математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 18, 1997, 123-131.

Математическое моделирование и исследование задачи бесконтактного возбуждения магнитоупругих колебаний в тонкой пластинке

М. А. Микилян

ЕрГУ, факультет прикладной математики

Решается задача математического моделирования и исследования возможности бесконтактного возбуждения вынужденных колебаний в идеально проводящей пластинке. Задача сведена к системе сингулярных интегральных уравнений, которая решена численным методом. Показано, что при помощи постоянного магнитного поля вынужденные колебания одной пластинки, на которую действует возмущающая сила, можно бесконтактно сообщить второй пластинке, свободной от внешних механических нагрузок. Причем, соответствующим выбором параметров задачи можно достичь того, чтобы в основном колебалась только вторая идеально проводящая пластинка с регулируемой амплитудой. Аналогичная задача в случае сверхпроводящих пластин рассмотрена в работе [5].

1.Рассмотрим магнитоупругую систему, показанную на рис.1. Она состоит из двух параллельных неферромагнитных идеально проводящих диафрагм, которые находятся в постоянном магнитном поле $\vec{H}_0$, парраллельным координатной линии ox_1 (координатная система ox_1, ox_2, ox_3 и основные геометрические параметры показаны на рис.1.). Части диафрагм $|x_1| \le a$, $|x_2| < \infty$ являются упругими пластинками, изготовленными из различных идеально проводящих изотропных, материалов (остальные частиявляются абсолютно жесткими инеподвижными. Электромагнитные свойства среды, окружающей диафрагмы, эквивалентны свойствам вакуума.

Пусть на верхней поверхности верхней пластинки действует нормально приложенная нестационарная нагрузка $P(x_1, t)$. Граничные условия на торцах $x_1 = \pm a$ таковы, что пластинки колеблются по форме цилиндрической поверхности с образующими, парраллельными координатной линии ox_2. Рассмотрим задачу передачи вынужденных колебаний нижней пластинке и определим условия резонанса. В дальнейшем характеристики, отнесящиеся к верхней пластинке, будем обозначать индексом "1", а к нижней - индексом "2". Индексом "+" обозначим значения соотвстствующих величин на верхних поверхностях диафрагм $x_3 = b + 2\delta_1$ и $x_3 = b$, а индексом "–"-на нижних поверхностях $x_3 = b$ и $x_3 = -(b + 2\delta_2)$.

Вследствие колебаний пластинок и присутствия внешнего магнитного поля в идеально проводящих пластинках появляются индуцированные электрические токи, приводящие как к изменению напряженности магнитного поля во всем пространстве, так и к появлению массовых и поверхностных сил. Интенсивность указанных сил магнитного происхождения, с учетом идеальной проводимости материалов пластинок, определяются следующими формулами [1-3]:

$$\vec{f} = \mu_0 \left(rot\vec{H} \right) \times \vec{H} \text{ (объемные силы)},$$

$$\vec{P} = \left[\hat{T}^{(e)} - \hat{T} \right] \cdot \vec{N} \text{ (поверхностные силы)}. \tag{1.1}$$

Здесь μ_0 - магнитная постоянная, $\vec{N}$ - единичный вектор внешней нормали к деформированным поверхностям пластинок, $\hat{T}$ - тензор напряжений Максвелла

$$T_{jk} = \mu_0\left[H_j \cdot H_k - 0.5\vec{H}^2\delta_{jk}\right],$$
$$T_{jk}^{(e)} = \mu_0\left[H_j^{(e)} \cdot H_k^{(e)} - 0.5\left(\vec{H}^{(e)}\right)^2\delta_{jk}\right], \tag{1.2}$$

$\vec{H}$ - вектор напряженности магнитного поля, который складывается из вектора напряженности заданного магнитного поля $\vec{H}_0$ и вектора напряженности индуцированного магнитного поля $\vec{h}$, обусловленного колебаниями пластинок $\left(\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{h}\right)$, а индекс "е" здесь и в дальнейшем обозначает принадлежность к внешней области (пространству вне диафрагм).

