Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 18, 1997, 72–86.

Дискретная изопериметрическая задача для 3–го слоя куба $\mathbf{B}^n$

В. М. Караханян

Институт проблем информатики и автоматизации
НАН РА и ЕрГУ

Аннотация

В данной работе рассматривается дискретная изопериметрическая задача для 3-го слоя n–мерного единичного куба и показывается, что почти всегда конечный отрезок лексикографического порядка произвольной длины является решением обсуждаемой задачи.

1 Введение

Если для любого подмножества A n–мерного единичного куба B^n определена его граница, то под дискретными изопериметрическими задачами для B^n мы будем понимать проблемы выбора подмножества фиксированной мощности, имеющее минимальную границу. В настоящее время известно решение изопериметрической задачи для B^n с различными определениями граничных вершин.

Весом $\|\tilde{\alpha}\|$ или нормой вершины $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ называется число его координат, равных единице. Множество всех вершин куба B^n, имеющих вес k , будем называть k–м слоем куба B^n и обозначать через B^n_k.

Расстоянием между вершинами $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ куба B^n называется число $d(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = \sum\limits_{i=1}^{n} | \alpha_i - \beta_i |$.

В дальнейшем мы будем рассматривать изопериметрическую задачу для B^n_k–k–го слоя куба B^n : а именно,

если $A \subseteq B^n_k$ некоторое подмножество и граница определяется формулой

$$\Gamma(A) = \left\{ \tilde{\alpha} \in B^n \setminus A \quad / \quad \exists \tilde{\beta} \in A, \quad d(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) = 1 \right\},$$

то требуется найти такое подмножество $A \subseteq B^n_k$ фиксированной мощности $| A |$, $0 \leq | A | \leq C^k_n$, которое имеет минимальную границу.

Эта задача была поставлена в [2], а в [3] была сделана попытка решить ее для случаев $k = 2$ и $k = 3$ (при $k = 3$ приведенное решение неверно). В данной работе приводится решение этой задачи при $k = 3$.

2 Основные определения и некоторые результаты

Если $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B^n$, то через $\overline{\alpha} = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \ldots, \overline{\alpha}_n)$ обозначим вектор (противоположный к $\tilde{\alpha}$), i-я координата которого принимает значение 0, если $\alpha_i = 1$ и значение 1, если $\alpha_i = 0$. А через $\overline{\alpha}(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ — такой вектор $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, для которого $\beta_i = \overline{\alpha}_i$, если $i \in \{i_1, i_2, \ldots, i_r\}$ и $\beta_i = \alpha_i$ в остальных случаях.

Через $\tilde{e}_i = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_j = 0$ при $j \neq i$ и $\alpha_i = 1$, обозначим единичный вектор i — го направления.

Если $\tilde{\alpha} \in B^n_k$, и единицы $\tilde{\alpha}$ находятся в позициях $i_1, i_2, \ldots, i_k$, причем $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, то вектор $\tilde{\alpha}$ иногда будем обозначать через $\tilde{\alpha}(i_1, i_2, \ldots, i_k)$.

Через $B^{n, i_1, i_2, \ldots, i_k}_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k}$ обозначим множество всех вершин $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B^n$, у которых $\alpha_{i_j} = \sigma_j$ при $1 \leq j \leq k$; оно называется гранью (или подкубом) куба B^n.

Через $B^{n, i_1, i_2, \ldots, i_k}_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k}(r)$ обозначим r–й слой подкуба $B^{n, i_1, i_2, \ldots, i_k}_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k}$.

Соответственно, если $A \subseteq B^n$ — произвольное подмножество, то через $A^{i_1, i_2, \ldots, i_k}_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k}$ обозначим подмножество

$$A \cap B^{n, i_1, i_2, \ldots, i_k}_{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k} = \left\{ \tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in A \ \ / \ \ \alpha_{i_j} = \sigma_j \text{ при } j = \overline{1, k} \right\}.$$

Пусть $A \subseteq B^n_k$ — некоторое подмножество, тогда через $T(A)$ и $P(A)$ будем обозначать соответственно $\Gamma(A) \cap B^n_{k+1}$ — верхняя и $\Gamma(A) \cap B^n_{k-1}$ — нижняя границы A. Ясно, что $\Gamma(A) = T(A) \cup P(A)$.

Лексикографический номер вершины $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B^n$ обозначим через $l(\tilde{\alpha})$, т.е.

$$l(\tilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 2^{n-i}.$$

Скажем, что вершина $\tilde{\alpha} \in B^n_k$ старше вершины $\tilde{\beta} \in B^n_k$, если $l(\tilde{\alpha}) > l(\tilde{\beta})$. Конечный (соответственно начальный) отрезок лексикографического порядка вершин B^n_k длины m обозначим через $L(n, k, m)$ (соответственно через $F(n, k, m)$).

