Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 18, 1997, 95–105.

Обобщение преобразований Гаусса и Грама–Шмидта и развитие идеи симплекс метода

А. Д. Туниев

Институт проблем информатики и автоматизации
НАН РА и ЕрГУ

В работе предлагается в симплекс методе выбирать не один направляющий элемент, а одновременно k элементов, т.е. направляющий вектор длины k. Эта идея позволяет построить метод внутренних точек симплексного типа. Метод использует параметрическое линейное преобразование, зависящее от k, предложенное автором, и являющееся обобщением преобразований Гаусса и Грама–Шмидта.

1 Введение

В работе [11] было предложено в преобразованиях Гаусса и Грама–Шмидта выбирать одновременно k элементов – направляющий вектор длины k, где $k \in \{1, ..., n\}$, n – число столбцов матрицы A размерности $m \times n$. Эта идея позволила получить параметрическое линейное преобразование, зависящее от k, которое с геометрической точки зрения является реализацией идеи частичной ортогонализации, а с алгебраической – выпуклой комбинацией преобразований Гаусса ($k = 1$) и Грама–Шмидта ($k = n$). Был получен ряд результатов. В частности, обобщены методы исключения, понятие обратной матрицы и т.д., которые позволили сделать следующий основной вывод: в рамках параметрического преобразования симплекс метод Данцига, связанный с преобразованием Гаусса, содержит большие скрытые возможности развития. В связи с этим была поставлена задача пересмотра некоторых общих и специальных идей симплекс метода [12].

В данной работе предлагается один из вариантов развития симплекс метода, который позволяет рассматривать его как метод внутренних точек симплексного типа.

В связи с тем, что нам придется оперировать с частями векторов и матриц, приведем обозначения, предложенные Романовским И.В. в [9].

Обозначим

$$M = 1, ..., m, \quad N = 1, ..., n, \quad N' = 0, 1, ..., n.$$

$x[N]$ – вектор $x = \{x_i\}$, где индекс $i \in N$, $x[K]$ – соответствующий K-й подвектор вектора $x[N]$, где $K \subset N$, $x[i]$ – компонента вектора $x[N]$, имеющая индекс i.

$z[M, N] = \{z[i, j]\}$ – матрица, в которой индексы строк и столбцов пробегают соответственно множества M и N, $z[i, N]$ – i-я строка матрицы $z[M, N]$, а $z[M, j]$ – ее j-й столбец.

$z[K, L]$ – подматрица матрицы $z[M, N]$, где $K \subset M, L \subset N$.

Матрицу $a[M, N]$ можно умножить на матрицу $b[K, L]$, если $K = N$.

$o[M, N]$ – матрица, в которой все элементы равны нулю.

Мы не будем отличать вектор-строку от вектора-столбца.

2 Параметрическое линейное преобразование

Рассмотрим матрицу $a[M,N]$. Пусть $K \subseteq N$ и норма $\|a[i_0,K]\| \neq 0$, $i_0 \in M$. Преобразуем строки матрицы $a[M,N]$ по следующим формулам:

$$a'[i,N] = \begin{cases} \frac{a[i,N]}{\|a[i,K]\|}, & i = i_0, \\ a[i,N] + \alpha_i a'[i_0,N], & i \neq i_0, \end{cases} \tag{2.1}$$

где

$$\alpha_i = \alpha_i(K) = -a[i,K]a'[i_0,K].$$

В результате получим новую матрицу $a'[M,N]$, в которой

$$a'[i,K]a'[i_0,K] = \begin{cases} 1, & i = i_0, \\ 0, & i \neq i_0. \end{cases}$$

Действительно, учитывая (2.1),

$$a'[i,K]a'[i_0,K] = (a[i,K] + \alpha_i,\ a'[i_0,K])a'[i_0,K]$$

$$= -\alpha_i + \alpha_i = 0, \quad i \neq i_0.$$

Определение 2.1 *Пусть $K \subset N$. Два вектора $a[N]$ и $b[N]$ назовем частично-ортогональными, если их K-е "куски" ортогональны, т.е. $a[K]b[K] = 0$, и частично-ортонормальными, если нормы векторов-"кусков" равны единице.*

Таким образом, если в преобразовании (2.1) $K \subset N$, то для всех $i \neq i_0$ векторы $a'[i,N]$ и $a'[i_0,N]$ частично-ортогональны, и ортогональны, если $K = N$.

