) = -a_i(t)m_i^2(t) + b_i(t)m_i(t) + p_i(t), \tag{19}$$

$$a_i(t) > 0, \forall t \in [t_n, t_c] \quad i \in I_n.$$

Неизвестные коэффициенты производственной функции определим в ходе решения исходной оптимизационной задачи.

Сфомулированная экономико-математическая модель оптимального водораспределения с учетом реальных режимов орошений является сложной вариационной задачей оптимизации вырожденного функционала (16). Проанализируем основное ограничение исходной задачи (17) на располагаемый годовой лимит воды хозяйства. С учетом (12)–(15) указанное основное ограничение разбивается на три частных ресурсных ограничения:

$$Z_i \leq \bar{Z}_i, \quad i \in I_n, \tag{20}$$

$$M(t) \leq \Omega(t), \quad \forall t \in [t_n, t_c], \tag{21}$$

$$m_i(t) \le \omega_i(t), \quad \forall t \in [t_n, t_c]. \tag{22}$$

Причем, последнее ограничение (22) логически дополняет ограничение (18) в виде общего ресурсного ограничения на управляющие параметры:

$$0 \le m_i(t) \le \omega_i(t), \quad i \in I_n, \quad \forall t \in [t_n, t_c]. \tag{23}$$

Согласно ограничениям (20) и (21) исходную оптимизационную задачу разобъем на две частные задачи, учитывающие указанные ограничения в отдельности. С учетом ограничения (20) исходная задача сводится к максимизации величин урожая каждой орашаемой культуры хозяйства в отдельности (локальная задача), т. е. к оптимальному распределению заданных оросительных норм Z_i, $t \in I_n$, в виде рациональных режимов орошения в течение вегетационного периода культуры. В этом случае оптимизируемый функционал представляет собой максимум собранного урожая по каждой культуре хозяйства в отдельности.

Однако, такая постановка исходной задачи не учитывает, что в каждый момент $t \in [t_n, t_c]$ величина $M(t)$ ограничена сверху согласно (21). С учетом указанного ограничения исходная задача преобретает полноту охвата ограничений задачи и одновременно учитывает также общую ограниченность фонда воды хозяйства в каждый момент времени общего вегетационного периода.

Сформулированные оптимизационные задачи мы решим в указанном порядке, а затем – и вторую задачу с учетом гарантированного объема[1] сельхозпродукции.

Рассмотрим исходную оптимизационную задачу с учетом ограничения (20). С целью упрощения дальнейших выкладок будем рассматривать только одну, условно взятую культуру, подразумевая те же действия и с остальными орошаемыми культурами хозяйства. Таким образом, поставленную локальную задачу можно представить как простейшую задачу оптимального управления (задача Майера [4]) следующим образом: максимизировать выроженный функционал

$$F = y(t_c) = \int_{t_n}^{t_c} \overline{E}(t, m(t))dt \to \max, \tag{24}$$

т. е. найти элемент максимума, $\overline{m}(t)$, $t \in [t_n, t_c]$ при следующих ограничениях и связях на управляющий параметр $m(t)$ и фазовые координаты $Y(t)$ и $\mu(t)$, $t \in [t_n, t_c]$:

$$0 \le m(t) \le \omega(t),$$

$$\frac{dy}{dt} = E(t, m(t)), \qquad \frac{d\mu}{dt} = m(t), \tag{25}$$

с граничными значениями фазовых координат

$$y(t_n) = 0, \quad \mu(t_n) = 0, \quad \mu(t_0) = z, \tag{26}$$

[1]Объем продукции, обеспечивающий окупаемость произведенных затрат.

где фазовые координаты удовлетворяют следующим условиям: $y(t)$ – непрерывная и дифференцируемая функция $\forall t \in [t_n, t_c]$, $\mu(t)$ – кусочно-дифференцируемая функция $\forall t \in [t_n, t_c]$, а управление $m(t)$ – кусочно-непрерывная функция $\forall t \in [t_n, t_c]$.