Пусть для рассматриваемых пластинок справедлива гипотеза Кирхгофа о недеформируемых нормалях. По этой гипотезе из основных линеаризованных уравнений и поверхностных условий магнитоупругости неферромагнитных тел [1-3], учитывая также идеальную проводимость материалов диафрагм и (1.1), путем осреднения получается:

а) выражения для компонент индуцированного в пластинках магнитного поля:

$$h_1^{(i)} = 0, h_2^{(i)} = 0, h_3^{(i)} = H_0\frac{\partial w_i}{\partial x_1} \quad (i=1,2) \tag{1.3}$$

b) уравнения колебаний пластинок [1]

$$D_i\frac{\partial^4 w_i}{\partial x_1^4} + 2\varepsilon_i\delta_i\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} - 2\delta_i\mu_0 H_0^2\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_1^2} - \delta_i\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\sigma_{13}^{(i)+} + \sigma_{13}^{(i)-}\right] = \sigma_{33}^{(i)+} - \sigma_{33}^{(i)-};$$
$$D_i = 2E_i\delta_i^3/3(1-\nu_i^2) \tag{1.4}$$

в) условия сопряжения на поверхностях диафрагм (здесь учтено, что части $|X_1| > a$ диафрагм являются абсолютно жесткими и неподвижными).

$$h_3^{(e)+} = \begin{cases} H_0\dfrac{\partial w_1}{\partial x_1}, & \text{где } |x_1| \le a,\ x_3 = b + 2\delta_1, \\ H_0\dfrac{\partial w_2}{\partial x_1}, & \text{где } |x_1| \le a,\ x_3 = -b, \\ 0, & \text{где } \begin{cases} |x_1| > a,\ x_3 = b + 2\delta_1, \\ |x_1| > a,\ x_3 = -b, \end{cases} \end{cases}$$

$$h_3^{(e)-} = \begin{cases} H_0\dfrac{\partial w_1}{\partial x_1}, & \text{где } |x_1| \le a,\ x_3 = b, \\ H_0\dfrac{\partial w_2}{\partial x_1}, & \text{где } |x_1| \le a,\ x_3 = -b - 2\delta_2, \\ 0, & \text{где } \begin{cases} |x_1| > a,\ x_3 = b, \\ |x_1| > a,\ x_3 = -b - 2\delta_2, \end{cases} \end{cases} \tag{1.5}$$

$$\sigma_{13}^{(1)\pm}=0, \qquad \sigma_{33}^{(1)}=-\mu_0 H_0 h_1^{(e)\pm}+\frac{[1\pm1]}{2}P$$
$$\sigma_{13}^{(2)\pm}=0, \qquad \sigma_{33}^{(2)}=-\mu_0 H_0 h_1^{(e)\pm} \tag{1.6}$$

В (1.3) - (1.5), как обычно, w_i - прогиб, D_i - цилиндрическая жесткость, E_i - модуль упругости, ν_i - коэффициент Пуассона, ρ_i - плотность материала i-той пластинки, $\sigma_{13}^{(i)}$ и $\sigma_{33}^{(i)}$ - упругие напряжения.

Рассматривая систему уравнений (1.4) и (1.6) замечаем, что она не замкнута. В нее, кроме прогибов w_i пластинок, входят также неизвестные граничные значения $h_1^{(e)\pm}$ индуцированного магнитного поля $\vec{h}$ на поверхностях пластин. Мы определяем, решая уравнение Максвелла во внешней области

$$rot\vec{h}^{(e)}=0, \qquad div\vec{h}^{(e)}=0 \tag{1.7}$$

при условиях

$$h_3=h_3^{(e)}$$

на поверхностях диафрагм.

