

Численно-аналитическое исследование характера магнитоупругих величин в окрестности угловой точки составного ферромагнитного тела

Г. Е. Багдасарян, Д. Д. Асаян, Д. А. Саакян

Ереванский государственный университет

На основе линейных уравнений и поверхностных условий теории магнитоупругости магнитомягкого ферромагнитного тела [1-3] изучено поведение магнитоупругих напряжений и магнитного поля в окрестности угловой точки составного призматического тела с поперечным сечением в виде кусочно-однородного клина. Построено местное решение сформулированной краевой задачи и на этой основе в пространстве параметров задачи получено уравнение предельной поверхности, являющейся границей области нулевого напряженного состояния края поверхности контакта. Предложенным численным методом (при фиксированных значениях параметров задачи, характеризующих магнитоупругие свойства материалов составного клина и напряженность внешнего магнитного поля) в плоскости (θ_1, θ_2) (фиг. 1) построены кривые, отделяющие области нулевого напряженного состояния от областей сильной концентрации магнитоупругих напряжений и индуцированного магнитного поля. Показано, что присутствие магнитного поля и взаимодействие механических и магнитных полей могут существенно изменить размеры областей нулевого напряженного состояния и дают возможность регулировать поведение магнитоупругих величин вблизи края поверхности контакта составного тела.

Аналогичные исследования в случае отсутствия магнитного поля, а также в задачах электроупругости проведены в работах [4-8].

Рассмотрена плоская задача магнитоупругости для изотропного составного призматического тела с поперечным сечением в виде кусочно-однородного клина, изготовленного из магнитомягких ферромагнитных материалов с различными магнитоупругими свойствами. Предположено, что рассматриваемое тело относится к цилиндрическим координатам x, r, θ так, что начало полярной системы координат (r, θ) помещено в угловой точке контура и отсчет угла θ производится от линии раздела (фиг. 1). Для определенности рассмотрен случай призматического тела, состоящего из двух различных призматических тел, соединенных (спаянных) между собой по общим частям боковых поверхностей, а плоскость раздела областей, соответствующих различным материалам, проходит через угловую точку контура. Поперечное сечение тела состоит из двух клиновидных областей Ω_1 и Ω_2 , имеющих общую вершину $(\Omega_1: 0 < r < \infty, 0 < \theta < \theta_1; \Omega_2: 0 < r < \infty, -\theta_2 < \theta < \infty)$. Тело находится во внешнем стационарном магнитном поле с заданным вектором напряженности $\vec{H}_0(0, H_0, 0)$, электромагнитные свойства среды, окружающей тело, эквивалентны свойствам вакуума.

Обозначим через $u_r^{(i)}, u_\theta^{(i)}$ ($i=1,2$), проекции вектора перемещения $\vec{u}^{(i)}$ точек ферромагнитного тела по направлениям r и θ , и через $\varphi^{(i)}$ - магнитный потенциал

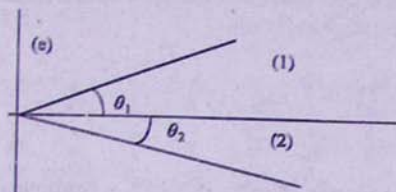


Рис. 1.

индуцированного в теле магнитного поля $\vec{h}^{(i)} = \text{grad} \varphi^{(i)}$. Тогда, с помощью основных уравнений и соотношений магнитоупругости диэлектрического магнитомягкого ферромагнитного тела [1,2], для определения указанных величин получается следующая система дифференциальных уравнений, поверхностные условия и условия контакта:

Уравнения в областях Ω_i имеют вид

$$\nabla^2 u_r^{(i)} + k_i \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(i)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial \theta} \right) + \lambda^{(i)} \cdot H_\theta^{(i)} \cdot \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 u_\theta^{(i)} + k_i \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} + \frac{u_r^{(i)}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta^{(i)}}{\partial \theta} \right) - \lambda^{(i)} H_\theta^{(i)} \frac{\partial^2 \varphi^{(i)}}{\partial r^2} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla^2 \varphi^{(i)} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \lambda^{(i)} = \frac{2\mu_0 Z_i}{\mu_i}, \quad k_i = \frac{1}{1-2\nu_i}, \quad Z_i = \mu_n - 1, \quad i = 1, 2$$

где ∇^2 - оператор Лапласа в полярной системе координат, μ_i и ν_i упругие постоянные, μ_n - магнитное восприимчивость сред, μ_0 - универсальная магнитная постоянная ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$).