Известно (теорема Краскала–Катоны), что

$$|\, T(L(n, k, m)) \,| = \min_{A \subseteq B^n_k,\ |A| = m} |\, T(A) \,|;$$

$$|\, P(F(n, k, m)) \,| = \min_{A \subseteq B^n_k,\ |A| = m} |\, P(A) \,|.$$

Обозначим $|\ T(L(n, k, m))\ | = t(n, k, m)$ и $|\ P(F(n, k, m))\ | = p(n, k, m)$. Легко заметить, что функции $t(n, k, m)$ и $p(n, k, m)$.определяются следующими рекуррентными формулами:

$$t(n, k, m) = \begin{cases} t(n-1, k-1, m) & , \text{ если } m \leq C^{k-1}_{n-1}; \\ t(n-1, k, m - C^{k-1}_{n-1}) + C^k_{n-1} & , \text{ если } m > C^{k-1}_{n-1}. \end{cases} \tag{1}$$

$$p(n, k, m) = \begin{cases} p(n-1, k, m) & , \text{ если } m \leq C^k_{n-1}; \\ p(n-1, k, m - C^k_{n-1}) + C^{k-2}_{n-1} & , \text{ если } m > C^k_{n-1}. \end{cases} \tag{2}$$

Известны также следующие неравенства [2]:

1). если $k > 0, m_1, m_2 \geq 0$ и $m_1 + m_2 \leq C_n^k$, то

$$t(n,k,m_1+m_2) \leq \max(m_2, t(n,k,m_1)) + t(n,k+1,m_2) \ , \tag{3}$$

$$p(n,k+1,m_1+m_2) \leq \max(m_2, p(n,k+1,m_1)) + p(n,k,m_2) \ , \tag{4}$$

2). если $k > 0, m_1, m_2 \geq 0$ и $m_1 + m_2 \leq C_n^k$, то

$$t(n,k,m_1+m_2) \leq t(n,k,m_1) + t(n,k,m_2) \ , \tag{5}$$

$$p(n,k,m_1+m_2) \leq p(n,k,m_1)) + p(n,k,m_2) \ , \tag{6}$$

3). если $k > 0, 0 \leq m_1 \leq m_2 \leq C_n^k \leq m_1 + m_2$, то

$$t(n,k,m_1+m_2-C_n^k) + C_n^{k+1} \leq t(n,k,m_1) + t(n,k,m_2) \ , \tag{7}$$

$$p(n,k,m_1+m_2-C_n^k) + C_n^{k-1} \leq p(n,k,m_1)) + p(n,k,m_2) \ . \tag{8}$$

Очевидно, что для любого k , $1 \leq k \leq n-1$, и для любого m, $1 \leq m \leq C_n^k$,

$$| \ T(L(n,k,m)) \ | = | \ P(F(n,n-k,m)) \ | \quad \text{и}$$

$$| \ \Gamma(L(n,k,m)) \ | = | \ \Gamma(F(n,n-k,m)) \ |.$$

В дальнейшем, те множества, которые являются решениями дискретной изопериметрической задачи, мы будем называть оптимальными.

Легко заметить, что, если подмножество $A \subseteq B_k^n$ оптимально (имеет минимальную границу $| \ \Gamma(A) \ |$), то подмножество

$$\overline{A} = \{\overline{\alpha} \in B^n / \tilde{\alpha} \in A\}$$

также является оптимальным в B_{n-k}^n.

Непосредственно из рекуррентной формулы (1) следует, что

$$\begin{aligned} t(n,1,m) &= C_{n-1}^1 + C_{n-2}^1 + \cdots + C_{n-m}^1 = \sum_{i=1}^{m} (n-i) \ \text{ при } m > 0 \text{ и} \\ t(n,1,0) &= 0. \end{aligned}$$

Отныне $t(n,1,m)$ будем обозначать просто через $t(n,m)$. Можно доказать следующие свойства функции $t(n,m)$:

Лемма 1. *Функция $t(n,m)$ удовлетворяет следующим свойствам:*

(а) $t(n,m) = t(n-1,m) + m$, *если* $0 \leq m \leq n-1$;

(б) $t(n,m) = t(n,m_1) + t(n-m_1, m-m_1)$, *если* $0 \leq m_1 \leq m \leq n$;

(в) $t(n,m_1) - t(n-m_2, m_1) = m_1 \cdot m_2$, *если* $0 \leq m_2 \leq n, m_1 \leq n-m_2$;

(г) $t(n,m_1) + t(n,m_2) = t(n,m_1+m_2) + m_1 \cdot m_2$, *если* $m_1 + m_2 \leq n$, $m_1 \geq 0, m_2 \geq 0$;

(д) $t(n,m_1) + t(n,m_2) = t(n,n) + t(n,m_1+m_2-n) + (n-m_1)\cdot(n-m_2)$, *если* $0 \leq m_1 \leq n, 0 \leq m_2 \leq n, m_1 + m_2 > n$.