Введением потенциальной функции посредством

$$\vec{h}^{(e)}=grad\,\varphi, \tag{1.9}$$

и с учетом того, что части $|x_1|>a$ поверхностей не деформируются, задача определения индуцированного магнитного поля $\vec{h}^{(e)}$, согласно (1.5) - (1.9), сводится к решению следующих задач для уравнений Лапласа в полуплоскостях $x_3>b+2\delta_1$ и $x_3<-b-2\delta_2$ и в слое $|x_3|<b$:

в полуплоскостях $x_3>b+2\delta_1$ и $x_3<-(b+2\delta_2)$

$$\Delta\varphi=0$$

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right|_{x_3=(-1)^{i-1}(b+2\delta_i)}=\begin{cases}H_0\dfrac{\partial w_1}{\partial x_1}, & \text{где } |x_1|\le a\\ 0, & \text{где } |x_1|>a\end{cases} \tag{1.10}$$

в слое $|x_3|<b$

$$\Delta\varphi=0$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}=\begin{cases}H_0\dfrac{\partial w_1}{\partial x_1}, & \text{где } |x_1|\le a,\ x_3=b\\ H_0\dfrac{\partial w_2}{\partial x_1}, & \text{где } |x_1|\le a,\ x_3=-b\\ 0, & \text{где } |x_1|>a,\ x_3=\pm b\end{cases} \tag{1.11}$$

Решения краевых задач (1.10) и (1.11)известны. Использованием этих решений из (1.9) определено индуцированное в указанных областях магнитное поле $\vec{h}^{(e)}$ и путем предельного перехода получены следующие представления интересующих нас величин $h_1^{(e)\pm}$:

$$h_1^{(e)+}=\begin{cases}-\dfrac{H_0}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\partial w_1}{\partial\xi}\dfrac{d\xi}{x_1-\xi}, & \text{где } x_3=b+2\delta_1\\ \dfrac{H_0}{4b}\displaystyle\int_{-a}^{a}\left[K\dfrac{\partial w_1}{\partial\xi}-\dfrac{1}{K}\dfrac{\partial w_2}{\partial\xi}\right]d\xi, & \text{где } x_3=-b\end{cases}$$

$$h_1^{(e)-}=\begin{cases}\dfrac{H_0}{4b}\displaystyle\int_{-a}^{a}\left[\dfrac{1}{K}\dfrac{\partial w_1}{\partial\xi}-K\dfrac{\partial w_2}{\partial\xi}\right]d\xi, & \text{где } x_3=b\\ -\dfrac{H_0}{\pi}\displaystyle\int_{-a}^{a}\dfrac{\partial w_2}{\partial\xi}\dfrac{d\xi}{x_1-\xi}, & \text{где } x_3=-b-2\delta_2\end{cases}\qquad(1.12)$$

где

$$K(x_1,\xi)=th\frac{\pi(\xi-x_1)}{4b}.$$

Из (1.6) вычисляя $\sigma_{13}^{(i)\pm}$ и $\sigma_{33}^{(i)\pm}$, подставляя в (1.4) и учитывая (1.12), получим следующую систему связных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений колебания пластинок:

$$D_i\frac{\partial^4 w_i}{\partial x_1^4}+2\rho_i\delta_i\frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2}-2\mu_0\delta_i H_0^2\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_1^2}-$$
$$-\frac{1}{\pi}\mu_0 H_0^2\int_{-a}^{a}\left[\frac{\pi}{4b}K\frac{\partial w_{3-i}}{\partial\xi}+\left(\frac{1}{x_1-\xi}-\frac{\pi}{4b}\frac{1}{K}\right)\frac{\partial w_i}{\partial\xi}\right]d\xi=\frac{1-(-1)^i}{2}P\qquad(1.13)$$

(i=1,2)

К системе уравнений (1.13) в каждом конкретном случае необходимо присоединить обычные однородные условия закрепления краев $x_1=\pm a$ пластинок. Для определенности, в дальнейшем принимается, что края пластинок жестко заделаны, т.е.

$$w_i\big|_{x_1=\pm a}=0,\qquad \frac{\partial w_i}{\partial x_1}\Big|_{x_1=\pm a}=0\qquad(1.14)$$

Из (1.13) видно, что благодаря магнитному полю, вынужденные колебания верхней пластинки (под действием возмущающей силы P) передаются к нижней пластинке, которая свободна от внешних механических нагрузок.