Используя принцип максимума Понтрягина (1) (необходимое условие оптимальности), составим гамильтониан $H(\psi, t, m)$, для которого имеет место минимум по управлению $m(t)$:

$$H(\psi, t, m) = \psi_y(t)E(t, m(t)) + \psi_\mu(t)m(t), \tag{27}$$

т. е.

$$H(\psi, t, \overline{m}) = \min_{m(t)} H(\psi, t, m),$$

где $\psi_y(t)$ и $\psi_\mu(t)$ – функции, удовлетворяющие сопряженной системе уравнений:

$$\psi_y(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad \psi_\mu(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mu} = 0,$$

откуда следует, что $\psi_y = const$, $\psi_\mu = const$, так как минимизируемый гамильтониан от y и μ не зависит.

Из неходимого условия минимума гамильтониана (27) вытекает уравнение, связывающее оптимальное значение $\overline{m}$ с неизвестными постоянными ψ_y и ψ_μ:

$$H_m = \frac{\partial H}{\partial m} = \psi_y \frac{\partial E(t, m(t))}{\partial m} + \psi_\mu = 0,$$

или с учетом (21)

$$H_m = \psi_y(-2a(t)\overline{m}(t) + b(t)) + \psi_\mu = 0. \tag{28}$$

Исходная задача является задачей оптимального управления с незакрепленным правым концом для фазовой координаты $y(t)$, так как нам неизвестно ее конечное значение при $t = t_c$. В таком частном виде принцип максимума уже не дает замкнутой системы уравнений для определения минимума гамильтониана, поэтому, используя условие трансверсальности в форме, предложенной В. Ф. Кротовым (2), определим недостающее граничное условие. Для его нахождения запишем функционал, зависящий от начального и конечного значения фазовой координаты $y(t)$:

$$\Phi(y(t_n)y(t_c)) = F(y(t_n)y(t_c)) + \psi_y(t_c)y(t_c) - \psi_y(t_n)y(t_n),$$

где $F = y(t_c)$ – исходный максимизируемый функционал задачи, и решим задачу на условный минимум функционала Φ по переменной $y(t_c)$ при условии $y(t_n) = 0$. Из необходимого условия этого минимума мы получим искомое условие трансверсальности, а именно: при $y(t_n) = 0$ следует, что $\Phi = y(t_c)(1 + \psi_y)$, откуда минимум функционала достигается при $\psi_y = -1$. С учетом этого соотношение (28) примет вид:

$$H_m = 2a(t)\overline{m}(t) - b(t)) + \psi_\mu = 0.$$

Проверка достаточного условия минимума гамильтониана

$$H_{mm} = 2a(t) > 0, \tag{29}$$

позволяет убедиться в том, что $\overline{m}(t) = \dfrac{b(t)}{2a(t)} - \dfrac{\psi_\mu}{2a(t)}$; $\forall t \in [t_n, t_c]$, является элементом минимума гамильтониана (27).

Определим оптимальный поливной режим культуры $\omega(t)$ при отсутствии ограничения (20) на располагаемый водный ресурс (оросительная норма культуры). Тогда задача максикизации вырожденного функционала (24) без учета ограничения (20) т. е. при $m(t) \geq 0$, по теореме о достаточном условии максимума дает следующую схему решения указанной задачи оптимального управления: $\omega(t)$ является элементом максимума вырожденного функционала (24), если ее значение $\forall t \in [t_n, t_c]$ доставляют максимум подинтегральной производственной функции рассматриваемой культуры, т. е.

$$\overline{E}(t, \omega(t)) = \max_{m(t)} E(t, m(t)).$$

При этом точка относительного максимума производственной функции одна при $m(t) \geq 0$ и определяется из уравнения

$$\frac{\partial E}{\partial m} = -2a(t)\omega(t) + b(t) = 0, \tag{30}$$

$$\omega(t) = \frac{b(t)}{2a(t)}, \quad \forall t \in [t_n, t_c].$$

Для упрощения дальнейших преобразований принимаем

$$a(t) = a = const, \quad p(t) = p = const.$$

С учетом краевого условия $\mu(t_0) = z$ и согласно (8–9) определим значение неизвестной постоянной ψ_μ с использованием соотношения (29). Получим

$$\psi_\mu = \frac{2a(\bar{z} - z)}{\tau}, \tag{31}$$

где $\tau = t_c - t_n$ – общий вегетационный период орошаемых культур рассматриваемого хозяйства.