Действительно, свойства *(а)* — *(в)* непосредственно следуют из определения функции $t(n,m)$.

Докажем свойство *(г)*. Не нарушая общности можно предполагать, что $m_1 \le m_2$. Тогда имеем

$$t(n,m_1)+t(n,m_2)-t(n,m_1+m_2)=$$
$$=\sum_{i=1}^{m_1}(n-i)+\sum_{i=1}^{m_2}(n-i)-\sum_{i=1}^{m_1+m_2}(n-i)=\sum_{i=1}^{m_1}(n-i)-\sum_{i=m_2+1}^{m_1+m_2}(n-i)=$$
$$=\sum_{i=1}^{m_1}(n-i)-\sum_{i=1}^{m_1}(n-m_2-i)=\sum_{i=1}^{m_1}(n-i-n+m_2+i)=m_1\cdot m_2.$$

Докажем свойство *(д)*. Согласно свойству *(б)* при $m=n$ имеем

$$t(n,m_1)=t(n,n)-t(n-m_1,n-m_1),$$

а при $m=m_2$ и $m_1=m_1+m_2-n$ имеем

$$t(n,m_2)=t(n,m_1+m_2-n)+t(n-(m_1+m_2-n),m_2-(m_1+m_2-n)).$$

Следовательно,

$$t(n,m_1)+t(n,m_2)=t(n,n)-t(n-m_1,n-m_1)+t(n,m_1+m_2-n)+$$
$$+t(n-(m_1+m_2-n),n-m_1)=t(n,n)+t(n,m_1+m_2-n)+$$
$$+t(n-m_1+n-m_2,n-m_1)-t(n-m_1,n-m_1)=$$
$$=t(n,n)+t(n,m_1+m_2-n)+(n-m_1)(n-m_2).$$

Отметим, что свойства *(г)* и *(д)* уточняют соответственно неравенства (5) и (7) при $k=1$ (тем самым и неравенства (6) и (8)). А содержательный смысл свойства *(б)* состоит в следующем:

Следствие 1. *Если $A\subseteq B_1^n$ и $|A|=m_1$, то произвольные $m-m_1$ вершин из $B_1^n\setminus A$ порождают $t(n-m_1,m-m_1)$ новых верхних граничных вершин в кубе B^n.*

Следствие 2. *Если $A\subseteq B_1^n$, $|A|=m$ и удаляются любые $m-m_1$ вершин из A, то $t(n-m_1,m-m_1)$ вершин из $T(A)$ перестанут быть граничными в кубе B^n.*

В дальнейшем мы будем также пользоваться более слабым утверждением, чем следствие 2, а именно:

Следствие 3. *Если $A\subseteq B_1^n$, $|A|=m_1$ и из подмножества A удаляются любые m, $m\le m_1$, вершин, то по меньшей мере $m(m-1)/2$ вершин из $T(A)$ перестанут быть граничными в кубе B^n.*

Последнее утверждение остается в силе и в том случае, если m вершин удаляются из разных подмножеств определенным образом.

Следствие 4. *Пусть $A_1\subseteq B_1^{n_1}$, $A_2\subseteq B_1^{n_2}$, $\ldots$, $A_r\subseteq B_1^{n_r}$, $\min(n_1,n_2,\ldots,n_r)=n$, $m\le n$, $|A_i|=m_i$, $1\le i\le r$, тогда, если $m_0=\sum_{i=1}^{r_0}m_i\le m<m_0+m_{r_0+1}$, и удаляются все подмножества A_1, $A_2,\ldots$, A_{r_0} и $m-m_0$ вершин из A_{r_0+1}, то общее число верхних граничных вершин $\sum_{i=1}^{r}|T(A_i)|$ уменьшается по крайней мере на $m(m-1)/2$.*

3 Канонические и двустабильные подмножества

В этом параграфе дадим новую нумерацию вершин k — го слоя куба B^n. Подмножество из B^n_k, состоящее из первых m, $0 \le m \le C^k_n$, занумерованных вершин, назовем каноническим по расстоянию и обозначим через $R(n,k,m)$.

Пусть $A \subseteq B^n_k$ и $\tilde\alpha \in A$, тогда вершину $\tilde\alpha$ назовем внутренней, если

$$S(\tilde\alpha) = \{\tilde\beta \in B^n_k \;\;/\;\; d(\tilde\alpha,\tilde\beta) = 2\} \subseteq A.$$

Вершины k — го слоя нумеруем следующим образом:

1. В качестве первого элемента возьмем вершину $\tilde\alpha_1$ k — го слоя имеющую наибольший лексикографический номер.

