

Численное решение трансцендентного уравнения характеризующего особенности магнитоупругих напряжений

Д. А. Саакян

ЕрГУ, факультет прикладной математики

В работе [1], решением задачи магнитоупругости для составного ферромагнитного клинообразного тела, получено трансцендентное уравнение относительно параметра, характеризующего поведение напряжений около угловой точки контура тела. Там же численным методом исследовано расположение нейтральной линии в зависимости от интенсивности внешнего магнитного поля и физико-геометрических параметров задачи. Показано, что присутствие магнитного поля и взаимодействие механических и магнитных полей могут существенно изменить размеры областей нулевого напряженного состояния и дают возможность регулировать поведение магнитоупругих величин вблизи края поверхности контакта составного тела.

Настоящая работа посвящена численному исследованию поведения особенностей (концентраций) магнитоупругих напряжений на вершине клина, в зависимости от вышеуказанных параметров. Вышеуказанное трансцендентное уравнение решается численно с целью выявления взаимодействия механических и магнитных полей на поведение магнитоупругих напряжений около вершины клина. Численные результаты показывают, что присутствие магнитного поля может привести как к появлению особенностей напряжений, так и к ослаблению уровня концентраций (если концентрация напряжений имела место в отсутствии магнитного поля).

Допустим, что составное призматическое магнитоупругое тело в виде кусочно-однородного клина находится в магнитном поле $\vec{H} = (0, H_0, 0)$ (здесь и в дальнейшем постановка задачи и все обозначения заимствованы из работы [1]). Ставится задача определения характера напряженно-деформированного состояния клина около угловой точки. Все искомые величины (перемещение и потенциал магнитного поля) в системе полярных координат представляются в виде

$$F_k(r, \theta) = r^{\alpha^{(k)}} \cdot f_k(\theta), \alpha^{(k)} = \text{const}, k = 1, 2, 3 \quad (1)$$

где $\alpha^{(k)}$ и $f_k(\theta)$ неизвестные, подлежащие определению. С учетом уравнений магнитоупругости, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $f_k(\theta)$. Из условий совместимости этой системы получается, что все $\alpha^{(k)}$ равны между собой ($\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \alpha^{(3)} = \alpha$). Решая указанную систему при граничных условиях получаем однородную алгебраическую систему относительно постоянных интегрирования. Исходя из условия существования нетривиального решения алгебраической системы, приходим к трансцендентному уравнению

$$\Delta(\alpha, \vec{\gamma}) = 0 \quad (2)$$

относительно показателя интенсивности α . Описание $\Delta(\alpha, \vec{\gamma})$ приведено в работе [1] (уравнение (10)). Отметим только, что $\vec{\gamma}$ характеризует физико-механические и геометрические параметры задачи и $\vec{\gamma} = (b_c^2, \nu_1, \nu_2, \mu_1, \mu_2, \mu_{11}, \mu_{22}, \theta_1, \theta_2)$. Как видно из (1),

характер магнитоупругих напряжений, множитель которых равен $r^{\alpha-1}$, около вершины ($r \rightarrow 0$) поверхности контакта определяется величиной действительной части $\alpha = \alpha_R + i \cdot \alpha_I$. Если $\alpha_R > 1$, то в малой окрестности краевой точки поверхности контакта имеем нулевое напряженное состояние. Если $\alpha_R < 1$, около этого края имеет

место явление сильной концентрации магнитоупругих напряжений. При $\alpha_R = 1$, магнитоупругие напряжения на краях поверхности конечны и отличны от нуля. Отметим, что в работе [1] определяются физико-механические и геометрические параметры, при которых $\alpha_R = 1$ (т.е. определяется нейтральная кривая разделяющая нулевого напряженного состояния от не нулевого).

Представив $\alpha = \alpha_R + i \cdot \alpha_I$, и применив модифицированный метод Ньютона [2-4] для решения трансцендентного уравнения (1) получим итерационный процесс

$$F'(\alpha^{(0)}) \cdot (\alpha^{(k+1)} - \alpha^{(k)}) = -F(\alpha^{(k)}), \quad k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

где $F'(\alpha^{(0)})$ является матрицей Якоби. Здесь предполагается, что матрица Якоби невырождена. Для реализации этого метода решается система

$$\begin{cases} a_{11} \cdot \Delta \alpha_R + a_{12} \cdot \Delta \alpha_I = -F_R(\alpha_R^{(k)}, \alpha_I^{(k)}), \\ a_{21} \cdot \Delta \alpha_R + a_{22} \cdot \Delta \alpha_I = -F_I(\alpha_R^{(k)}, \alpha_I^{(k)}), \end{cases} \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left. \frac{\partial F_R}{\partial \alpha_R} \right|_{\alpha^{(k)}}, & a_{12} &= \left. \frac{\partial F_R}{\partial \alpha_I} \right|_{\alpha^{(k)}}, \\ a_{21} &= \left. \frac{\partial F_I}{\partial \alpha_R} \right|_{\alpha^{(k)}}, & a_{22} &= \left. \frac{\partial F_I}{\partial \alpha_I} \right|_{\alpha^{(k)}} \end{aligned}$$

и полагается $\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + \Delta \alpha$.