Пусть $K = \{1,...,k\}$. Тогда преобразование (2.1) с одной стороны является развитием преобразования Гаусса ($k > 1$), а с другой – развитием преобразования Грама–Шмидта ($k < n$).

Вектор $a[i_0,K]$ в преобразовании (2.1) естественно назвать направляющим (ведущим) вектором длины k.

2.1 Основная теорема

Рассмотрим систему линейных уравнений

$$a[M,N]x[N] = a[M,o], \tag{2.2}$$

где $x[N]$ — неизвестный столбец.

Пусть $K \subseteq N$. Представим эту систему в виде

$$a[i,K]x[K] + a[i,N \setminus K]x[N \setminus K] = a[i,o], \quad i \in M.$$

Полагая в преобразовании (2.1) $N = N'$, преобразуем систему (2.2). В результате получим матрицу $a'[M,N']$. Из элементов этой матрицы составим систему:

$$a'[i,K]y[K] + a'[i,N \setminus K]x[N \setminus K] = a'[i,o], \quad i \in M \setminus i_0, \tag{2.3}$$

где $\{y[K], x[N \setminus K]\}$ — неизвестный столбец.

Теорема 2.1
(a) *Если* $\{x[K], x[N \setminus K]\}$ *– решение системы* (2.2), *то* $\{y[K], x[N \setminus K]\}$ *– решение системы* (2.3), *где*

$$y[K] = x[K] + \lambda a'[i_0, K], \quad \lambda \in R^1. \tag{2.4}$$

(b) *Если* $\{y[K], x[N \setminus K]\}$ *– решение системы* (2.3), *то* $\{x[K], x[N \setminus K]\}$ *– решение системы* (2.2), *где*

$$x[K] = y[K] \qquad +(a'[i_0, o] - a'[i_0, K]y[K]- \\ -a'[i_0, N \setminus K]x[N \setminus K])a'[i_0, K]. \tag{2.5}$$

Доказательство теоремы можно провести методом подстановки.

Следствие 2.1 *Пусть* $M_0 \subseteq M$. *Тогда система* (2.2) *эквивалентна системе:*

$$\begin{cases} a'[i, N]x[N] &= a'[i, o], \quad i \in M_0, \\ a[i, N]x[N] &= a[i, o], \quad i \in M \setminus M_0, \end{cases}$$

в смысле множества решений.

3 Обобщение метода исключения Гаусса – Жордана, или о новом разложении относительно псевдобазиса

Здесь предлагаются параметрические методы для решения системы линейных уравнений

$$a[M, N]x[N] = a[M, o]. \tag{3.1}$$

В этих методах на каждом s-ом шаге выбирается направляющий вектор длины k_s, где $k_s \in \{1, ..., n\}$. Решение, полученное этими методами, в рассматриваемом смысле, является единственным.

Если в этих методах на каждом s-м шаге k_s выбирается равным единице, то мы получаем методы исключения; если же на каждом s-м шаге $k_s = n$, то мы получаем процесс частичной ортогонализации (решение является нормальным). Другими словами, решение системы (3.1), полученное этими методами, является аналогом, с одной стороны, базисного решения, а с другой – нормального решения (два крайних случая).

Таким образом, предлагаемые методы являются обобщением методов исключения.

Обобщенный метод исключения Гаусса–Жордана позволяет в явной форме получить разложение по псевдобазису. Другими словами, появляется алгебраическая основа для развития критерия оптимальности базисного допустимого решения задачи линейного программирования и симплекс метода.

Для выявления свойств решения, а следовательно, разложения, полученного обобщенными методами исключения, более удобным является обобщенный метод исключения Гаусса–Жордана. Поэтому мы вначале рассмотрим этот метод.

Отметим, что неразрешимость системы (3.1) определяется так же, как и в методах исключения.

Пусть система (3.1) разрешима, и ранг ее равен r. Кроме того, предположим, что первые r строк матрицы системы линейно-независимы. Положим $a^0[M, N'] = a[M, N']$. Сущность метода заключается в следующем.