2. Рассмотрим вопрос сведения задачи вынужденных колебаний (1.13), (1.14) к решению системы интегральных уравнений. С этой целью предполагая, что $P(x_1,t)=P_0\sin\omega t(P_0=const)$ решения системы (1.15) представим в виде

$$w_i(x_1,t)=w_i(x_1)\sin\omega t\qquad(2.1)$$

где $w_i(x_1)$, согласно (1.13) и (1.14), являются решениями следующей неоднородной задачи (написанной в безразмерной форме) на отрезке [-1;1]

$$\frac{d^4\overline{w}_i}{dx^4}-\alpha_i\frac{d^2\overline{w}_i}{dx^2}-\beta_i\overline{w}_i-\gamma_i\int_{-1}^{1}\left[\frac{\pi}{4b}\frac{h_{3-i}}{h_i}k\frac{d\overline{w}_{3-i}}{d\zeta}+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{1}{1-\zeta}-\frac{\pi}{4b}\frac{1}{k}\right)\frac{d\overline{w}_i}{d\zeta}\right]d\zeta=\frac{1-(-1)^i}{2}P_{0i}\qquad(2.2)$$

$$\overline{w}_i\big|_{x=\pm1}=0,\qquad \frac{\overline{w}_i}{dx}\Big|_{x=\pm1}=0\qquad(2.3)$$

Здесь

$$\alpha_i = \frac{2\mu_0 H_0^2}{\overline{E}_i}\left(\frac{\delta_i}{a}\right)^2,\ \beta_i = \frac{2\rho_i a^2\omega^2}{\overline{E}_i}\left(\frac{\delta_i}{a}\right)^2,\ \gamma_i = \frac{\mu_0 H_0^2}{\pi\overline{E}_i}\left(\frac{\delta_i}{a}\right),$$
$$P_{0i} = \frac{P_0}{\overline{E}_i},\ \overline{E}_i = \frac{D_i\delta_i}{a^4},\ K(x,\zeta) = th\frac{\pi(\zeta - x)}{4\overline{b}},\tag{2.4}$$
$$\overline{w}_i = \frac{w_i}{h},\ x = \frac{x_1}{a},\ \zeta = \frac{\xi}{a},\ \overline{b} = \frac{b}{a}.$$

Приходим к выводе системы интегральных уравнений, обозначая $U_i(x) = \frac{d^4\overline{w}_i}{dx^4}$. Тогда для функций $\overline{w}_i$ и их производных получим следующие представления:

$$\frac{d^3\overline{w}_i}{dx^3} = \int_{-1}^{x} U_i(t)dt + C_1^{(i)}$$
$$\frac{d^2\overline{w}_i}{dx^2} = \int_{-1}^{x}(x-t)U_i(t)dt + C_1^{(i)}x + C_2^{(i)}$$
$$\frac{d\ \overline{w}_i}{dx} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{x}(x-t)^2 U_i(t)dt + C_1^{(i)}\frac{x^2}{2} + C_2^{(i)}x + C_3^{(i)}\tag{2.5}$$
$$\overline{w}_i = \frac{1}{6}\int_{-1}^{x}(x-t)^3 U_i(t)dt + C_1^{(i)}\frac{x^3}{6} + C_2^{(i)}\frac{x^2}{2} + C_3^{(i)}x + C_4^{(i)}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.3) определяем постоянные $C_k^{(i)}$

$$C_1^{(i)} = -\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(1-t)^2(2+t)U_i(t)dt,\ C_2^{(i)} = -\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(1-t)^2 U_i(t)dt,$$
$$C_3^{(i)} = -\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}(1-t)^2 tU_i(t)dt,\qquad C_1^{(i)} = -\frac{1}{24}\int_{-1}^{1}(1-t)^2(2t+1)U_i(t)dt\tag{2.6}$$

Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.2) для определения $u_i(x)$ получим следующую систему интегральных уравнений:

$$u_i = \int_{-1}^{1}[\alpha_i E_1(x,t) + \beta_i(x,t)]u_i(t)dt + \gamma_i\int_{-1}^{1}\left[\frac{\pi}{4\overline{b}}\frac{h_{3-i}}{h_i}K(x,\zeta)\int_{-1}^{1}E_2(\zeta,t)u_{3-i}(t)dt + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{x-\xi} - \frac{\pi}{4\overline{b}}\frac{1}{K(x,\zeta)}\right)\int_{-1}^{1}E_1(\zeta,t)u_i(t)dt\right]d\zeta + \frac{1-(-1)^i}{2}P_{0i}\tag{2.7}$$

где

$$E_1(x,t) = \chi_1(x,t) - \frac{1}{4}(1-t)^2\left[x(2+t)+1\right],$$
$$E_2(x,t) = \chi_2(x,t) - \frac{1}{8}(1-t)^2\left[x^2(2+t)+2x-1\right],$$
$$E_3(x,t) = \chi_3(x,t) - \frac{1}{24}(1-t)^2\left[x^3(2+t)+3x(x-t)-2t-1\right],\tag{2.8}$$
$$\chi_j(x,t) = \begin{cases}(x-t)^j, & \text{где } x < t\\ 0, & \text{где } x \ge t\end{cases}\qquad (j = 1,2,3)$$

Таким образом, рассматриваемая задача вынужденных магнитоупругих колебаний сведена к решению неоднородной системы сингулярных интегральных уравнений (2.7).

3. Предварительно рассмотрим случай одной пластинки. В этом случае уравнение и соответствующие граничные условия описывающие вынужденные колебания легко

получить из (1.13) и (1.14) путем предельного перехода $(b \to \infty)$. В результате имеем

$$D\frac{\partial^4 w}{\partial x_1^4} + 2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\mu_0 h H_0^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - \frac{2\mu_0 H_0^2}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\partial w}{\partial \xi}\frac{d\xi}{x_1-\xi} = P \tag{3.1}$$

$$w=0,\ \frac{\partial w}{\partial x}=0 \quad \text{при } x_1 = \pm a$$

Аналогичным образом, как в предыдущем пункте, краевая задача (3.1) сводится к решению следующего интегрального уравнения:

$$v(x) - \int_{-1}^{1}\left[K_1(x,t)\ln|x-t| + K_2(x,t)\right]v(t)dt = 1 \tag{3.2}$$

Здесь

$$K_1(x,t) = \frac{1}{2}\gamma(t-x)^2,$$

$$K_2(x,t) = \alpha E_1(x,t) + \beta E_3(x,t) - \gamma E_4(x,t),$$

$$E_4(x,t) = \frac{(x-1)(x-2t+1)}{2}\ln|x-1| + \frac{(x-1)^2-(x-t)^2}{4} - (x-t)(t-1) -$$

$$-\frac{1}{4}(1-t)^2\left[\frac{(x^2-1)(2+t)+2(x-1)}{2}\ln|x-1| -\right.$$

$$\left.-\frac{(x^2-1)(2+t)-2(x+1)}{2}\ln|x+1| + x(2+t)+2\right],$$

$$\alpha = \frac{2\mu_0 H_0^2}{E}\left(\frac{h}{a}\right)^2,\ \beta = \left(\frac{3\pi}{4}\right)^4\frac{\omega^2}{\omega_0^2},\ \gamma = \frac{\mu_0 H_0^2}{\pi E}\left(\frac{h}{a}\right),$$

$$\omega_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{2a}\right)^2\sqrt{\frac{E\delta^3}{12\rho(1-\nu^2)}},\ v(x) = \frac{1}{P_0}\frac{d^4\overline{w}}{dx^4},$$

где ω_0 - частота собственных колебаний рассматриваемой пластинки в отсутствие магнитного поля.