Последовательно придавая значения нулевому элементу $\alpha^{(0)} = \alpha_R^{(0)} + i \cdot \alpha_I^{(0)}$ из области $0 \leq \alpha_R^{(0)} \leq \xi$, $\xi > 1$, $0 < \alpha_I^{(0)} \leq 1$ (исходным шагом вычислений для $\alpha_R^{(0)}$ и $\alpha_I^{(0)}$ является 0.05) и решая систему (3), получаем последовательность $\alpha^{(k)}$, $k = 0, 1, \dots$. Если последовательность сходится - $\alpha^{(k)} \rightarrow \alpha^{(*)}$ (а такая последовательность существует), то это $\alpha^{(*)}$ является решением уравнения (1). Из всех $\alpha^{(*)}$ выбирается то, для которого удовлетворяются условия

$$\alpha_R^{(*)} = \min_m \{\alpha_R^{(m)}\} > 0, \quad \alpha_I^{(*)} = \min_m \{\alpha_I^{(m)}\}.$$

Данный алгоритм реализован на персональном компьютере для фиксированных значений параметра b_e^2 (приведенное магнитное поле), упругих постоянных ν_i и μ_i , магнитных проницаемостей μ_n и углов θ_i , ($i = 1, 2, \dots$).

Из численных расчетов видно, что когда μ_{r2} фиксирован и μ_{r1} увеличивается, то α_R уменьшается, а α_I увеличивается. Когда $\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}$ увеличивается и $\mu_1 < \mu_2$, то α_R увеличивается, а когда μ увеличивается и $\mu_1 \geq \mu_2$, то α_R уменьшается. С увеличением θ_2 ($\theta_1 + \theta_2 = \pi; \mu < 1$) α_R увеличивается. Когда $\theta_1 \rightarrow \pi$, $\theta_2 \rightarrow \pi$, имеем $\alpha_R \rightarrow 0.5$. Численные результаты показывают, что присутствие магнитного поля может привести как к появлению особенностей напряжений (см. Табл. 1, фиг. 1: линии 4, 5), так и к ослаблению уровня концентраций (см. Табл. 2: колонки 1, 3, 4, фиг. линии 1, 2).

Полученные результаты приведены в таблицах 1 и 2 и рисунках 1 и 2.

Таблица 1. $\nu_1 = 0.32, \nu_2 = 0.28, \theta_1 = \frac{2\pi}{3}, \theta_2 = \frac{\pi}{3}, \mu_{r1} = 10^3, \mu_{r2} = 10^2$

b_c^2	μ				
	0.0625	0.25	1	2	17
0*	0.837	0.923	1.017	1.003	0.978
0.0001	0.836+0.009 <i>i</i>	0.914	1	1	0.978
0.001	0.842+0.035 <i>i</i>	0.925	0.997	0.998	0.978
0.002	0.844+0.055 <i>i</i>	0.948+0.016 <i>i</i>	0.995	0.997	0.977
0.003	0.842+0.070 <i>i</i>	0.946+0.034 <i>i</i>	0.992	0.995	0.976
0.004	0.840+0.082 <i>i</i>	0.944+0.044 <i>i</i>	0.988	0.994	0.975
0.005	0.838+0.092 <i>i</i>	0.942+0.053 <i>i</i>	0.985	0.992	0.975
0.006	0.836+0.101 <i>i</i>	0.941+0.060 <i>i</i>	0.980	0.990	0.974
0.007	0.834+0.109 <i>i</i>	0.939+0.066 <i>i</i>	0.975	0.987	0.973
0.008	0.832+0.117 <i>i</i>	0.938+0.071 <i>i</i>	0.966	0.985	0.972
0.009	0.830+0.123 <i>i</i>	0.937+0.076 <i>i</i>	0.957+0.012 <i>i</i>	0.982	0.971
0.01	0.829+0.130 <i>i</i>	0.936+0.081 <i>i</i>	0.958+0.019 <i>i</i>	0.979	0.970