Уравнение во внешней области (пространство вне тела) имеет вид

$$\nabla^2 \varphi^{(e)} = 0 \quad (4)$$

где $\varphi^{(e)}$ - магнитный потенциал вакуума ($\text{grad} \varphi^{(e)} = \vec{h}^{(e)}$). Индекс (e) здесь и в дальнейшем обозначает принадлежность к внешней области;

Граничные условия при $\theta = \theta_1$ и $\theta = -\theta_2$ имеют вид

$$\begin{aligned} t_{r0}^{(i)} + t_{r0}^{m(i)} &= t_{r0}^{m(e)}, \\ t_{\theta 0}^{(i)} + t_{\theta 0}^{m(i)} &= t_{\theta 0}^{m(e)}, \\ \varphi^{(i)} - \varphi^{(e)} + \chi_i u_\theta^{(i)} &= 0, \\ \mu_n \frac{\partial \varphi^{(i)}}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial \theta} &= 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (5)$$

где принято, что граничные плоскости $\theta = \theta_1$ и $\theta = -\theta_2$ свободны от напряжений;

Условия на линии контакта ($\theta = 0$) имеют вид

$$\vec{U}^{(1)} = \vec{U}^{(2)},$$

$$\begin{aligned}
 t_{r\theta}^{(1)} + t_{r\theta}^{m(1)} &= t_{r\theta}^{(2)} + t_{r\theta}^{m(2)}, \\
 t_{\theta\theta}^{(1)} + t_{\theta\theta}^{m(1)} &= t_{\theta\theta}^{(2)} + t_{\theta\theta}^{m(2)}, \\
 \varphi^{(1)} - \varphi^{(2)} + \left(\frac{\chi_1}{\mu_{r1}} - \frac{\chi_2}{\mu_{r2}} \right) u_{\theta}^{(1)} &= 0, \\
 \mu_{r1} \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta} - \mu_{r2} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial \theta} &= 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

В (5), (6) $t_{r\theta}^{(i)}, t_{\theta\theta}^{(i)}$ - магнитоупругие напряжения; $t_{r\theta}^{m(i)}, t_{\theta\theta}^{m(i)}, t_{r\theta}^{m(e)}, t_{\theta\theta}^{m(e)}$ - компоненты максвелловских тензор-напряжений соответственно в среде и в вакууме. Эти величины выражаются через $\tilde{U}^{(i)}, \varphi^{(i)}, \varphi^{(e)}$ следующим образом [1,2]:

$$\begin{aligned}
 t_{r\theta}^{(i)} &= \sigma_{r\theta}^{(i)} + \delta_1^{(i)} h_r^{(i)}, \quad t_{\theta\theta}^{(i)} = \sigma_{\theta\theta}^{(i)} + 2\delta_1^{(i)} h_{\theta}^{(i)}, \quad \delta_1^{(i)} = \mu_0 \chi_i H_{\theta}^{(i)}, \\
 t_{r\theta}^{m(i)} &= \mu_0 \mu_{ri} H_{\theta}^{(i)} h_r^{(i)}, \quad t_{\theta\theta}^{m(i)} = \mu_0 \frac{2\mu_{ri} - 1}{2} (H_{\theta}^{(i)})^2 + \mu_0 (2\mu_{ri} - 1) H_{\theta}^{(i)} h_{\theta}^{(i)}, \\
 \tilde{h}^{(i)} &= \text{grad} \varphi^{(i)}, \quad \tilde{h}^{(e)} = \text{grad} \varphi^{(e)}, \\
 t_{r\theta}^{m(e)} &= \mu_0 H_{\theta} h_r^{(e)}, \quad t_{\theta\theta}^{m(e)} = \mu_0 \frac{H_{\theta}^2}{2} + \mu_0 H_{\theta} h_{\theta}^{(e)}, \\
 \sigma_{r\theta}^{(i)} &= \mu_i \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}^{(i)}}{\partial r} - \frac{u_{\theta}^{(i)}}{r} \right], \\
 \sigma_{\theta\theta}^{(i)} &= \mu_i \left[(k_i + 1) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_{\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{u_r^{(i)}}{r} \right) + (k_i - 1) \frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r} \right],
 \end{aligned} \tag{7}$$