С учетом (31) и общего ограничения исходной задачи на управляющий параметр получим значения рационального режима орошения рассматриваемой культуры $\forall t \in [t_n, t_c]$:

$$\overline{m}(t) = \begin{cases} \omega(t) - \dfrac{\bar{z} - z}{\tau}, & \text{при} \quad \omega(t) > \dfrac{\bar{z} - z}{\tau}, \\ 0, & \text{при} \quad \omega(t) \leq \dfrac{\bar{z} - z}{\tau}. \end{cases} \tag{32}$$

Обозначим

$$\gamma = \frac{\bar{z} - z}{\tau}, \tag{33}$$

где γ – постоянная известная величина для каждой культуры хозяйства.

С учетом (33) соотношение (32) окончательно примет нижеследующий вид:

$$m(t) = \begin{cases} \omega(t) - \gamma, & \text{при} \quad \omega(t) > \gamma, \\ 0, & \text{при} \quad \omega(t) \leq \gamma \end{cases} \tag{34}$$

Графическая интерпретация соотношения (34) показывает, что рациональные поливные графики орошаемых культур строятся следующим образом: из оптимального режима орошения культуры $\omega(t)$ (см. рис. 2) вычитается постоянное для данной культуры число γ, и в полученном рациональном поливном режиме $\overline{m}(t)$ участки с отрицательными значениями ординат заменяются нулевыми в силу ограничения (23) (см. рис. 3).

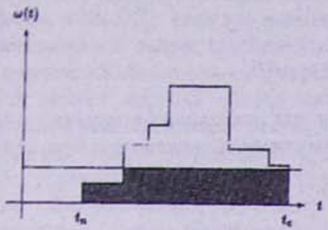

Рис. 2.

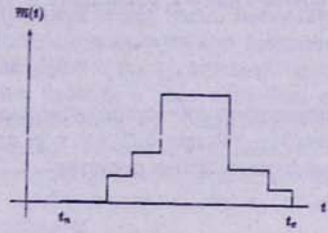

Рис. 3.

Заметим, что удалось получить оптимальное решение (34) исходной задачи в очень удобной форме, зависящей от коэффицентов $a(t)$ и $b(t)$ производственной функции введенной нами не непосредственно, а через функцию $\omega(t)$, имеющую очевидный физический смысл — оптимальный режим орошения культуры.

Оптимальное значение фазовой координаты $\overline{\mu}(t)$ с учетом (34) и соответствующего уравнения связи (10) определится для $\forall t \in [t_n, t_c]$ как:

$$\overline{\mu}(t) = \begin{cases} \int\limits_{t_n}^{t_c} \omega(t)dt - \gamma(t - t_n), & \text{при} \quad \omega(t) > \gamma, \\ 0, & \text{при} \quad \omega(t) \leq \gamma. \end{cases} \tag{35}$$

Оптимальное значение фазовой координаты $\overline{y}(t)$ определим после нахождения неизвестных коэффицинтов производственной функции культуры. Подставляя (34) в (19) с учетом (30), получим:

$$\mathtt{E}(\mathtt{t}, \mathtt{m}(\mathtt{t})) = \begin{cases} a\omega^2(t) - \gamma^2 a - p, & \omega(t) > \gamma, \\ p, & \omega(t) \leq \gamma. \end{cases} \tag{36}$$

Определим коэффиценты производственной функции из условия равенства фазовой координаты $y(t)$ при $t = t_c$ значению урожайности рассматриваемой культуры согласно выражению (6), т. е. с учетом рационального режима оршения.

Подставляя (36) в соотношение (5), получим значение неизвестного граничного условия для фазовой координаты $y(t)$:

$$\overline{y}(t_c) = \begin{cases} \int\limits_{t_n}^{t_c} \omega^2(t) - \gamma^2 a\tau + p\tau, & \text{при} \quad \omega(t) > \gamma, \\ p\tau, & \text{при} \quad \omega(t) \leq \gamma. \end{cases} \tag{37}$$

С учетом (44) имеем:

$$y(t_c) = \begin{cases} -\frac{a}{\tau}z^2 + \frac{2\bar{z}^2 a}{\tau}z + (p\tau - \frac{\bar{z}^2 a}{\tau} + a\int\limits_{t_n}^{t_c}\omega^2(t)dt), & \text{при} \quad \omega(t) > \gamma, \\ p\tau, & \text{при} \quad \omega(t) \leq \gamma. \end{cases} \tag{38}$$

