Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 18, 1997, 118-122.

Исследование нелинейных магнитоупругих колебаний пластин на основе многомасштабного метода решения дифференциальных уравнений

Д. Д. Асанян, Г. М. Хачатрян

Институт механики НАН РА

Многомасштабным методом исследованы вынужденные нелинейные колебания проводящей пластинки в наклонном магнитном поле. Получены формулы для определения амплитуды и частоты колебания, когда пластинка делает резонансные и нерезонансные вынужденные колебания. Проведено исследование на устойчивость таких колебаний.

Пусть упругая изотропная идеально проводящая пластинка-полоса постоянной толшины $2h$ отнесена к декартовой системе координат x_1, x_2, x_3 так, что серединная плоскость недеформированной пластинки совпадает с координатной плоскостью x_1x_2. Пластинка занимает область $(0 \le x_1 \le l, -\infty < x_2 < \infty, -h \le x_3 \le h)$, колеблется в вакууме при наличии внешнего магнитного поля $\vec{H}(H_{01}, 0, H_{03})$. На поверхности $x_3 = h$ действует внешняя нестационарная механическая сила $P(t)$. Будем пользоваться основными предположениями нелинейной теории магнитоупругости гибких пластин, считая справедливой гипотезу магнитоупругости тонких тел [2]. Считается также, что влиянием тангенциальных составляющих сил инерции и токов смещения на характеристики магнитоупругих колебаний пластинки можно пренебречь [2,3].

На основе принятых предположений в работе [3] получены основные уравнения и соотношения, описывающие нелинейные колебания проводящей пластинки в магнитном поле. В силу этого в работах [4,5] рассмотрены частные задачи одномерных (все величины не зависят от координаты x_2) нелинейных колебаний проводящих пластин в стационарном магнитном поле. Здесь аналогично указанным работам рассматриваемая задача нелинейных вынужденных колебаний сводится к решению следующего нелинейного уравнения:

$$D\frac{\partial^4 W}{\partial x_1^4} + 2\rho h\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{h}{2\pi}\left(H_{03}^2 + \frac{H_{01}^2}{kh}\right)\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} - \frac{3H_{01}H_{03}}{2\pi k}\frac{\partial W}{\partial x_1}\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} - \\ - \frac{Ehr}{\alpha(1-\nu^2)}\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2}\int_0^l\left(\frac{\partial W}{\partial x_1}\right)^2 dx + \varepsilon\mu\frac{\partial W}{\partial t} = P(t). \tag{1}$$

Рассматриваются следующие краевые условия на краях пластинки:

$$W = 0, \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = 0 \\ W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x_1} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = l, \tag{2}$$

где $W(x_1, t)$ - искомое перемещение точек серединной плоскости пластинки [3,5], ε- малый параметр, μ - вязкость материала пластинки,

$$\Omega^2=\Omega_0^2\alpha,\qquad \alpha=1+\frac{1-\nu^2}{2}\left(\frac{l}{h}\right)^2\left(H_{03}^2+\frac{H_{01}^2}{kh}\right),$$

$$\Omega_0=\sqrt{\frac{D}{2\rho h}}\frac{15.45}{l^2},\quad \gamma=-\frac{3(1-\nu^2)}{14\pi kh}\frac{l}{2h}\frac{H_{01}H_{03}}{\alpha E},$$

$$\eta=-\frac{384}{245}\frac{r}{l},\qquad D=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)},$$

E,ν - упругие постоянные материала пластинки, ρ - плотность материала пластинки, k - волновое число, которое можно найти путем асимптотического решения соответствующей линейной задачи магнитоупругих колебаний. r -постоянная, характеризуюшая сближение кромок пластинки [5]. После разделения переменных

$$W(x_1,t)=x(t)\left(\left(\frac{x_1}{l}\right)^4-\frac{3}{2}\left(\frac{x_1}{l}\right)^3+\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{l}\right)\right)$$

задача (1)-(2) сводится к исследованию следующего нелинейного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\Omega^2x=\varepsilon\left(-\mu\frac{dx}{dt}+\gamma x^2+\eta x^3\right)+P_1\cos\lambda t\ . \tag{3}$$