В каждой из клиновидных областей Ω_i и во внешней области поля перемещений магнитные потенциалы, следуя работам [4-8], ищем в виде

$$u_r^{(i)}(r, \theta) = r^{\alpha} u^{(i)}(\theta), \quad u_{\theta}^{(i)} = r^{\alpha} v^{(i)}(\theta), \tag{8}$$

$$\varphi^{(i)}(r, \theta) = H_{\theta} r^{\alpha} \psi^{(i)}(\theta), \quad \varphi^{(e)}(r, \theta) = H_{\theta} r^{\alpha} \psi^{(e)}(\theta),$$

где $u^{(i)}(\theta), v^{(i)}(\theta), \psi^{(i)}, \psi^{(e)}$ - неизвестные функции, $i = 1, 2, \alpha$ - физический параметр.

Решая уравнения (1) - (4) при помощи представления (8) для указанных неизвестных функций, получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 u^{(i)}(\theta) &= A_i \sin(\alpha - 1)\theta + B_i \cos(\alpha - 1)\theta + C_i \sin(\alpha + 1)\theta + D_i \cos(\alpha + 1)\theta + \gamma_i E_i \cos \alpha \theta + \gamma_i F_i \sin \alpha \theta, \\
 v^{(i)}(\theta) &= \gamma_{2i} A_i \cos(\alpha - 1)\theta - \gamma_{2i} B_i \sin(\alpha - 1)\theta + C_i \cos(\alpha + 1)\theta - D_i \sin(\alpha + 1)\theta + \gamma_{1i} E_i \sin \alpha \theta + \gamma_{1i} F_i \cos \alpha \theta,
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\psi^{(i)}(\theta) = E_i \sin \alpha \theta + F_i \cos \alpha \theta, \quad \psi^{(e)}(\theta) = E_e \sin \alpha \theta + F_e \cos \alpha \theta, \quad i = 1, 2$$

где

$$\gamma_i = \frac{\lambda_{0i} \alpha (\alpha - 1) (k_i \alpha + 2\alpha + 1)}{(k_i + 1)(1 - 4\alpha^2)}, \quad \gamma_{1i} = -\frac{\lambda_{0i} \alpha (\alpha - 1) (k_i \alpha + 2\alpha + k_i + 1)}{(k_i + 1)(1 - 4\alpha^2)},$$

$$\gamma_{2i} = \frac{k_i \alpha + k_i + 2}{k_i \alpha - k_i - 2}, \quad \lambda_{0i} = \lambda_i H_{\theta}^2 = \frac{2\mu_0 \chi_i}{\mu_i} H_{\theta}^2, \quad i = 1, 2.$$

$A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i$ ($i = 1, 2$), E_e, F_e - неизвестные постоянные.

Удовлетворяя граничным и контактным условиям (условия (5) и (6)) и исключая из рассмотрения частные решения неоднородной задачи для определения неизвестных постоянных, получаем однородную систему линейных алгебраических

уравнений. Из условия существования нетривиального решения указанной алгебраической системы получаем следующее уравнение относительно α :

$$\Delta(\alpha, b_c^2, \theta_1, \theta_2, \mu_1, \mu_2, \mu_{r1}, \mu_{r2}, \nu_1, \nu_2) = \text{Det} Q = 0 \quad (10)$$