С другой стороны, согласно (6 − 7)

$$\overline{y}(t_c) = -dz^2 + 2d\bar{z}z + y^0. \tag{39}$$

Приравнивая соответствующие коэффиценты при одинаковых степенях z в соотношениях (38 − 39), при $\omega(t) > \gamma$, т. е. при ненулевых значениях рационального поливного режима соответственно получим:

$$b(t) = 2\tau d\omega(t); \quad p = \frac{y^0}{\tau} + \frac{\bar{z}^2 d}{\tau} - d\int\limits_{t_n}^{t_c}\omega^2(t)dt, \tag{40}$$

при $\omega(t) \leq \gamma$, т. е. при нулевых значениях рационального поливного режима, из (8) следует, что $z = 0$, т. е. $p\tau = y^0$, откуда

$$P = \frac{y^0}{\tau}. \tag{41}$$

Подставляя полученные значения коэффицентов производственной функции в (37), окончательно определим недостающее граничное условие исходной оптимизационной задачи:

$$\overline{y}(t_c) = \begin{cases} y^0 + \bar{z}^2 d - \gamma^2\tau^2 d, & \text{при} \quad \omega(t) > \gamma, \\ y^0, & \text{при} \quad \omega(t) \leq \gamma. \end{cases} \tag{42}$$

Согласно (3) с учетом полученных соотношений оптимальное значение фазовой координатх $y(t)$ определяется так:$\forall t \in [t_n, t_c]$.,

$$y(t) = \begin{cases} \tau d\int\limits_{t_n}^{t_c}\omega^2(t)dt + (t - t_n)(\frac{y^0 + \bar{z}^2 d}{\tau} - \gamma^2 d\tau - d\int\limits_{t_n}^{t_c}\omega^2(t)dt), & \text{при} \quad \omega(t) > \gamma, \\ \frac{y^0}{\tau}(t - t_n), & \text{при} \quad \omega(t) \leq \gamma. \end{cases} \tag{43}$$

Проверив для оптимальных фазовых координат достаточное условие оптимальности, убеждаемся, что согласно (35) и (43) выполняются граничные условия задачи, и что полученное решение (34,35 и 43) − действительно есть элемент максимума исходного оптимизационного функционала.

Точность решения рассматриваемой задачи можно повысить, если отказаться от принятых допущений в виде $a(t) = a = const$ и $p(t) = p = const$. В зависимости от удобства (от вида и способа задания оптимального поливного режима), исходная задача может решаться аналитическим или графическим методами.

Перейдем теперь к рассмотрению этой же задачи с учетом более общего ограничения (21).В отличие от предыдущей оптимизационной модели, здесь уже необходимо совместное рассмотрение всех орошаемых культур хозяйства в целом с целью максимизации валовой продукции растениеводства в стоимостном выражении. Исходное ограничение данной задачи (21) означает, что $\forall t \in [t_n, t_c]$ полностью расходуется на орошение наличный лимит воды, если он не превосходит соответствующего оптимального фонда воды $\Omega(t)$, если это позволяет располагаемый ресурс воды. Таким образом, в рассматриваемой задаче необходимость во введении вспомогательной функции $\mu(t)$, контролирующей состояние водопотребления культуры $\forall t \in [t_n, t_c]$, отпадает, поскольку в любой момент времени общего вегетационного периода τ весь наличный ресурс оросительной воды полностью расходуется на орошение из-за его ограниченности.

В данной задаче хозяйство представляет собой динамическую неавтономную систему, управляющие и фазовые параметры которой являются явными функциями времени. Вначале решим эту задачу без учета гарантированного объема продукции растениеводства, а затем уже с учетом указанных объемов.