1°. Последовательно для $s = 1, ..., r$ выбираются множества $K_s \subseteq N$ такие, что норма $\|a^{s-1}[s, K_s]\| \neq 0$, и полагаем

$$a^s[i, N'] = \begin{cases} \frac{a^{s-1}[i,N']}{\|a^{s-1}[i,K_s]\|}, & i = s, \\ a^{s-1}[i, N'] + \alpha_i a^s[s, N'], & i \neq s, \end{cases} \tag{3.2}$$

где

$$\alpha_i = \alpha_i^s(K_s) = -a^{s-1}[i, K_s]a^s[s, K_s], \quad i \neq s. \tag{3.3}$$

Запоминаем "куски" $a^s[s, K_s]$, $s = 1, ..., r$.

2°. После r шагов получим эквивалентную систему

$$a^r[i, N]x[N] = a^r[i, o], \quad i = 1, ..., r.$$

Пусть $R = \{1, ..., r\}$. Тогда эту систему можно представить в виде

$$a^r[R, N]x[N] = a^r[R, o]. \tag{3.4}$$

3°. Пусть $K = \bigcup_{s \in R} K_s$. Ясно, что $K \subseteq N$. Формируем из "кусков" $a^s[s, K_s]$ матрицу $b[R, K] = \{b[s, j]\}$, в которой элементы s-й строки

$$b[s, j] = \begin{cases} a^s[s, j], & j \in K_s, \\ 0, & j \in K \setminus K_s, \end{cases}$$

т.е. s-я строка имеет вид

$$b[s, K] = (a^s[s, K_s], o[K \setminus K_s]), \quad s \in R.$$

4°. Помножив слева $b^T[R, K]$ на обе части системы (3.4), получим систему

$$u[K, N]x[N] = u[K, o],$$

где

$$u[K, N'] = b^T[R, K]a^r[R, N'].$$

При введенных предположениях справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1 *Для произвольного $j \in N'$:*
(а) *столбец $u[K, j]$ матрицы $u[K, N']$ является собственным вектором подматрицы $u[K, K]$ с собственным значением $\lambda = 1$, т.е.*

$$u[K, K]u[K, j] = u[K, j];$$

(б) *компоненты вектора $u[K, j]$ являются коэффициентами разложения j-го столбца матрицы $a[M, N']$ по столбцам матрицы $a[M, K]$ (или по псевдобазису $\{a[M, j]\}_{j \in K}$), т.е.*

$$a[M, K]u[K, j] = a[M, j], \tag{3.5}$$

при этом, если все элементы векторов $a^s[s, K_s]$ ненулевые, то данное разложение, в рассматриваемом смысле, т.е. при $\{K_1, ..., K_r\}$, является единственным.

Доказательство.
(а) Вначале убедимся, что

$$a^r[R, K]b^T[R, K] = e[R, R], \tag{3.6}$$

где $e[R,R]$ — единичная матрица. Для этого достаточно показать, что для произвольного $s \in R$ справедливо соотношение

$$a^r[i,K_s]a^s[s,K_s] = \begin{cases} 1, & i = s, \\ 0, & i \neq s. \end{cases} \tag{3.7}$$

Действительно, пусть имеет место (3.7). Тогда, так как s-я строка матрицы $b[R,K]$ имеет вид

$$b[s,K] = \{a^s[s,K_s], o[K \setminus K_s]\},$$

то

$$a^r[i,K]b[s,K] = a^r[i,K_s]a^s[s,K_s] = \begin{cases} 1, & i = s, \\ 0, & i \neq s. \end{cases}$$

Отсюда следует справедливость равенства (3.6).

Доказательство (3.7) проведем методом математической индукции по r. Пусть $r = s$, где $s \in R$. Тогда, учитывая (3.2) и (3.3), при $i = s$

$$a^s[s,K_s]a^s[s,K_s] = 1,$$

а при $i \neq s$

$$\begin{aligned} & a^s[i,K_s]a^s[s,K_s] \\ &= (a^{s-1}[i,K_s] + \alpha_i^s a^s[s,K_s])a^s[s,K_s] \\ &= -\alpha_i^s + \alpha_i^s = 0. \end{aligned}$$

Предполагая, что соотношение (3.7) имеет место для $r-1$, убедимся в его справедливости для r. Учитывая (3.2) и предположение индукции,

$$\begin{aligned} & a^r[i,K_s]a^s[s,K_s] \\ &= (a^{r-1}[i,K_s] + \alpha_i^r a^r[r,K_s])a^s[s,K_s] \\ &= a^{r-1}[i,K_s]a^s[s,K_s] + \alpha_i^r \frac{a^{r-1}[r,K_s]a^s[s,K_s]}{\|a^{r-1}[r,K_r]\|} \\ &= a^{r-1}[i,K_s]a^s[s,K_s] = \begin{cases} 1, & i = s, \\ 0, & i \neq s. \end{cases} \end{aligned}$$

Итак, соотношение (3.7) верно, поэтому справедливо и равенство (3.6).