где

$$Q = \begin{vmatrix} P_1^{(1)} & 0 & 1 & 0 & 0 & P_2^{(1)} & -\mu P_1^{(2)} & 0 & -\mu & 0 & 0 & -\mu P_1^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & P_2^{(1)} & 0 & 1 & -P_1^{(1)} & 0 & 0 & -\mu P_2^{(2)} & 0 & -\mu & \mu P_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & P_2^{(1)} & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -P_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ P_3^{(1)} & 0 & 1 & 0 & 0 & -P_3^{(1)} & -P_3^{(2)} & 0 & -1 & 0 & 0 & -P_3^{(2)} & 0 & 0 \\ P_3^{(1)} C_1^- & -P_3^{(1)} S_1^- & C_1^- & -S_1^- & P_3^{(1)} S_1 & P_3^{(1)} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\chi_2^{(1)} S_1 & -\chi_2^{(1)} C_1 \\ P_3^{(1)} S_1^- & P_3^{(1)} C_1^- & S_1^- & C_1^- & -P_3^{(1)} C_1 & P_3^{(1)} S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \chi_2^{(1)} C_1 & -\chi_2^{(1)} S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1^{(2)} C_2^- & P_1^{(2)} S_2^- & C_2^- & S_2^- & -P_1^{(2)} S_2 & P_1^{(2)} C_2 & \chi_2^{(2)} S_2 & -\chi_2^{(2)} C_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -P_1^{(2)} S_2^- & P_1^{(2)} C_2^- & -S_2^- & C_2^- & -P_1^{(2)} C_2 & -P_1^{(2)} S_2 & \chi_2^{(2)} C_2 & -\chi_2^{(2)} S_2 \\ P_4^{(1)} & 0 & P_5 & 0 & 0 & P_6^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ P_4^{(1)} C_1^- & -P_4^{(1)} S_1^- & P_5^{(1)} C_1^- & -P_5^{(1)} S_1^- & P_5^{(1)} S_1 & P_5^{(1)} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_1 & -C_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_1 & S_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_1 & -S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 & -S_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & P_1^{(2)} C_2^- & P_1^{(2)} S_2^- & P_2^{(2)} C_2^- & P_2^{(2)} S_2^- & -P_2^{(2)} S_2 & P_2^{(2)} C_2 & -S_2 & -C_2 \end{vmatrix}$$

где

$$S_i^\pm = \sin(\alpha \pm 1)\theta_i, \quad S_i = \sin \alpha \theta_i, \quad C_i^\pm = \cos(\alpha \pm 1)\theta_i, \quad C_i = \cos \alpha \theta_i,$$

$$P_1^{(1)} = \frac{k_i(\alpha-1)}{k_i\alpha - k_i - 2}, \quad P_2^{(1)} = \chi_1^{(1)} \frac{(k_i+1)(1-4\alpha^2) + 4\chi_i\alpha^2(1-k_i-2\alpha)}{2(k_i+1)(1-4\alpha^2)},$$

$$P_3^{(1)} = \frac{k_i(\alpha+1)}{k_i\alpha - k_i - 2}, \quad P_4^{(1)} = \chi_1^{(1)} \frac{(k_i+1)(1-4\alpha^2) + 4\chi_i\alpha(\alpha+1)(1-k_i-2\alpha)}{2(k_i+1)(1-4\alpha^2)},$$

$$P_5^{(1)} = \frac{k_i\alpha + k_i + 2}{k_i\alpha - k_i - 2}, \quad P_6^{(1)} = \chi_1^{(1)} \frac{2\chi_i\alpha(2\alpha^2 - k_i\alpha - k_i - 2)}{(k_i+1)(1-4\alpha^2)},$$

$$P_7^{(1)} = \chi_1^{(1)} \frac{2\chi_i\alpha(2\alpha^2 - k_i\alpha - 3\alpha - k_i - 1)}{(k_i+1)(1-4\alpha^2)},$$

$$R_1^{(1)} = \frac{\chi_1 P_3^{(1)}}{\mu_n}, \quad R_2^{(1)} = \frac{\chi_1}{\mu_n}, \quad R_3^{(1)} = \frac{1 - \chi_1 P_7^{(1)}}{\mu_n},$$

$$R_4^{(1)} = (1 - \mu_n) P_3^{(1)}, \quad R_5 = (1 - \mu_n), \quad R_6^{(1)} = \mu_n - (1 - \mu_n) P_7^{(1)},$$

$$\mu = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad \mu_n = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}, \quad b_c^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \mu_2},$$

$$\chi_1^{(1)} = \mu^{(2-1)} b_c^2 \frac{1}{\mu_n^2}, \quad \chi_2^{(1)} = \mu^{(2-1)} \frac{b_c^2}{2}, \quad i=1,2$$

Параметры, входящие в уравнение (10), меняются в следующих интервалах:

$$0 \leq \theta_i \leq 2\pi, \quad 0 < \mu_i < \infty, \quad 1 \leq \mu_n \leq 10^4, \quad 0 \leq \nu_i < 0.5, \quad i=1,2,$$

$$0 \leq b_c^2 \leq 1, \quad \theta_1 + \theta_2 \leq 2\pi \quad (11)$$

В частном случае, когда внешнее магнитное поле отсутствует ($b_c^2 = 0$), уравнение

(10) распадается на два независимых уравнения

$$\Delta_{0y} = 0, \quad \Delta_{0m} = 0.$$

Первое из этих уравнений получено в работе [4] при исследовании характера упругих напряжений вблизи угловой точки контура составного тела, а второе - в работе [9] при исследовании поведения магнитных полей у вершины кусочно-однородного ферромагнитного клина.