Сформулируем задачу в математических терминах. Исходная задача формулируется, как задача оптимального управления (1), следующим образом: найти элемент максимума $\overline{m}(t) = (\overline{m}_1(t), ..., \overline{m}_n(t))$ вырожденного функционала

$$F = \sum_{i=1}^{n} c_i R_i y_i(t_c) = \int_{t_n}^{t_c} \sum c_i R_i \overline{E}_i(t, m_i(t))dt, \quad \forall t \in [t_n, t_c] \tag{44}$$

удовлетворяющего уравнениям связи

$$\frac{dy_i}{dt} = \overline{E}_i(t, m_i(t)); \quad i \in I_n, \tag{45}$$

ограничениям

$$0 \le m_i(t) \le \omega_i(t), \quad \forall i \in I_n \tag{46}$$

$$M(t) = \sum_{i=1}^{n} R_i m_i(t). \tag{47}$$

и краевым условиям

$$y_i(t_n) = 0, \quad \forall i \in I_n. \tag{48}$$

Сформулированная задача оптимального управления с закрепленным временем $t_n \le t \le t_c$, закрепленным левым концом и закрепленным правым концом решается по принципу максимума Л. С. Понтрягина (1): для того, чтобы процесс $(\overline{m}_1(t), ..., \overline{m}_n(t))$ давал решение поставленной задачи динамической оптимизации вырожденного функционала (44) при условии (45-48) необходимо, чтобы $\forall t \in [t_n, t_c]$ было выполнено условие минимума гамильтониана

$$H(\psi, t, \overline{m}) = \min_{m(t)} H(\psi, t, m),$$

где

$$H(\psi,t,m)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)\overline{E}_i(t,m_i(t)), \tag{49}$$

а вспомогательные переменные $(\psi_1,...,\psi_n)$ – решение сопряженной системы уравнений

$$\Phi'_i=-\frac{\partial H}{\partial y_i}=0, \quad i\in I_n \tag{50}$$

с начальными условиями $\psi_i(t)=-c_iR_i$, $i\in I_n$. Тогда из (50) следует, что $\psi_i(t)=const$, $\quad i\in I_n$ т. е.

$$\psi_i=-c_iR_i, \quad i\in I_n. \tag{51}$$

Последний результат есть не что иное, как условие трансверсальности для правого конца фазовой координаты.

Учет ограничения в виде равенства (47) проведем с помощью метода Лагранжа (4), для чего введем в рассмотрение функцию Лагранжа:

$$H=\sum_{i=1}^{n}-c_iR_i\overline{E}_i(t,m_i(t))+\lambda(-M(t)+\sum_{i=1}^{n}R_im_i(t)), \tag{52}$$

для которой по необходимому условию оптимальности (минимум гамильтониана (49)) имеют место условия стационарности функции Лагранжа:

$$\frac{\partial H}{\partial m}=-c_iR_i\frac{\partial\overline{E}_i}{\partial m_i}+R_i\lambda=0; \quad \frac{\partial H}{\partial\lambda}=0, \quad i\in I_n, \tag{53}$$

где $\lambda\ =\ \lambda(t)-$ неопределенный множитель Лагранжа, играющий здесь роль дополнительного параметра управления.

С учетом (19) и (30) стационарная точка Лагранжиана (52) определяется из соотношения (53):

$$\widehat{m}_i(t)=\omega_i(t)-\frac{\lambda(t)}{2a_ic_i}, \quad i\in I_n \quad \forall t\in[t_n,t_c]. \tag{54}$$

Проверка достаточного условия минимума Лагранжиана $\dfrac{\partial H}{\partial m^2}=2c_iR_ia_i>0$ позволяет убедиться в том, что стационарная точка (54) отвечает минимуму Гамильтониана (49).

С учетом ограничения (46) искомые рациональные режимы орошения культур хозяйства определятся из нижеследующего соотношения:

$$\overline{m}_i(t)=\begin{cases}\omega_i(t)-\dfrac{\lambda(t)}{2a_ic_i}, & \text{при} \quad \omega(t)>\dfrac{\lambda(t)}{2a_ic_i}, \quad i\in I_n\\[2ex] 0, & \text{при} \quad \omega(t)\le\dfrac{\lambda(t)}{2a_ic_i}, \quad \forall t\in[t_n,t_c].\end{cases} \tag{55}$$

Подставляя (55) при $\omega(t) > \frac{\lambda(t)}{2a_ic_i}$ в ограничения (47), определим неизвестный множитель Лагранжа:

$$\lambda a(t) = \frac{\Omega(t) - M(t)}{\beta}, \tag{56}$$

где

$$\beta = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{R_i}{a_ic_i} \tag{57}$$

постоянная величина для рассматриваемого хозяйства.