При выводе (3) предполагалось, что внешняя сила имеет вид $P(t)=P_0\cos\lambda t$ $(P_0,\lambda=const)$. В общем случае аналитическое решение уравнения (3) довольно сложно. Поэтому здесь использован асимптотический метод (метод многих масштабов [1]) для определения $x(t)$. Различаются четыре случая в зависимости от того, является ли внешняя сила "мягкой" (т.е. $P_1=O(\varepsilon)$), или "жесткой" (т.е. $P_1=O(1)$), и является ли возбуждение резонансным (т.е. $\lambda-\Omega=O(\varepsilon)$) или нерезонансным ($\lambda-\Omega=O(1)$).

1. Мягкое нерезонансное возбуждение.

В этом случае имеем $P_1=\varepsilon p$, где $p=O(1)$. Предположим, что имеет место разложение вида [1]

$$x(t)=x_0(T_0,T_1,T_2)+\varepsilon x_1(T_0,T_1,T_2)+\varepsilon^2x_2(T_0,T_1,T_2)+O(\varepsilon^3) \qquad 4)$$

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial T_0}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1}+\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}+\ldots,\qquad T_n=\varepsilon^n t\ \ (n=0,1,2,\ldots) \tag{5}$$

Подставляя (3) и (4) в (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим

$$\frac{\partial^2x_0}{\partial T_0^2}+\Omega^2x_0=0 \tag{6}$$

$$\frac{\partial^2x_1}{\partial T_0^2}+\Omega^2x_1=-2\frac{\partial^2x_0}{\partial T_0\partial T_1}-\mu\frac{\partial x_0}{\partial T_0}+\gamma x_0^2+\eta x_0^3+p\cos\lambda T_0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2x_2}{\partial T_0^2}+\Omega^2x_2=-2\frac{\partial^2x_0}{\partial T_0\partial T_2}-2\frac{\partial^2x_1}{\partial T_0\partial T_1}-\frac{\partial^2x_0}{\partial T_1^2}-\mu\frac{\partial x_0}{\partial T_1}-\mu\frac{\partial x_1}{\partial T_0}+2\gamma x_0x_1+3\eta x_0^2x_1 \tag{8}$$

Поэтапно решая (6)-(8), при этом требуя обращения в нуль коэффициента при $\exp(i\Omega T_0)$, порождающего вековые члены, имеем

$$x_0 = A(T_1,T_2)\exp(i\Omega T_0) + CC \tag{9}$$

$$x_1 = -\frac{\eta A^3}{8\Omega^2}\exp(3i\Omega T_0) - \frac{\gamma A^2}{3\Omega^2}\exp(2i\Omega T_0) - \frac{p}{2(\Omega^2-\lambda^2)}\exp(i\lambda T_0) + \frac{\gamma A\overline{A}}{\Omega^2} + CC\ , \tag{10}$$

где CC означает комплексно сопряженное предыдущих членов. Для определения $A(T_1,T_2)$ получается уравнение

$$-2i\Omega\frac{dA}{dt} + \varepsilon(-i\Omega\mu A + 3\eta A^2\overline{A}) + \varepsilon^2\left(\frac{\mu^2}{4}A + \left(\frac{10\gamma^2}{3\Omega^2} - i\frac{32\mu}{2\Omega}\right)A^2\overline{A} + \frac{15\eta^2}{8\Omega^2}A^3\overline{A}^2\right) = 0 \tag{11}$$

Если искать A в виде $2A = a(t)\exp(i\varphi(t))$, то после выделения действительной и мнимой частей из (11) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dt} + \dfrac{1}{2}\mu a\varepsilon + \dfrac{3\eta\mu a^3}{16\Omega^2}\varepsilon^2 = 0 \\ \dfrac{d\varphi}{dt} + \dfrac{3\eta a^2}{8\Omega}\varepsilon + \left(\dfrac{\mu^2}{8\Omega} + \dfrac{5\gamma^2 a^2}{12\Omega^3} + \dfrac{15\eta^2 a^4}{2^8\Omega^3}\right)\varepsilon^2 = 0, \end{cases} \tag{12}$$