Как видно из (7) и (8), все компоненты магнитоупругих напряжений и магнитного поля вблизи угловой точки контура представляются в виде

$$i = r^{\alpha-1} R(r, \theta), \quad (12)$$

где $R(r, \theta)$ - ограниченная и вообще не стремящаяся к нулю при $r \rightarrow 0$ функция, а α , - действительная часть корня α уравнения (10). Следовательно, характер магнитоупругого состояния около края поверхности контакта определяется величиной действительной части корня $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$. Если $\alpha_r > 1$, то в малой окрестности краевой точки поверхности контакта имеем нулевое напряженное состояние. Если же $\alpha_r < 1$, то при приближении к угловой точке магнитоупругие напряжения неограниченно возрастают (сильная концентрация напряжений). В случае $\alpha_r = 1$, напряжения на краях поверхности контакта конечны и в целом отличны от нуля.

Таким образом, определение характера магнитоупругого напряженного состояния около угловой точки составного ферромагнитного тела, приводится к нахождению корня, имеющего наименьшую положительную действительную часть $\alpha = \alpha_r + i\alpha_i$, трансцендентного уравнения (10).

Считается, что уравнение (10), независимо от значений величин $b_i^2, \theta_i, \nu_i, \mu_i, \mu_n, (i=1,2)$ из области их изменения (11), имеет только один действительный корень, заключенный в пределах $0 < \alpha \leq 1$ ($\alpha_r < 0$ - не имеет смысла, так как не удовлетворяются энергетические условия [6]). Тогда, переходя к пределу в (10) при , в девятимерном пространстве параметров получаем следующее уравнение предельной поверхности, являющейся границей области нулевого напряженного состояния края поверхности контакта.

$$\text{Det} Q^* = 0, \quad (13)$$

где

$$Q^* = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & G_2^{(1)} & -\mu G_1^{(2)} & 0 & -\mu & 0 & 0 & -\mu G_2^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & G_3^{(1)} & 0 & 1 & -G_4^{(1)} & 0 & 0 & -\mu G_3^{(2)} & 0 & -\mu & \mu G_4^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & G_5^{(1)} & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -G_6^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ G_1^{(1)} & 0 & 1 & 0 & 0 & -G_7^{(1)} & -G_8^{(2)} & 0 & -1 & 0 & 0 & -G_9^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1^{(1)} & -S_1^{(1)} & G_2^{(1)} S_1^{(1)} & G_3^{(1)} C_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_2^{(1)} S_1^{(1)} & -\lambda_2^{(1)} C_1^{(1)} \\ 0 & G_2^{(1)} & S_1^{(1)} & C_1^{(1)} & -G_4^{(1)} C_1^{(1)} & G_5^{(1)} S_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2^{(1)} C_1^{(1)} & -\lambda_2^{(1)} S_1^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2^{(2)} & S_2^{(2)} & -H_1^{(2)} S_1^{(2)} & H_2^{(2)} C_1^{(1)} & \lambda_2^{(2)} S_1^{(1)} & -\lambda_2^{(2)} C_1^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_3^{(2)} & -S_2^{(2)} & C_2^{(2)} & -G_4^{(2)} C_1^{(1)} & -G_5^{(2)} S_2^{(2)} & \lambda_2^{(2)} C_1^{(1)} \\ H_1^{(1)} & 0 & H_2 & 0 & 0 & H_4^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ H_1^{(1)} & 0 & H_2^{(1)} C_1^{(1)} & -H_2^{(1)} S_1^{(1)} & H_3^{(1)} S_1^{(1)} & H_4^{(1)} C_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -S_2^{(1)} & -C_2^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_1^{(1)} & S_1^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_1^{(1)} & -S_1^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_1^{(2)} & 0 & H_2^{(2)} C_1^{(2)} & H_3^{(2)} S_2^{(2)} & -H_4^{(2)} S_1^{(1)} & H_5^{(2)} C_1^{(1)} & S_2^{(2)} & -C_2^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_1^{(1)} & -S_1^{(1)} & -C_1^{(1)} & S_1^{(1)} \end{vmatrix}$$