Тогда с учетом (40) (в данном случае $a_i = c_id_i, i \in I_n$), окончательно получим:

$$\overline{m}_i(t) = \begin{cases} \omega_i(t) - \dfrac{\Omega(t) - M(t)}{2c_id_i\tau\beta}, & \text{при} \quad \omega(t) > \dfrac{\lambda(t)}{2a_ic_i}, \quad i \in I_n \\ 0, & \text{при} \quad \omega(t) \le \dfrac{\lambda(t)}{2a_ic_i}, \quad \forall t \in [t_n, t_c]. \end{cases} \tag{58}$$

Производственные функции орошаемых культур хозяйства с учетом найденных значений режимов орошения определяется следующим образом:

$$\overline{E}_i(t, m_i(t)) = \begin{cases} a\omega_i^2(t) - \dfrac{\lambda_i^2(t)}{4a_ic_i^2} + p_i, & \text{при} \quad \omega_i(t) > \dfrac{\lambda(t)}{2a_ic_i}, \quad i \in I_n \\ p_i, & \text{при} \quad \omega(t) \le \dfrac{\lambda(t)}{2a_ic_i}, \quad \forall t \in [t_n, t_c]. \end{cases} \tag{59}$$

Согласно (3) с учетом (59) определим рациональные значения фазовых координат оптимизируемой системы:

$$\overline{y}_i(t) = \begin{cases} a_i \int\limits_{t_n}^{t_c} \omega_i^2(t)dt - \dfrac{1}{4a_ic_i^2} \int\limits_{t_n}^{t_c} \lambda^2(t)dt + p_i(t - t_n), & \text{при } \omega_i(t) > \dfrac{\lambda(t)}{2a_ic_i} \ i \in I_n \\ p_i(t - t_n), & \text{при } \omega(t) \le \dfrac{\lambda(t)}{2a_ic_i}, \ \forall t \in [t_n, t_c]. \end{cases} \tag{60}$$

Тогда, согласно (8) и (9) с учетом (60), рациональные оросительные нормы культур хозяйства определяются как:

$$\overline{z}_i = \begin{cases} \tilde{z}_i - \dfrac{\Omega - M}{2\beta a_ic_i}, & \text{при} \quad \omega(t) > \dfrac{\lambda(t)}{2a_ic_i}, \\ 0, & \text{при} \quad \omega_i(t) \le \dfrac{\lambda(t)}{2a_ic_i}, \quad i \in I_n \quad \forall t \in [t_n, t_c] \end{cases} \tag{61}$$

Полученное соотношение полностью совпадает с аналогичным результатом в (3), что подтверждает правомерность согласованного определения коэффицентов производственной функции и целесообразность ее рассмотрения.

Проверка для соотношений (58) и (60) достаточных условий оптимальности исходного максимизируемого функционала согласно (45 – 48) позволяет нам убедиться в том, что полученное решение (58) – действительно является элементом максимума оптимизируемого функционала.

Рассмотрим эту же задачу с учетом гарантированных объемов сельхозпродукции с орошаемых массивов хозяйства, т. е. с учетом ограничения

$$y_i(t_c) = \int_{t_n}^{t_c} \overline{E}(t, m_i(t))dt \geq \frac{k_i}{R_i}, \quad i \in I_n. \tag{62}$$

Для упрощения рассматриваемой задачи разобъем изопериметрическое ограничение (62) на два нижеследующих:

$$y_i(t_c) = \frac{k_i}{R_i}, \quad i \in I_n, \tag{63}$$

$$\int_{t_n}^{t_c} E(t, m_i(t))dt > \frac{k_i}{R_i}, \quad i \in I_n, \tag{64}$$

$$I_p = I_n / I_H.$$

Фактически мы разделили весь набор орошаемых культур хозяйства на "нерентабельные" культуры с соответствующими ограничениями (6) в виде граничных условий для фазовых координат в правом конце и "рентабельные" культуры – с соответствующими интегральными ограничениями (64). Перечень вышеуказанных культур легко можно определить следующим образом:

1. Решается аналогичная задача без учета ограничения (62) предыдущим методом.
2. Из сравнения объемов произведенной сельхозпродукции по орошаемым культурам с соответствующими гарантированными объемами легко определяются искомые перечни культур.