решение которой имеет вид

$$a(t) = 4\Omega\sqrt{\frac{\exp(-\mu\varepsilon t)}{3\varepsilon(1-C\exp(-\mu\varepsilon t))}} \tag{13}$$

$$\varphi(t) = -\left(2\eta\Omega + \frac{20\gamma^2}{9\Omega}\varepsilon\right)\left(\frac{1}{C\mu\varepsilon}\ln(C\exp(-\mu\varepsilon t)-1) + C_1\right) + \frac{5\eta^2\Omega}{3\mu C^2\varepsilon}(\ln(C\exp(-\mu\varepsilon t)-1) -$$
$$-\frac{1}{C\exp(-\mu\varepsilon t)-1} + C_1) - \varepsilon^2\frac{\mu^2}{8\Omega}(t + C_2) \tag{14}$$

Из (9), (11) видно, что наличие мягкого нерезонансного возбуждения в первом приближении не влияет ни на фазу, ни на амплитуду. Более того, поскольку вынуждающая функция мягкая, то собственные колебания системы $p = 0$ преобладают над вынужденными колебаниями.

2. Мягкое резонансное возбуждение.

В этом случае $P_1 = \varepsilon p,\ p = O(1)$ и $\lambda - \Omega = \sigma\varepsilon,\ \sigma = O(1)$. Выразим функцию возбуждения через T_0 и T_1 :

$$P_1\cos\lambda t = \varepsilon p\cos(\Omega T_0 + \sigma T_1)\ .$$

Поступая анологично случаю мягкого нерезонанса (т.е. принимая разложение (4) и (5)), получим систему уравнений, похожую на (6), (7) и (8), с той лишь разницей, что в уравнении (7) вместо члена $P_1\cos\lambda T_0$ надо взять $P_1\cos(\Omega T_0 + \sigma T_1)$.

Тогда, решая полученную систему уравнений, получим

$$x_0 = A(T_1,T_2)\exp(i\Omega T_0) + CC \tag{15}$$

$$x_1 = -\frac{\eta A^3}{8\Omega^2}\exp(3i\Omega T_0) - \frac{\gamma A^2}{3\Omega^2}\exp(2i\Omega T_0) + \frac{\gamma A\overline{A}}{\Omega^2} + CC \tag{16}$$

Для определения $A(T_1, T_2)$ получается

$$-2i\Omega\frac{dA}{dt} + \varepsilon\left(3\eta A^2\overline{A} - i\mu\Omega A + \frac{p}{2}\exp(i\sigma T_1)\right) + \varepsilon^2\left(\frac{\mu^2}{4}A - i\frac{3\eta\mu}{2\Omega}A^2\overline{A} + i\frac{p\mu}{8\Omega}\exp(i\sigma T_1) + \right.$$

$$\left. + \frac{15\eta^2}{8\Omega^2}A^3\overline{A}^2 + \frac{3\eta p}{4\Omega^2}A\overline{A}\exp(i\sigma T_1) - \frac{p\sigma}{4\Omega}\exp(i\sigma T_1) - \frac{3\eta p}{8\Omega^2}A^2\exp(-i\sigma T_1) + \frac{10\gamma^2}{3\Omega^2}A^2\overline{A}\right) = 0 \tag{17}$$

Если в (17) ограничиться первым приближением, то для определения A получим

$$-2i\Omega\frac{dA}{dT_1} + 3\eta A^2\overline{A} - i\mu\Omega A + \frac{p}{2}\exp(i\sigma T_1) = 0 \tag{18}$$

Для решения уравнения (18) положим $A = a\exp(i(\varphi - \sigma T_1))$ и, выделив действительную и мнимую части, получим

$$\begin{cases} \dfrac{da}{dT_1} = -\dfrac{\mu}{2}a - \dfrac{p}{4\Omega}\sin\psi \\ a\dfrac{d\psi}{dT_1} = -na^3 + \sigma a - \dfrac{p}{4\Omega}\cos\psi \end{cases} \tag{19}$$