где

$$S_i^{(k)} = \text{Sink} \theta_i, \quad C_i^{(k)} = \text{Cosk} \theta_i, \\ G_2^{(1)} = \chi_1^{(1)} \frac{3+4\chi_1}{6}, \quad G_3^{(1)} = -k_1, \quad G_4^{(1)} = \chi_1^{(1)} \frac{3+8\chi_1}{6},$$

$$G_2^{(i)} = -(k_i + 1), G_6^{(i)} = \chi_i^{(i)} \frac{4k_i \chi_i}{3(k_i + 1)}, G_7^{(i)} = \chi_i^{(i)} \frac{4\chi_i}{3},$$

$$H_1^{(i)} = \frac{\chi_i G_2^{(i)}}{\mu_n}, H_2^{(i)} = \frac{\chi_i}{\mu_n}, H_3^{(i)} = \frac{1 - \chi_i G_7^{(i)}}{\mu_n},$$

$$H_4^{(i)} = (1 - \mu_n) G_2^{(i)}, H_5 = (1 - \mu_n), H_6^{(i)} = \mu_n - (1 - \mu_n) G_7^{(i)},$$

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_1}, \mu_n = \frac{\mu_{r2}}{\mu_{r1}}, b_c^2 = \frac{B_0^2}{\mu_0 \mu_2},$$

$$\chi_i^{(i)} = \mu^{(2-i)} b_c^2 \frac{1}{\mu_n^2}, \chi_2^{(i)} = \mu^{(2-i)} \frac{b_c^2}{2}, \quad i = 1, 2$$

Это уравнение имеет сложную структуру и содержит девять независимых параметров $b_c^2, \theta_1, \nu_i, \mu_i, \mu_n, (i=1,2)$. Зависимость искомого корня уравнения (13) от параметров задачи исследована на основе численного решения уравнения (13).

На персональном компьютере реализован алгоритм решения данной задачи. Для фиксированных значений (см. таблицу) переменных $b_c^2, \nu_i, \mu_i, \mu_n, (i=1,2)$ из областей их определения уравнение (13) представляется в виде $F(\theta_1, \theta_2) = 0$. Далее для каждого

$\theta_2^{(j)} = \frac{\pi}{12} j, (j = \overline{0, 12})$ получаются уравнения $f_i(\theta_1) = 0$. Придавая значения

$\theta_1^{(j)} = \frac{\pi}{180} j, (j = \overline{0, 180})$, получаем детерминант матрицы (13), который вычисляется

методом Гаусса. При этом, решениями задачи являются те $\theta_1^{(k)}$, при которых или $f(\theta_1^{(k)}) = 0$ или $\theta_1^{(i)} < \theta_1^{(k)} < \theta_1^{(i+1)}$ и $f(\theta_1^{(i)}) \cdot f(\theta_1^{(i+1)}) < 0$, т.е. $\theta_1^{(k)}$ находится в таком отрезке, на крайних точках которого функция принимает противоположные знаки. В этом случае применяется метод деления с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$.

Из полученных значений $\theta_1^{(k)}$ выбирается то решение, при котором удовлетворяется условие

$$\theta_1 = \min_k \left| \pi - (\theta_1^{(k)} + \theta_2) \right|.$$

В таблице приведены координаты ряда точек плоскости (θ_1, θ_2) , лежащих на границе девятимерной области нулевого напряженного состояния в пространстве параметров рассматриваемой задачи. Эти точки позволяют на плоскости (θ_1, θ_2) для фиксированных значений остальных параметров, построить предельные кривые, разделяющие область возможного изменения углов $\theta_1 \geq 0, \theta_2 \geq 0, \theta_1 + \theta_2 \leq 2\pi$ на две области, в одной из которых (на стороне начала координат) углы соответствуют нулевому, а во второй - концентрационному состоянию при данных значениях остальных параметров. На рис. 2 построены эти предельные кривые при различных μ_n .