Теперь убедимся в справедливости утверждения (а) теоремы 3.1. Рассмотрим систему (3.1), в правой части которой стоит вектор $a[M,j]$, т.е.

$$a[M,N]x[N] = a[M,j] \tag{3.8}$$

(предполагаем, что эта система разрешима). Тогда, согласно процедуре обобщенного метода исключения Гаусса – Жордана, при выбранном разбиении мы в конечном итоге получим эквивалентную систему

$$u[K,N]x[N] = u[K,j]. \tag{3.9}$$

Учитывая (3.6),

$$u[K,K]u[K,j] = b^T[R,K]a^r[R,K]b^T[R,K]a^r[R,j]$$

$$= b^T[R,K]e[R,R]a^r[R,j] = b^T[R,K]a^r[R,j] = u[K,j].$$

(б) Разложение (3.5) имеет место в силу эквивалентности систем (3.8) и (3.9), а его единственность — на основании следующих рассуждений.

Пусть при $\{K_1, ..., K_r\}$ векторы $u[K,j]$ и $u'[K,j]$ — решения системы (3.8), полученные обобщенным методом исключения Гаусса – Жордана. Полагая

$$\tilde{u}[K,j] = u[K,j] - u'[K,j], \; u[K,j] \neq u'[K,j],$$

получим, что

$$a[M,K]\tilde{u}[K,j] = a[M,j] - a[M,j] = o[M],$$

или, в силу эквивалентности систем (3.8) и (3.9), утверждения (а) теоремы 3.1, имеем

$$u[K,K]\tilde{u}[K,j] = u[K,j] - u'[K,j] = o[K].$$

Это значит, что $u[K,j] = u'[K,j]$. Отсюда следует, что для произвольного вектора $x[K] \neq u[K,j]$, который удовлетворяет равенству

$$a[M,K]x[K] = a[M,j],$$

выполняется неравенство

$$u[K,K]x[K] = u[K,j] \neq x[K].$$

Другими словами, вектор $x[K]$ не является собственным вектором матрицы $u[K,K]$ со значением $\lambda = 1$, т.е. для этого вектора утверждение (а) теоремы 3.1 не имеет места. Если направляющие векторы $a^s[s,K_s]$ содержат только ненулевые элементы, то вектор $u[K,j]$ в рассматриваемом смысле единственный.

Замечание. Если в (3.2) неравенство $i \neq s$ заменить на $i > s$, то мы получаем обобщенный метод исключения Гаусса. При обратном ходе используется формула вида (2.5).

Следствие 3.1 *Если в обобщенных методах исключения $K = K_1 = ... = K_r$, то мы получаем процесс частичной ортогонализации. В этом случае $u[K,K]$ – матрица ортогонального проектирования, а $u[K,j]$ ортогонален ядру матрицы $a[M,K]$. Другими словами, вектор $u[K,j]$ – нормальное решение системы*

$$a[M,K]x[K] = a[M,j].$$

4 Обобщение понятия обратной матрицы

Основой модифицированного симплекс метода является понятие обратной матрицы. Поэтому для развития этого метода возникает следующий вопрос: что является аналогом обратной матрицы с точки зрения обобщенных методов исключения. Оказывается, если матричная система

$$a[M,N]x[N,M] = e[M,M] \tag{4.1}$$

разрешима, где $e[M,M]$ – единичная матрица, то решение системы (4.1), полученное этими методами, является аналогом (обобщением) обратной матрицы, при этом данное решение является единственным.

Если в обобщенных методах исключения на каждом s-м шаге множества K_s выбираются одноэлементными, то получаем обратную матрицу относительно некоторой квадратной подматрицы матрицы $a[M,N]$. Если же на каждом s-ом шаге $K = K_1 = ... = K_r = N$, то получаем обратную матрицу Мура – Пенроуза относительно $a[M,N]$. Другими словами, решение матричной системы (4.1) является аналогом, с одной стороны, обратной матрицы, а с другой — аналогом обратной матрицы Мура – Пенроуза (два крайних случая).