где $\psi = \varphi - \sigma T_1$, $n = \dfrac{3\eta}{2\Omega}$. Периодические решения, возбуждаемые внешними силами, соответствуют стационарным решениям системы (19), т.е. равенствам $\dfrac{da}{dT_1} = \dfrac{d\psi}{dT_1} = 0$ или

$$\begin{cases} -\dfrac{\mu}{2}\overline{a} - \dfrac{p}{4\Omega}\sin\overline{\psi} = 0 \\ -n\overline{a}^3 + \sigma\overline{a} - \dfrac{p}{4\Omega}\cos\overline{\psi} = 0 \end{cases} \tag{20}$$

Величины, помеченные чертой, относятся к стационарному решению. Из (20) можно получить следующее уравнение, из которого можно определить амплитуду стационарных колебаний:

$$\frac{\mu^2}{4}\rho + \rho(\sigma - n\rho)^2 = \frac{p^2}{16\Omega^2} = F^2, \qquad \rho = \overline{a}^2 \tag{21}$$

В первом приближении гармонические колебания задаются равенством

$$x(t) = x_0(t) = \tilde{a}\cos(\Omega t + \sigma\varepsilon t - \overline{\psi}) . \tag{22}$$

Следовательно, при приближении λ к Ω собственные колебания совпадают с вынужденными, в результате чего выходной сигнал синхронизируется с частотой возбуждения.

Для исследования устойчивости этих гармонических колебаний положим

$$\begin{cases} a = \overline{a} + \Delta a \\ \psi = \overline{\psi} + \Delta\psi \end{cases} \tag{23}$$

Разлагая правые части уравнения (19) по степеням Δa и $\Delta\psi$ и сохраняя только линейные члены, получим

$$\begin{cases} \dfrac{d\Delta a}{dT_1} = -\dfrac{\mu}{2}\Delta a - (\sigma\bar{a} - n\bar{a}^3)\Delta\psi \\ \dfrac{d\Delta\psi}{dT_1} = -\dfrac{1}{\bar{a}^2}(\sigma\bar{a} - 3n\bar{a}^3)\Delta a - \dfrac{\mu}{2}\Delta\psi \end{cases} \tag{24}$$

Предположим, что Δa и $\Delta\psi$ пропорциональны $\exp(sT_1)$. Тогда для определения s получим

$$s^2 + \mu s + \Delta = 0, \quad \Delta = \frac{\mu^2}{4} + (\sigma - n\rho)(\sigma - 3n\rho) \tag{25}$$

Из уравнения (25) следует [1]

а) при $D_1 = \dfrac{\mu^2}{4} - \Delta < 0$ стационарное решение $(\bar{a}, \bar{\psi})$ является устойчивым фокусом.

б) при $0 < \Delta < \dfrac{\mu^2}{4}$ положение равновесия является устойчивым узлом.

в) при $\Delta < 0$ положение равновесия является неустойчивым узлом.

Линии $D_1 = 0$ и $\Delta = 0$ являются сепаратрисами решения дифференциального уравнения (17). Остальные два случая (т.е. жесткое нерезонансное и мягкое нерезонансное) можно исследовать аналогично проведенным выше рассуждениям. Таким образом, на конкретном примере показано, что приближенным методом многих масштабов можно получить амплитуду и частоту вынужденных нелинейных колебаний пластинки.

Литература

1. Найфэ А.Х. Методы возмущений. М., Мир, 1976.
2. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В. Магнитоупругость тонких оболочек и пластин. М., Наука, 1977.
3. Багдасарян Г.Е., Даноян З.Н. Основные уравнения и соотношения нелинейных магнитоупругих колебаний тонких электропроводящих пластинок. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 1985, т.38, №2.
4. Багдасарян Г.Е., Хачатрян Г.М. Нелинейные колебания проводящей пластинки в продольном магнитном поле. Изв. НАН РА, Механика, 1991, т.44, №3.

Багдасарян Г.Е. Нелинейные колебания идеально проводящей пластинки в наклонном магнитном поле. Изв. НАН РА, Механика, 1995, т.48, №3.