Уравнение (3.2) будем решать методом, изложенным в [4]. Суть этого метода состоит в том, что при сведении интегрального уравнения (3.2) к системе линейных алгебраических уравнений для члена с логарифмической особенностью около диагонали $x = t$ принимается квадратурная формула с коэффициентами:

$$\tilde{A}_{l-1} = h\left(\ln h - \frac{1}{3}\right)\Big/3,\ \tilde{A}_l = 4h\left(\ln h - \frac{4}{3}\right)\Big/3,\ \tilde{A}_{l+1} = \tilde{A}_{l-1} \tag{3.4}$$

а для $K_2(x,t)$ и для всех величин вдали от диагонали принимается любая квадратурная формула, например формула Симпсона. В результате, решение уравнения (3.2) сводится к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$v(x_l) - \sum_{n=0}^{M}{}' A_n\left[K_1(x_l,x_n)\ln|x_l - x_n| + K_2(x_l,x_n)\right]v(x_n) -$$

$$-\sum_{n=l-1}^{l+1}\left[\tilde{A}_n K_1(x_l,x_n) + A_n K_2(x_l,x_n)\right]v(x_n) = 1 \tag{3.4}$$

где A_n - коэффициенты Симпсона, x_i (i = 0,...,M)- точки Гауссевой сети с шагом h, а штрих у знака суммы означает, что пропускаются сложители с индексами $l-1, l$ и $l+1$.

На основе (3.5) и последнего уравнения из (2.5) произведены вычисления значений амплитуды w/P_0 вынужденных колебаний в различных точках срединной плоскости пластинки при различных значениях B_0 ($B_0 = \mu_0 H_0$ - величина индукции

внешнего магнитного поля). Для расчета принято $E = 7.3*10^{10}$ н/м2, $\upsilon = 0.34$ (дюралюминиевая пластинка), $\delta/a = 0.01$; $\omega^2/\omega_0^2 = 0.5$. Результаты вычислений приведены в Табл.1. (первые строки). Рассмотрено также численное решение задачи собственных магнитоупругих колебаний (при тех же числовых данных, что и выше). В этом случае $P=0$ и система (3.5) является однородным. Из условия существования нетривиального решения этой системы для первой частоты ω_1 магнитоупругих колебаний при $B_O = 1$ тесла получено следующее числовое значение

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1.271$$

С полученным результатом рассматриваемая задача решена также методом Галеркина, представляя решение задачи (3.1) в виде

$$w = w_0\left(a^2 - x_1^2\right)^2 \sin \omega t. \tag{3.6}$$

Подставляя (3.6) в (3.1) и ортогонализируя для определения w_O получим формулу

$$w_0 = \frac{\dfrac{112}{27\pi^4} P_0}{\dfrac{14}{9\pi^4}\left(64 + \dfrac{128}{21}\alpha + \dfrac{28}{9}\gamma\right) - \dfrac{\omega^2}{\omega_0^2}}. \tag{3.7}$$

На основе (3.7) при тех же исходных данных вычислены значения амплитуды w/P_O в выбранных выше точках пластинки. Результаты вычислений приведены также в Табл.1. (вторые строки).

Таблица 1.