Таким образом, появляется алгебраическая основа для дальнейшего развития критерия оптимальности базисного допустимого решения с использованием аналога обратной матрицы, и следовательно, развития модифицированного симплекс метода.

Пусть $K_s \subseteq N$, $s \in R$, $N = \bigcup_{s\in R} K_s$. При $\{K_1, ...K_r\}$ применим к системе (4.1) обобщенный метод исключения Гаусса – Жордана. Тогда в конечном итоге после r шагов и умножения слева на соответствующее $b^T[R,N]$ получим эквивалентную систему вида

$$u[N,N]x[N,M] = \tilde{u}[N,M],$$

где $\tilde{u}[N,M]$ – решение этой системы. Кроме того,

$$a[M,N]\tilde{u}[N,M] = e[M,M],$$

и матрица $\tilde{u}[N,M]$ единственная в рассматриваемом смысле, если все элементы направляющих векторов $a^s[s,K_s]$ ненулевые (см.Теорему 3.1).

В дальнейшем матрицу $\tilde{u}[N,M]$ будем называть частично- обратной матрицей относительно $a[M,N]$, а $u[N,N]$ – матрицей частично -ортогонального проектирования.

Пусть $K = \bigcup_{s\in R} K_s$, где $K \subseteq N$ и $\tilde{u}[K,M]$ – частично-обратная матрица относительно $a[M,K]$. Тогда коэффициенты разложения $a[M,j]$ относительно псевдобазиса $\{a[M,j]\}_{j\in K}$, можно определить, используя частично-обратную матрицу. В этом случае, для произвольного $j \in N$

$$u[K,j] = \tilde{u}[K,M]a[M,j]. \tag{4.2}$$

5 Развитие симплекс метода

Здесь вначале, используя полученное разложение относительно псевдобазиса и понятие частично–обратной матрицы, развивается критерий оптимальности базисного допустимого решения, т.е. критерий оптимальности Данцига. Далее развиваются симплекс метод и его модифицированный вариант – метод обратной матрицы. Суть развития заключается в том, что на каждом s-м шаге выбирается не один направляющий элемент, как это принято в симплекс методе, а одновременно k_s элементов – направляющий вектор длины k_s, который позволяет после шага обобщенного метода исключения Гаусса–Жордана перейти к улучшенному допустимому решению. Так как эти решения, в рассматриваемом смысле, единственные, то гарантируется конечность метода.

С алгебраической точки зрения, движение к оптимуму происходит, вообще говоря, по псевдобазисам. На каждом шаге из текущего псевдобазиса исключается одна группа векторов и включается другая группа векторов.

Рассмотрим невырожденную задачу линейного программирования

$$\max c[N]x[N] \tag{5.1}$$

при условиях
$$a[M,N]x[N] = a[M,o], \tag{5.2}$$
$$x[N] \geq o[N]. \tag{5.3}$$

Пусть $a[M,K]$ – матрица полного ранга. При $\{K_1,...,K_m\}$, где
$$K_s \subseteq N, \ \ s \in M, \ \ K = \bigcup_{s\in M} K_s, \ \ K \subseteq N,$$
пусть матрица $\tilde{u}[K,M]$ – частично-обратная относительно $a[M,K]$ и для произвольного $j \in N'$ компоненты вектора $u[K,j]$ — коэффициенты разложения $a[M,j]$ по столбцам матрицы $a[M,K]$. Тогда, при введенных предположениях справедливо следующее утверждение.

Утверждение 5.1 *Если* $u[K,o] \geq o[K]$, *то*

а) оценки относительно псевдобазиса $\{a[M,j]\}_{j\in K}$ *равны*
$$z[j] = c[K]u[K,j] - c[j]$$
$$= \tilde{u}^T[K,M]c^T[K]a[M,j] - c[j], \ \ j \in N';$$

б) если $z[j] \geq 0, \ \ j \in N,$ *то* $u[N,o] = \{u[K,o], o[N \setminus K]\}$ *является оптимальным решением задачи линейного программирования* (5.1)–(5.3),*а* $\lambda[M] = \tilde{u}^T[K,M]c^T[K]$ - *оптимальным решением двойственной к ней задачи.*

Справедливость утверждения 5.1 с учетом (4.2) следует из критерия оптимальности Л.В.Канторовича.

Таким образом, данный критерий оптимальности является промежуточным между критериями оптимальности Данцига и Канторовича.

Для развития симплекс метода используется первая форма (признак) достаточного условия оптимальности допустимого решения.