Таким образом, рассматриваемая оптимизационная задача значительно упростилась ввиду того, что распалась на две упрощенные задачи оптимального управления: первая – аналогичная задача без учета ограничения (62), которая уже решена нами; Вторая – аналогичная задача с учетом ограничения (63), т. е. задача оптимального управления с закрепленным временем и закрепленными концами.

Исходная задача для "нерентабельных" культур хозяйства совпадает с предыдущей задачей до момента определения соответствующих вспомогательных переменных ψ_i, $i \in I_n$, из-за различия между указанными задачами в краевом условии (63). Поэтому в данном случае вышеуказанные вспомогательные переменные мы уже будем искать не из условия трансверсальности, а из граничного условия (63).

Воспользуемся промежуточными результатами предыдущей оптимизационной задачи. Для нашего случая согласно (54) и (56) без учета значений вспомогательных переменных, следует:

$$m_i(t) = \omega_i(t) + \frac{\lambda(t)R_i}{2a_i\psi_i}. \tag{65}$$

$$\lambda(t) = \frac{2[\Omega(t) - M(t)]}{\sum\limits_{i=1}^{n} R_i/a_i\psi_i}. \tag{66}$$

Подставляя выражение (65) в (19), получим:

$$\overline{E_i}(t, m_i(t)) = a_i\omega_i^2(t) - \frac{\lambda^2(t)R_i^2}{4a_i\psi_i} + p_i, \quad i \in I_H.$$

Тогда согласно (5) с учетом (66), имеем:

$$y_i(t_e) = a_i \int\limits_{t_n}^{t_e} \omega_i(t)dt - \frac{R_i^2}{a_i(\psi_i \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{R_i^2}{a_i\psi_i})^2} \int\limits_{t_n}^{t_e} [\Omega(t) - M(t)]^2 dt, \quad i \in I_H \tag{67}$$

Приравнивая соотношения (63) и (67), определяем неизвестные постоянные величины $\psi_i, i \in I_H$. Имеем:

$$(\psi_i \sum_{i=1}^{n} \frac{R_i^2}{a_i\psi_i})^2 = \frac{R_i^2}{a_i} \int_{t_n}^{t_e} [\Omega(t) - M(t)]dt \frac{1}{a_i \int_{t_n}^{t_e} \omega_i(t)dt + p_i\tau - \frac{k_i}{R_i}}, \quad i \in I_H. \tag{68}$$

Обозначим $\varphi_i = \psi_i \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{R_i^2}{a_i\psi_i}$, $i \in I_H$, где $\varphi_i, i \in I_H$ – представляют собой известные величины (см. правую часть соотношения (68)).

Обозначим

$$\alpha_i = \frac{1}{\psi_i}, i \in I_H. \tag{69}$$

С учетом (69), а также того, что $\psi_i = const, \varphi_i = const$ получает:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{R_i^2\alpha_i}{a_i} = const, \quad i \in I_H, \text{ или } \alpha_i\psi_i = const, \ i \in I_H. \tag{70}$$

Таким образом, одно из решений системы уравнений (70) можно принять, например, за единицу, т.е. $\alpha_i = 1$, а оставшиеся неизвестные указанной системы определятся следующим образом:

$$\alpha_i = \frac{\varphi_1}{\varphi_i}, \quad i \in I_H, \quad i \neq 1$$

Окончательно получим:

$$\psi_1 = 1, \psi_i = \frac{\varphi_i}{\varphi_1}, i \in I_H, i \neq 1 \tag{71}$$

Подставляя (71) и (65) с учетом ограничения (46), определяем искомые рациональные режимы орошения для "нерентабельных" культур хозяйства. Аналогично предыдущей оптимизационной задаче определяются соответствующие оптимальные фазовые координаты.

Литература

[1] В. Г. Болтянский. Математические методы оптимального управления. М., Наука, 1969 г., стр. 325–376.

[2] В. Ф. Кротов, В.И. Гурман. Методы и задачи оптимального управления. М., Наука, 1973 г., стр. 93–136.

[3] А. Е. Мелконян. Детерминированная постановка задачи оптимизации процесса водораспределения на орошение в регионе. – В кн.: Труды ВЦ АН Арм. ССР и ЕрГУ, т.XIII, стр. 144–152.

[4] Н. Н. Моисеев. Элементы теории оптимальных систем. Наука, М., 1975 г., стр. 70–73.