X \ B_0	0.5	1.0	1.5	2.0
0	0,049300 / 0,052697	0,040948 / 0,042767	0,029761 / 0,032545	0,022811 / 0,024385
$\frac{2}{5}$	0,034786 / 0,037183	0,028659 / 0,030176	0,020604 / 0,022964	0,016146 / 0,017206

При $P = 0$ из (3.7) легко получить следующую формулу для определения первой частоты собственных магнитоупругих колебаний

$$\frac{\omega^2}{\omega_0^2} = 1{,}022 + 0{,}097\alpha + 0{,}447\gamma \tag{3.8}$$

Используя выбранные выше исходные данные ($E = 7.3*10^{10}$ н/м2, $\nu = 0.34$, $\delta/a = 0.01$; $B_O = 1$ тесла) из (3.8) для ω_1 получим:

$$\frac{\omega_1}{\omega_0} = 1{,}279$$

Сравнивая значения амплитуды вынужденных колебаний (Табл.1.), а также значения первой частоты собственных магнитоупругих колебаний полученные на основе численного метода и метода Галеркина легко заметить, что 1) метод Галеркина дает завышенные значения для указанных величин и 2) расхождение результатов не превышает 5 %, гарантирующее применимость метода Галеркина при решении рассматриваемых типов задач магнитоупругих колебаний тонких пластин.

4. Используя рассуждения предыдущего пункта, задачу (1.13), (1.14) будем

решать методом Галеркина, представляя w_i в виде

$$w_i(x_1,t)=w_{0i}\left(a^2-x_1^2\right)^2\sin\omega t \tag{4.1}$$

Подставляя (4.1) в (1.13) и ортогонализируя, после ряда преобразований приходим к следующей системе неоднородных алгебраических уравнений относительно w_{01} и w_{02}:

$$\begin{cases}\left(\omega_{01}^2-\omega^2\right)w_{01}+m_1w_{02}=g_1\\ \left(\omega_{02}^2-\omega^2\right)w_{02}+m_2w_{01}=0\end{cases} \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned}
\omega_{0i}^2&=\frac{63}{2}\frac{\overline{E}_i}{2\rho_i\delta_i^2}+\frac{\mu_0H_0^2}{2\rho_i\delta_i^2}\frac{315}{256a}\left[\frac{512}{105}\frac{\delta_i}{a}-\left(B-\frac{c}{4\overline{b}}\right)\right],\\
m_i&=\frac{1}{4\overline{b}}\frac{\mu_0H_0^2}{2\rho_i\delta_i^2}\frac{315}{256a}A,\\
g_1&=\frac{21}{16a^4}\frac{P_0}{2\rho_1\delta_1},\\
B&=\int_{-1}^{1}\int\frac{1}{x-\zeta}\left(\zeta^3-\zeta\right)\left(1-x^2\right)^2d\zeta dx,\\
A&=\int_{-1}^{1}\int th\frac{\pi(\zeta-x)}{4\overline{b}}\left(\zeta^3-\zeta\right)\left(1-x^2\right)^2d\zeta dx,\\
c&=\int_{-1}^{1}\int cth\frac{\pi(\zeta-x)}{4\overline{b}}\left(\zeta^3-\zeta\right)\left(1-x^2\right)^2d\zeta dx
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Решив систему (4.2) относительно ω_{01} и ω_{02} получим:

$$\begin{aligned}
w_{01}&=\frac{g_1\left(\omega_{02}^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_{01}^2-\omega^2\right)\left(\omega_{02}^2-\omega^2\right)-m_1m_2},\\
w_{02}&=\frac{g_1m_2}{\left(\omega_{01}^2-\omega^2\right)\left(\omega_{02}^2-\omega^2\right)-m_1m_2}
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Для простоты рассмотрим случай пластин с одинаковыми физическими и геометрическими параметрами $(E_1=E_2=E,\ \upsilon_1=\upsilon_2=\upsilon,\ \delta_1=\delta_2=h,\ \rho_1=\rho_2=\rho)$, при $P_O=const$. Тогда из (4.4) найдем

$$w_{01}=\frac{\left(\omega_{02}^2-\omega^2\right)g_1}{\left(\omega_1^2-\omega^2\right)\left(\omega_2^2-\omega^2\right)},\quad w_{02}=\frac{g_1m}{\left(\omega_1^2-\omega^2\right)\left(\omega_2^2-\omega^2\right)} \tag{4.5}$$