2. Допустим, что уже имеем некоторые занумерованные вершины

$$A_r = \{\tilde\alpha_1, \tilde\alpha_2, \dots, \tilde\alpha_r\},$$

здесь индекс r обозначает мощность подмножества A_r. Из A_r возьмем ту вершину, которая не является внутренней и имеет наименьший лексикографический номер. Пусть $\tilde\beta$ — такая вершина. Найдем подмножество $S(\tilde\beta)$. Занумеруем вершины подмножества $S(\tilde\beta) \setminus A_r$ числами от $r+1$ до $r + |\, S(\tilde\beta) \setminus A_r \,|$ в порядке убывания их лексикографических номеров.

3. Если уже занумерованы все вершины k — го слоя, то закончим процесс, в противном случае перейдем к пункту 2.

Воспользовавшись терминологией из [1] введем понятие двустабильного множества. Разобъем B^n по координатам i и j, $i < j$, на 4 подкуба: $B^{n,i,j}_{00}$, $B^{n,i,j}_{01}$, $B^{n,i,j}_{10}$, $B^{n,i,j}_{11}$ и пусть $A^{i,j}_{00}$, $A^{i,j}_{01}$, $A^{i,j}_{10}$, $A^{i,j}_{11}$ — соответствующие части подмножества $A \subseteq B^n$ в этих подкубах. Подмножество A называется двустабильным, если

$$(A^{i,j}_{01} + \tilde e_i) - \tilde e_j \subseteq A^{i,j}_{10}$$

для любых i и j $\;(i < j)$. Это множество обладает следующим важным свойством: если $\tilde\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in A$, то любой вектор, полученный из $\tilde\alpha$ сдвигом единиц в $\tilde\alpha$ влево, также принадлежит A.

Пусть имеем произвольное двустабильное подмножество $A \subseteq B^n_k$, тогда легко показать, что если $A^{1,2,\dots,r}_{00\dots01} = \emptyset$ для некоторого $r \ge 1$, то $A^{1,2,\dots,i}_{00\dots01} = \emptyset$ для любого $i > r$.

В дальнейшем через r_0 будем обозначать такое наибольшее число, для которого $A^{1,2,\dots,r_0}_{00\dots01} \neq \emptyset$, а $A^{1,2,\dots,r}_{00\dots01} = \emptyset$ при $r > r_0$. Верна следующая

Лемма 2. *Если $A \subseteq B^n_k$ — произвольное двустабильное подмножество, то для любого i , $1 \le i \le r_0 - 1$,*

$$P(A^{1,2,\dots,i}_{0\dots00}) + \tilde e_i \subseteq A^{1,2,\dots,i}_{0\dots01}, \quad A^{1,2,\dots,i}_{0\dots00} + \tilde e_i \subseteq T(A^{1,2,\dots,i}_{0\dots01}).$$

Доказательство. Пусть $\tilde\alpha = \tilde\alpha(i_1, i_2, \dots, i_k) \in A^{1,2,\dots,i}_{0\dots0}$ — произвольная вершина, где $i_1 > i$. Тогда

$$P(\{\tilde\alpha\}) = \{\overline\alpha(i_1), \overline\alpha(i_2), \dots, \overline\alpha(i_k)\},$$

и очевидно, что

$$P(\{\tilde{\alpha}\}) + \tilde{e}_i = \{\overline{\alpha}(i_1) + \tilde{e}_i, \overline{\alpha}(i_2) + \tilde{e}_i, \ldots, \overline{\alpha}(i_k) + \tilde{e}_i\} \subseteq B^{n,1,2,\ldots,i}_{0\ldots01}.$$

Ясно, что вершина $\overline{\alpha}(i_1) + \tilde{e}_i$ получается из вершины $\tilde{\alpha}$ сдвигом единицы i_1 — й координаты влево. Так как множество A двустабильно, то $\overline{\alpha}(i_1) + \tilde{e}_i \in A$. В свою очередь вершина $\overline{\alpha}(i_2) + \tilde{e}_i$ получается из вершины $\overline{\alpha}(i_1) + \tilde{e}_i$ сдвигом единицы i_2 — й координаты влево, значит, вершина $\overline{\alpha}(i_2) + \tilde{e}_i$ также принадлежит множеству A. Продолжая этот процесс, получим, что $P(\{\tilde{\alpha}\}) + \tilde{e}_i \subseteq A$, т. е. $P(\{\tilde{\alpha}\}) + \tilde{e}_i \subseteq A^{1,2,\ldots,i}_{0\ldots01}$. Так как $\tilde{\alpha}$ — произвольная вершина из множества $A^{1,2,\ldots,i}_{0\ldots00}$, то

$$P(A^{1,2,\ldots,i}_{0\ldots00}) + \tilde{e}_i \subseteq A^{1,2,\ldots,i}_{0\ldots01}.$$

С другой стороны, очевидно, что $\tilde{\alpha} + \tilde{e}_i \in T(\overline{\alpha}(i_j) + \tilde{e}_i)$ для любого $j \in \{\overline{1,k}\}$, а это значит, что

$$A^{1,2,\ldots,i}_{0\ldots00} + \tilde{e}_i \subseteq T(A^{1,2,\ldots,i}_{0\ldots01}).$$

Лемма доказана.