Мы будем отталкиваться от начальной симплексной таблицы.

Обозначим $x^0[M,N'] = a[M,N']$. Пусть $x^0[M,M] = e[M,M]$ – единичная матрица, $x^0[M,o]$ – допустимое базисное решение задачи (5.1)–(5.3), $x^0[m+1,j] = z[j], j \in N'$, - оценки относительно базиса $\{a[M,j]\}_{j\in M}$. Кроме того, сформируем матрицу $b^0[M,N]$, у которой подматрица $b^0[M,M] = x^0[M,M]$, т.е. единичная, а подматрица $b^0[M,N\setminus M]$ – нулевая.

Таким образом, мы будем отталкиваться от системы
$$\begin{cases} x^0[M,N]x[N] & = x^0[M,o], \\ x^0[m+1,N]x[N] + x[n+1] & = x^0[m+1,o] \end{cases} \tag{5.4}$$
и матрицы
$$b^0[M,N] = (b^0[M,M], o[M,N\setminus M]),$$
где $x[N]$ – неизвестный столбец, $x^0[m+1,o]$ – значение линейной формы (5.1) относительно базисного допустимого решения $x^0[M,o]$, при этом максимизируется $x[n+1]$.

Опишем переход от s-го шага к $(s+1)$-му, т.е. переход от допустимого решения к улучшенному допустимому решению.

Пусть на s-м шаге, где $s = 0,1,...,s$, получена система
$$\begin{cases} x[M,N]x[N] & = x[M,o], \\ x[m+1,N]x[N] + x[n+1] & = x[m+1,o] \end{cases} \tag{5.5}$$

и матрица $b[M,N]$. Здесь для простоты верхний индекс s опущен.

Шаг 1.
Выбираем $\overline{K} = \overline{K}_{s+1} \subseteq N$ такое, что $x[m+1,j] \leq 0, \;\; j \in \overline{K}$.
Шаг 2.
Пусть $x[i,o] > 0, \; i \in M$. Определим

$$\Theta_f = \frac{x[f,o]}{\|x[f,\widetilde{K}_f]\|} = \min_i \frac{x[i,o]}{\|x[i,\widetilde{K}_i]\|}$$

для тех $i \in M$, для которых "кусок" $x[i,\widetilde{K}_i]$ содержит все положительные компоненты вектора $x[i,K]$. Ясно, что $\widetilde{K}_i \subseteq \overline{K}$, при этом f и $\widetilde{K}_i$ зависят от s.
Шаг 3.
Шаг обобщенного метода исключения Гаусса–Жордана. Полагаем

$$x'[i,N'] = \begin{cases} \frac{x[i,N']}{\|x[i,\widetilde{K}_i]\|}, & i = f, \\ x[i,N'] + \alpha_i x'[f,N'], & i \neq f, \end{cases} \tag{5.6}$$

где

$$\alpha_i = \alpha_i(\widetilde{K}_f) = -x[i,\widetilde{K}_f]x'[f,\widetilde{K}_f], \; i \neq f.$$

Шаг 4.
Формируем матрицу $b'[M,N]$, которая получается из матрицы $b[M,N]$ заменой строки $b[f,N]$ на строку $b'[f,N]$, где

$$b'[f,N] = \{x'[f,\widetilde{K}_f], o[N \setminus \widetilde{K}_f]\}.$$

Другими словами, строки матрицы $b'[M,N]$ принимают вид:

$$\begin{aligned} b'[f,N] &= \{x'[f,\widetilde{K}_f], o[N \setminus \widetilde{K}_f]\}, \\ b'[i,N] &= b[i,N], \quad i \neq f. \end{aligned}$$

Шаг 5.
Если относительные оценки $x'[m+1,j] \geq 0, \;\; j \in N$, то

$$u[N,o] = b'^T[M,N]x'[M,o]$$

– оптимальное решение задачи (5.1)–(5.3). В противном случае, переходим к шагу 1, где полагаем $s = s+1$.

Заметим, что по аналогии с симплекс методом, если для некоторого $j x[M,j] \leq o[M]$ и $x[m+1,j] < 0$, то задача (5.1)–(5.3) неразрешима. В этом случае линейная форма (5.1) не ограничена сверху.