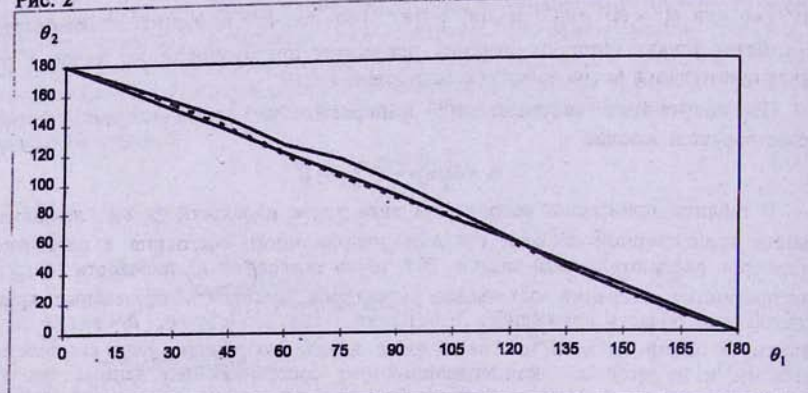
Для сравнения, на рис. 2 пунктиром проведена нейтральная линия, соответствующая решениям (при тех же параметрах) чисто упругой задачи, полученным в [4] (их можно получить, как отметили выше, из (10) при $b_c^2 = 0, \alpha = 1$).

Сравнивая решение, полученное из (10) (случай $\alpha = 1$) с результатами работы [4] (см. таблицу и рис. 2) замечаем, что присутствие магнитного поля и взаимодействие механических и магнитных полей могут существенно изменить размеры областей нулевого напряженного состояния и дают возможность регулировать поведение магнитоупругих величин вблизи края поверхности контакта составного тела.

Таблица.

$\frac{12}{\pi} \theta_2$	$\mu = 0.8, \nu_1 = 0.3, \nu_2 = 0.3$			$\mu = 1, \nu_1 = 0.4, \nu_2 = 0.2$		
	$b_c^2 = 0$	$b_c^2 = 10^{-3}$		$b_c^2 = 0$	$b_c^2 = 10^{-3}$	
		$\mu_{r1} = 1, \mu_{r2} = 120$	$\mu_{r1} = 720, \mu_{r2} = 24$		$\mu_{r1} = 10, \mu_{r2} = 2000$	$\mu_{r1} = 8000, \mu_{r2} = 200$
0	3.142	3.142	3.142	3.142	3.142	3.142
1	2.927	2.931	2.927	2.944	2.943	2.943
2	2.682	2.717	2.681	2.739	2.732	2.733
3	2.392	2.492	2.390	2.514	2.495	2.498
4	2.086	2.179	2.087	2.255	2.222	2.226
5	1.810	2.013	1.816	1.948	1.894	1.913
6	1.564	1.718	1.577	1.603	1.589	1.545
7	1.323	1.398	1.326	1.255	1.237	1.228
8	1.054	1.062	1.054	0.936	0.921	0.915
9	0.752	0.739	0.751	0.656	0.647	0.643
10	0.461	0.455	0.460	0.414	0.410	0.409
11	0.215	0.214	0.215	0.199	0.199	0.198
12	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Рис. 2



Литература

1. Pao Y.-H, Yeh C.-S, A linear theory for soft ferromagnetic elastic solid. -Int. Y. Eng. Sci., 1973, 11, N 4, p. 414-436.
2. Багдасарян Г.Е., Асаян Д.Д., Асланиян А.А., О концентрациях упругих напряжений и индуцированного магнитного поля возле трещины, обусловленных внешним магнитным полем. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1988, т. 41, N 2, с. 15-25

3. Амбарцумян С.А., Багдасарян Г.Е., Белубекян М.В., Магнитоупругость тонких пластин и оболочек, М., Наука, 1977, 273 с.
4. Чобанян К.С., Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1987, 338 с.
5. Саркисян А.М., Хачилян А.С., Об одной антиплоской задаче электроупругости для составного тела. Изв. НАНРА, Механика, 1995, 48, N 4, с. 49-56.
6. Черепанов Г.П., Механика хрупкого разрушения, М., Наука, 1974, 640 с.
7. Галпчян П.В., Определение связанных электромеханических полей в цилиндрическом секторе из пьезокристалла. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 1990, т. 43, N 5, с. 21-25.
8. Задоян М.А., Пространственные задачи теории пластичности, М., Наука, 1992, 712 с.
9. Миттра Р., Ли С.В., Аналитические методы теории волноводов. Пер. с англ, М., Мир, 1974, 327 с.