Непосредственно из этой леммы следует

Следствие 5. *Если $A \subseteq B^n_k$ — двустабильное множество, то*

$$|\,\Gamma(A)\,| = |\,T(A^1_0)\,| + |\,\Gamma(A^1_1)\,| + |\,A^1_1\,| =$$

$$= |\,T(A^{1,2}_{01})\,| + |\,T(A^{1,2,3}_{001})\,| + \cdots + |\,T(A^{1,2,\ldots,r_0}_{0\ldots01})\,| + |\,\Gamma(A^1_1)\,| + |\,A^1_1\,|.$$

Замечание 1. *Здесь и в дальнейшем, если специально не оговорено обратного, граничные вершины подмножества $A^{i_1,i_2,\ldots,i_r}_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r}$ рассматриваются в соответствующем подкубе $B^{n,i_1,i_2,\ldots,i_r}_{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_r}$.*

Лемма 3. *Пусть $A \subseteq B^n_3$ — произвольное двустабильное множество. Если $A^1_0 \neq \emptyset$ и $A^1_1 \not\supseteq B^{n,1,2}_{11}(1)$, то из него можно получить такое двустабильное множество $C \subseteq B^n_3$, что или $C^1_0 = \emptyset$, или же $C^1_0 \neq \emptyset$ и $C^1_1 \supseteq B^{n,1,2}_{11}(1)$, причем $|\,C\,| = |\,A\,|$ и $|\,\Gamma(C)\,| \leq |\,\Gamma(A)\,|$.*

Доказательство.

Пусть $A \subseteq B^n_3$ — двустабильное множество, для которого $A^1_0 \neq \emptyset$ и $A^1_1 \not\supseteq B^{n,1,2}_{11}(1)$. Из вершин подмножества A^1_0 возьмем такую вершину $\tilde{\alpha}$, для которой третья единица находится в самом правом положении:

$\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(i_1, i_2, i_3) \in A^1_0, 2 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq n, i_2 \geq 3, i_3 \geq 4.$

Так как A — двустабильное множество, а вершины $\tilde{\alpha}(1,2,i_3)$ и $\tilde{\alpha}(1,3,i_3)$ получаются из вершины $\tilde{\alpha}(i_1,i_2,i_3)$ сдвигом первых двух единиц влево, то они принадлежат подмножеству A^1_1. Подобным образом из вершин $\tilde{\alpha}(1,2,i_3)$ и $\tilde{\alpha}(1,3,i_3)$ получим (сдвигая третья единица влево) всего $i_3 - 3 + i_3 - 4$ вершин, принадлежащих подмножеству A^1_1. Так что, если рассмотрим разбиение

$$A^1_1 = A^{1,2}_{11} \cup A^{1,2,3}_{101} \cup A^{1,2,3}_{100} \tag{9}$$

подмножества A_1^1, то $|A_{11}^{1,2}| \geq i_3 - 2$ и $|A_{101}^{1,2,3}| \geq i_3 - 3$. Ясно, что $i_3 \neq n$, так как при $i_3 = n$ имели бы

$$A_1^1 \supseteq B_{11}^{n,1,2}(1) \cup B_{101}^{n,1,2,3}(1).$$

С другой стороны, очевидно, что каждая вершина $\tilde{\beta} \in A_0^1$ в подкубе $B_0^{n,1}$ порождает по меньшей мере $n - i_3$ граничных вершин, которые отличны от граничных вершин подмножества $A_0^1 \setminus \{\tilde{\beta}\}$ (т.е. собственный вклад вершины $\tilde{\beta}$ в границу $\Gamma(A_0^1)$ не меньше $n - i_3$).

В дальнейшем мы часто будем выполнять преобразование следующего вида:

вместо некоторых m вершин, $m \geq 1$, подмножества A_0^1 с наименьшими лексикографическими номерами будем брать в том же количестве вершины из подмножества $B_1^{n,1}(2) \setminus A_1^1$ с наибольшими лексикографическими номерами.