Пусть $\widetilde{K}_i$ – множество индексов ненулевых элементов i-й строки матрицы $b'[M,N], \;\; i \in M$. Обозначим $\widetilde{K} = \bigcup_{i \in M} \widetilde{K}_i$. Тогда матрицу $b'[M,N]$ можно представить в виде

$$b'[M,N] = \{b'[M,\widetilde{K}], o[M,N \setminus \widetilde{K}]\}.$$

Пусть

$$u[\widetilde{K},N'] = b'^T[M,\widetilde{K}]x'[M,N'].$$

При введенных предположениях справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1
(а) *Для произвольного* $j \in N'$ *вектор* $u[\widetilde{K}, j]$ *является собственным вектором подматрицы* $u[\widetilde{K}, \widetilde{K}]$ *с собственным значением* $\lambda = 1$, *т.е.*

$$u[\widetilde{K}, \widetilde{K}]u[\widetilde{K}, j] = u[\widetilde{K}, j];$$

(б) *вектор*

$$u[N, o] = \{u[\widetilde{K}, o], o[N \setminus \widetilde{K}]\}$$

– допустимое решение задачи (5.1) – (5.3).

Доказательство.

(а) Доказательство утверждения (а) аналогично доказательству теоремы 3.1(а), поэтому мы здесь его не приводим.

(б) Вектор $u[N, o] \geq o[N]$, так как на каждом шаге элементы матрицы $b[M, N]$ неотрицательны, а шаг 2 гарантирует неотрицательность вектора $x[M, o]$, т.е. правой части системы (5.5). В последнем нетрудно убедиться, если использовать неравенство Коши.

Предлагаемый метод является параметрическим. В связи с этим возникает задача определения правила выбора длины направляющего вектора. Здесь мы предлагаем одно из возможных правил. Отталкиваясь от допустимого базисного решения, мы организуем прямой ход и обратный ход. При прямом ходе на каждом шаге выбираем все активные столбцы ($x[m+1, j] < 0$), которые не входят в псевдобазис (или базис) и все неактивные столбцы, которые входят в псевдобазис ($x[m+1, j] = 0$), если только они существуют. Если таких столбцов нет, то организуем обратный ход до получения базисного допустимого решения. При обратном ходе используем первое правило Данцига, т.е. в качестве направляющего столбца выбираем столбец, на котором достигается $\min_j x[m+1, j]$ для $x[m+1, j] < 0$. Это правило позволяет, вообще говоря, число положительных компонент допустимого решения при прямом ходе увеличивать, а при обратном ходе уменьшать.

Замечание. В работе [10] рассмотрена задача класса $(n, 2n)$, при этом максимальное значение линейной формы равно 5^n. Симплекс метод с первым правилом Данцига решает эту задачу за 2^n шагов, а предлагаемый метод решает эту задачу за $2n$ шагов. При этом за первые n шагов мы проходим первую половину пути ($\frac{5^n}{2}$), а за вторые n шагов – вторую половину пути. Этот результат получили Сапонджян Ж.А. и Алмазян Л.А.

Литература

1. Альберт А. Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание.– М.: Наука, 1975, 223с.

2. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры.– М.: Наука, 1977, 303с.

3. Данциг Дж.Б. Линейное программирование, его обобщение и применение.– М.: Наука, 1981, 600с.

4. Канторович Л.В. Об одном эффективном методе решения некоторых классов экстремальных проблем. Докл. АН СССР, 1940, 28, N3, с. 212-215.

5. Канторович Л.В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов.– М.: АН СССР, 1959, 343с.

6. Klee V., Minty G.J. Inequalities. III/Ed. by O.Shisha. - New York: Acad.Press. 1972, 293p.

7. Moore E.H. On the reciprocal of the general algebraic matrices (Abstract). Bull. Amer. Math. Soc. 1920, 26, p. 394-395.

8. Penrouse R. A generalized inverse for matrices. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, N51, p. 406-413.

9. Романовский И.В. Алгоритм решения экстремальных задач. М.: Наука, 1977, 303с.

10. Схрейвер А. Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991, 360с., (том 1).

11. Туниев А.Д. Об одном методе решения систем линейных алгебраических уравнений и его применении. Кибернетика., 1983, N3, с. 33-37.

12. Туниев А.Д. Метод направляющего вектора в линейном программировании. Докл.АН Арм.ССР, том 93, N3,1995, с. 110-118.

13. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М - Л.: Физматгиз, 1963, 734с.

14. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Линейное программирование. М.: Физматгиз, 1963, 775с.