Таблица 2. $\mu = 0.0625, \theta_1 = \pi - \theta_2$

b_c^2	$\nu_1 = \nu_2 = 0.3, \mu_{r1} = 10^3, \mu_{r2} = 10$		$\nu_1 = 0.2, \nu_2 = 0.4, \theta_2 = \frac{9\pi}{24}$	
	$\theta_2 = \frac{9\pi}{24}$	$\theta_2 = \frac{\pi}{3}$	$\mu_{r1} = 10, \mu_{r2} = 10^4$	$\mu_{r1} = 10^3, \mu_{r2} = 10^2$
0*	0.790	0.846	0.863	0.863
0.0001	0.971	0.847	0.854	0.854
0.001	0.800	0.868	0.867	0.869
0.002	0.810	0.911+0.026 <i>i</i>	0.879	0.897
0.003	0.822	0.908+0.059 <i>i</i>	0.887	0.919+0.039 <i>i</i>
0.004	0.837	0.906+0.078 <i>i</i>	0.894	0.919+0.059 <i>i</i>
0.005	0.859	0.904+0.093 <i>i</i>	0.898	0.920+0.074 <i>i</i>
0.006	0.889	0.903+0.105 <i>i</i>	0.902	0.921+0.088 <i>i</i>
0.007	0.889	0.901+0.117 <i>i</i>	0.904	0.922+0.100 <i>i</i>
0.008	0.890	0.900+0.127 <i>i</i>	0.907	0.922+0.111 <i>i</i>
0.009	0.890	0.898+0.136 <i>i</i>	0.908	0.922+0.121 <i>i</i>
0.01	0.891	0.897+0.145 <i>i</i>	0.910	0.922+0.132 <i>i</i>

*) результаты получены в работе [5].

Рис. 1

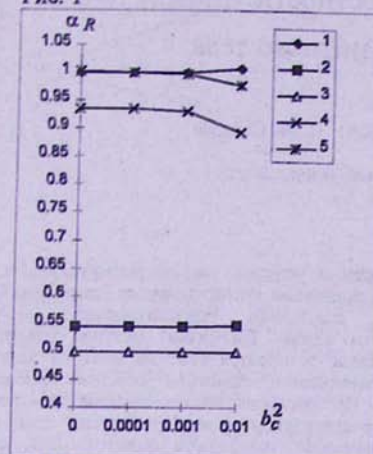
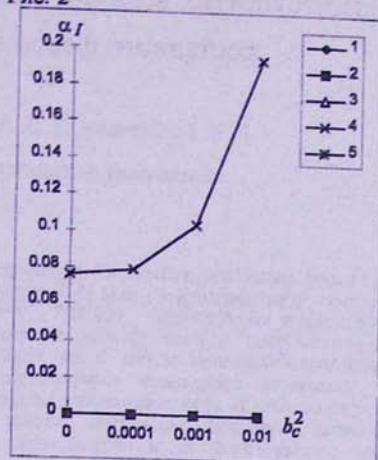


Рис. 2



на рис. 1 построены кривые для следующих параметров:

1-ая линия $\mu = 3, \nu_1 = 0.25, \nu_2 = 0.35, \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = \frac{\pi}{4}, \mu_{r1} = 10^4, \mu_{r2} = 10^2$,

2-ая линия $\mu = 3, \nu_1 = 0.25, \nu_2 = 0.35, \theta_1 = \frac{3\pi}{4}, \theta_2 = \frac{3\pi}{4}, \mu_{r1} = 10^4, \mu_{r2} = 10^2$,

3-ая линия $\mu = 1, \nu_1 = \nu_2 = 0.3, \theta_1 = \theta_2 = \pi, \mu_{r1} = \mu_{r2} = 10^3$,

4-ая линия $\mu = 0.0625, \nu_1 = \nu_2 = 0.3, \theta_1 = \frac{17\pi}{24}, \theta_2 = \frac{7\pi}{24}, \mu_{r1} = 10^3, \mu_{r2} = 10^3$,

5-ая линия $\mu = 2, \nu_1 = 0.32, \nu_2 = 0.28, \theta_1 = \frac{2\pi}{3}, \theta_2 = \frac{\pi}{3}, \mu_{r1} = 10^3, \mu_{r2} = 10^2$.

Литература

1. Багдасарян Г.Е., Асаян Д.Д., Саакян Д.А., Численно-аналитическое исследование характера магнитоупругих величин в окрестности угловой точки составного ферромагнитного тела (в данном сборнике).
2. Ортега Дж., Пул У., Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. М., Наука, 1986, 288 с.
3. Numerical Solutions of Systems of Nonlinear Algebraic Equations. Academic Press, New York & London, 1973, 417 p.
4. Канторович Л.В., Акилов Г.П., Функциональный анализ, М., Наука, 1984, 752 с.
5. Чобанян К.С., Напряжения в составных упругих телах. Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1987, 338 с.