Это преобразование будем обозначать через

$$M\Big(A_0^1 \Rightarrow B_1^{n,1}(2) \setminus A_1^1, m\Big).$$

Ясно, что после такого преобразования двустабильность множества A не нарушается.

Имеем, что
$a_1 = |B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}| \leq n - 2 - (i_3 - 2) = n - i_3$.

- Если $a_1 < n - i_3$, то произвольная вершина подмножества $B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}$ может порождать максимум $n - i_3 - 2 + 2 = n - i_3$ новых граничных вершин в кубе B^n. Так что, если выполним преобразование $M\Big(A_0^1 \Rightarrow B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}, 1\Big)$, то после этого в подкубе $B_0^{n,1}$ перестанут быть граничными по меньшей мере $n - i_3$ вершин, а в кубе B^n могут порождаться максимум $n - i_3$ новых граничных вершин, то есть число граничных вершин полученного множества (оно снова обозначим через A) может только уменьшаться. Продолжим выполнять преобразование $M\Big(A_0^1 \Rightarrow B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}, 1\Big)$ до тех пор, пока A_0^1 не станет пустым множеством или $B_{11}^{n,1,2} \subseteq A_0^1$. Тем самым получим искомое множество C.
- Отныне будем предполагать, что $a_1 = n - i_3$ (т.е. $|A_{11}^{1,2}| = i_3 - 2$ и $|A_{101}^{1,2,3}| = i_3 - 3$).

1. Теперь, если $n - i_3 \geq 3$, то возможны следующие подслучаи:

   (a) Если $|A_0^1| \geq a_1 = n - i_3 \geq 3$, то выполним преобразование

   $$M\Big(A_0^1 \Rightarrow (B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}), n - i_3\Big).$$

   Тогда в подкубе $B_0^{n,1}$ перестанут быть граничными по меньшей мере $(n - i_3)(n - i_3)$ вершин, а в кубе B^n могут порождаться максимум $t(n - i_3, n - i_3) + 2 \cdot (n - i_3)$ новых граничных вершин. Легко видеть, что $(n - i_3)(n - i_3) \geq t(n - i_3, n - i_3) + 2 \cdot (n - i_3)$ при $n - i_3 \geq 3$. То есть снова получим искомое множество C.

(б) Если $\mid A_0^1 \mid = 2, n - i_3 \geq 3$, то выполним преобразование

$$M\Big(A_0^1 \Rightarrow (B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}), 2\Big).$$

Тогда в подкубе $B_0^{n,1}$ перестанут быть граничными по меньшей мере $n - 4 + n - 5 = 2n - 9$ вершин, а в кубе B^n могут порождаться максимум $n - i_3 - 1 + 2 + n - i_3 - 2 + 2 = 2n - 2i_3 + 1$ новых граничных вершин. Ясно, что $2n - 9 \geq 2n - 2i_3 + 1$ при $i_3 \geq 5$. А неравенство $i_3 \geq 5$ всегда верно, так как $\mid A_0^1 \mid = 2$. Так что, полученное множество снова удовлетворяет требованиям леммы.

(в) Если $\mid A_0^1 \mid = 1, n - i_3 \geq 3$, то непременно $i_3 = 4$ и $\mid A_{101}^{1,2,3} \mid = i_3 - 3 = 1$. И следовательно, в разбиении (9) $A_{100}^{1,2,3} = \emptyset$ (в противном случае имели бы $a_1 < n - i_3$, который противоречит нашего предположения). Тогда, если выполним преобразование

$$M\Big(A_0^1 \cup A_{101}^{1,2,3} \Rightarrow (B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}), 2\Big).$$

то в кубе B^n перестанут быть граничными $n - 4 + n - 4 + 1 = 2n - 7$ вершин и порождаются самое большее $n - i_3 - 1 + 2 + n - i_3 - 2 + 2 = 2n - 7$ новых граничных вершин. Таким образом, число граничных вершин полученного множества вновь не увеличивается и оно удовлетворяет требованиям леммы.

2. Если $n - i_3 = 2$, то

$$\mid B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2} \mid = \mid B_{101}^{n,1,2,3}(1) \setminus A_{101}^{1,2,3} \mid = 2.$$

и возможны следующие подслучаи:

(а) При $\mid A_0^1 \mid \geq 4$ выполним преобразование

$$M\Big(A_0^1 \Rightarrow (B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}) \cup (B_{101}^{n,1,2,3}(1) \setminus A_{101}^{1,2,3}), 4\Big),$$

тогда в подкубе $B_0^{n,1}$ перестанут быть граничными по меньшей мере $4(n - i_3) = 8$ вершин, а в кубе B^n порождаются максимум $(1 + 2) + (0 + 2) + (1 + 1) + (0 + 1) = 8$ новых граничных вершин. Так что, полученное множество снова удовлетворяет требованиям леммы.