где

$$\omega_0^2=\frac{63}{2}\frac{\overline{E}}{2\rho h^2}+\frac{\mu_0H_0^2}{2\rho h}\frac{315}{256a}\left[\frac{512}{105}\frac{h}{a}-\left(B-\frac{c}{4\overline{b}}\right)\right],$$

$$\omega_i^2=\omega_0^2+(-1)^i\frac{\mu_0H_0^2}{2\rho h}\frac{315}{256a}\frac{1}{4\overline{b}}A.$$

Зависимость w_1 и w_2 от частоты возмущающей силы (формула (4.5)) показана на фигуре 2 и полностью аналогична случаю магнитоупругой системы из сверхпроводящих пластин [5]. Из этой фигуры видно, что с возрастанием ω обе амплитуды монотонно увеличиваются и стремлятся к бесконечности, когда приближается к первой собственной частоте (наступление первого резонанса). В этой области обе амплитуды положительны, т.е. обе пластинки колеблются в фазе с возмущающей силой. Когда $\omega_1<\omega<\omega_0$

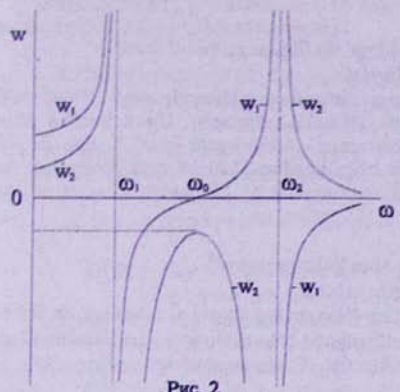

Рис. 2

амплитуды w_1 и w_2 имеют отрицательны значения, т.е. обе пластинки колеблются со сдвигом 180° относительно возмущающей силы, но еще находятся в одной фазе друг с другом. В интервале $\omega_0 \le \omega < \omega_2$ амплитуда w_1 вновь становится положительной (переходя через нуль при $\omega = \omega_0$), тогда как w_2 остается отрицательной. Это значит, что в рассматриваемом интервале колебания обеих пластин сдвинуты по фазе 180°, причем колебание верхней пластинки находится в одной фазе с возмущающей силой. Наконец, когда приближается ко второй собственной частоте ω_2, обе амплитуды неограниченно возрастают и наступают условия второго резонанса. После этого пластинки продолжают колебаться в различных фазах, но с убывающими амплитудами, и когда очень велика, колебания обеих пластин почти исчезают. Определенное практическое значение имеет w_1=0 при $\omega = \omega_0$. Это означает, что возмущающая сила, действуя на верхнюю пластинку, вызывает колебания только нижней пластинки.

Таким образом, при помощи магнитного поля колебания (в том числе и резонансные) одной пластинки (на которой действует вынуждающая сила) бесконтактно передаются ко второй пластинке. Причем, соответствующим выбором параметров задачи можно достичь того, чтобы в основном колебалась только вторая (свободная от механических нагрузок) пластинка с регулируемой амплитудой.

Литература

1.Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин, М., Наука,1977г.,272 стр.
2.Kaliski S. Magnetoelastic vibration of perfectly conducting plates and bars assuming the principle of plane sections.- Proc. Vibr., Probl, 1962, 3,N4, p.225-234.
3.Багдасарян Г.Е. Уравнения магнитоупругих колебаний тонких идеально проводящих пластин, Киев, Прикладная Механика,1983, т.XIX, N12, стр. 87-91.
4.Васильев Е.Н. Возбуждение тел вращения, М.,Радио и связь,1987, 272 стр.
5.Багдасарян Г.Е. Бесконтактный способ возбуждения резонансных колебаний в сверхпроводящей пластинке,Изв .АН Арм ССР "Механика", 1989, N6, стр. 3-9.