(б) При $\mid A_0^1 \mid = 3$ выполним преобразование

$$M\Big(A_0^1 \Rightarrow (B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}) \cup (B_{101}^{n,1,2,3}(1) \setminus A_{101}^{1,2,3}), 3\Big),$$

тогда в подкубе $B_0^{n,1}$ перестанут быть граничными по меньшей мере $\mid T(A_0^1) \mid \geq n - 4 + n - 5 + n - 6 = 3n - 15$ вершин, а в кубе B^n порождаются максимум $(1 + 2) + (0 + 2) + (1 + 1) = 7$ новых граничных вершин. Ясно, что $3n - 15 \geq 7$, когда $n \geq 8$. Легко заметить, что и при $n = 7$ $\mid T(A_0^1) \mid \geq 7 - 4 + 7 - 5 + 2 = 7$ в подкубе $B_0^{7,1}$, а при $n = 6$ непременно $\mid A_0^1 \mid \leq 1$. Так что, полученное множество снова удовлетворяет требованиям леммы.

(в) При $|A_0^1| = 2$ выполним преобразование

$$M\left(A_0^1 \Rightarrow B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}, 2\right),$$

тогда в подкубе $B_0^{n,1}$ перестанут быть граничными по меньшей мере $|T(A_0^1)| \geq n-4+n-5 = 2n-9$ вершин, а в кубе B^n порождаются максимум $(1+2)+(0+2) = 5$ новых граничных вершин. Ясно, что $2n-9 \geq 5$ при $n \geq 7$. Так что, полученное множество снова удовлетворяет требованиям леммы.

(г) При $|A_0^1| = 1$ выполним преобразование

$$M\left(A_0^1 \Rightarrow B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}, 1\right),$$

тогда в подкубе $B_0^{n,1}$ перестанут быть граничными по меньшей мере $|T(A_0^1)| \geq n-4$ вершин, а в кубе B^n порождаются максимум 3 новые граничные вершины. Ясно, что $n-4 \geq 3$ при $n \geq 7$. А если $n = 6$, то обязательно $i_3 = 4$ и, следовательно, в разбиении (9) $A_{100}^{1,2,3} = \emptyset$. Так что, если вместо подмножества $A_0^1 \cup A_{101}^{1,2,3}$ (исчезают $2+2+1 = 5$ граничных вершин) возьмем подмножество $B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}$ (порождаются 5 новых граничных вершин), то полученное множество снова удовлетворяет требованиям леммы.

3. Если $n - i_3 = 1$, то

$$|B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}| = |B_{101}^{n,1,2,3}(1) \setminus A_{101}^{1,2,3}| = |B_{011}^{n,1,2,3}(1) \setminus A_{011}^{1,2,3}| = 1.$$

Возможны следующие подслучаи:

(а) При $|A_0^1 \setminus A_{011}^{1,2,3}| \geq 3$ выполним преобразование

$$M\Big(A_0^1 \setminus A_{011}^{1,2,3} \Rightarrow (B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}) \cup (B_{101}^{n,1,2,3}(1) \setminus A_{101}^{1,2,3}) \cup$$
$$\cup (B_{011}^{n,1,2,3}(1) \setminus A_{011}^{1,2,3}), 3\Big),$$

тогда в подкубе $B_0^{n,1}$ перестанут быть граничными по меньшей мере $3(n - i_3) = 3$ вершин, а в кубе B^n порождаются максимум $2+1+0 = 3$ новые граничные вершины. Так что, полученное множество снова удовлетворяет требованиям леммы.

(б) Если $A_0^1 \setminus A_{011}^{1,2,3} = \{\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2\}$, то выполним преобразование

$$M\left(A_0^1 \setminus A_{011}^{1,2,3} \Rightarrow (B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}) \cup (B_{101}^{n,1,2,3}(1) \setminus A_{101}^{1,2,3}), 3\right),$$

тогда в подкубе $B_0^{n,1}$ перестанут быть граничными по меньшей мере $n-5+n-6 = 2n-11$ вершин (если вершины $\tilde{\beta}_1$ и $\tilde{\beta}_2$ одновременно принадлежат $B_{00}^{n,1,2}(3)$ или $B_{010}^{n,1,2,3}(2)$) или $n-5+n-5 = 2n-10$ вершин(если $\tilde{\beta}_1 \in B_{00}^{n,1,2}(3)$ и $\tilde{\beta}_2 \in B_{010}^{n,1,2,3}(2)$), а в кубе B^n порождаются максимум 3 новые граничные вершины. Ясно, что $2n-11 \geq 3$ или $2n-10 \geq 3$ при $n \geq 7$. А в случае $n = 6$ обязательно имеем $A_0^1 = \{(001110), (010110), (011010), (011100)\}$ и $A_1^1 = B_1^{6,1} \setminus \{(100011), (100101), (101001), (110001)\}$. Так что, если вместо подмножества A_0^1 возьмем подмножество $\{(100011), (100101), (101001), (110001)\}$, то число граничных вершин полученного множества не увеличивается и оно удовлетворяет требованиям леммы.

(в) Если $A_0^1 \setminus A_{011}^{1,2,3} = \{\bar{\beta}_1\}$, то выполним преобразование

$$M\Big(A_0^1 \Rightarrow (B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}) \cup (B_{101}^{n,1,2,3}(1) \setminus A_{101}^{1,2,3}), 2\Big),$$

тогда в подкубе $B_0^{n,1}$ перестанут быть граничными по меньшей мере $n - 5 + 1 = n - 4$ вершин , а в кубе B^n порождаются максимум 3 новые граничные вершины. Ясно, что $n - 4 \geq 3$ при $n \geq 7$. А в случае $n = 6$ обязательно имеем $A_1^1 = B_1^{6,1} \setminus \{(100011), (100101), (101001), (110001)\}$ и $A_0^1 = \{(010110), (011010), (011100)\}$. Так что, если вместо подмножества A_0^1 возьмем подмножество $\{(100101), (101001), (110001)\}$, то число граничных вершин полученного множества не увеличивается, и оно удовлетворяет требованиям леммы.

(г) И наконец, если $A_0^1 = A_{011}^{1,2,3}$, то выполним преобразование

$$M\Big(A_{011}^{1,2,3} \Rightarrow (B_{11}^{n,1,2}(1) \setminus A_{11}^{1,2}) \cup (B_{101}^{n,1,2,3}(1) \setminus A_{101}^{1,2,3}), 2\Big),$$

тогда в подкубе $B_0^{n,1}$ перестанут быть граничными по меньшей мере три вершины , а в кубе B^n порождаются три новые граничные вершины. Так что, вновь получим искомое множество.

Лемма доказана.

Лемма 4. *Из любого подмножества B_3^n мощности $m, 1 \leq m \leq C_n^3$, без увеличения числа граничных вершин можно получить такое двустабильное множество $A \subseteq B_3^n$ мощности m, для которого каждое подмножество $A_{0...01}^{1,2,...,i}$, $1 \leq i \leq r_0$, можно представить в следующем виде:*

$$A_{0...01}^{1,2,...,i} = B_{0...011}^{n,1,2,...,i+1}(1) \cup B_{0...0101}^{n,1,2,...,i+2}(1) \cup \cdots \cup B_{0...010...01}^{n,1,2,...,k_i}(1) \cup A', \qquad (10)$$

где $\emptyset \subseteq A' \subset B_{0...010...01}^{n,1,2,...,k_i+1}(1)$ и $k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_{r_0} \geq r_0 + 1$;

другими словами, каждое подмножество $A_{0...01}^{1,2,...,i}$ является конечным отрезком лексикографического порядка в соответствующем подкубе $B_{0...01}^{n,1,2,...,i}$.

Доказательство.

Без нарушения общности мощно предполагать, что данное произвольное подмножество $A \subseteq B_3^n$ удовлетворяет требованиям предыдущей леммы, а именно, $A_0^1 = \emptyset$, или же $A_0^1 \neq \emptyset$ и $A_1^1 \supseteq B_{11}^{n,1,2}(1)$.

- Очевидно, что если $A_0^1 = \emptyset$, то

$$|\,\Gamma(A)\,| = |\,\Gamma(A_1^1)\,| + m$$

и если вместо подмножества A_1^1 возьмем конечный отрезок лексикографического порядка длины $|\,\Gamma(A_1^1)\,|$ в $B_1^{n,1}(2)$, то число граничных вершин полученного подмножества может только уменьшаться (так как конечный отрезок лексикографического порядка произвольной длины в $B_1^{n,1}(2)$ оптимален, см. [3]). А это значит, что $r_0 = 1$, и существует такое число $k_1 \geq 2$ что

$$A_1^1 = B_{11}^{n,1,2}(1) \cup B_{101}^{n,1,2,3}(1) \cup \cdots \cup B_{10...01}^{n,1,2,...,k_1}(1) \cup A',$$

где $\emptyset \subseteq A' \subset B_{10...01}^{n,1,2,...,k_1+1}(1)$. Тем самим лемма доказана.

- Пусть $A_0^1 \neq \emptyset$ и $A_1^1 \supseteq B_{11}^{n,1,2}(1)$. Покажем, что в этом случае A_1^1 можно представить в виде (10). Пусть $i_0 \geq 3$ то наименьшее число, для которого
$$A_1^1 \supseteq B_{11}^{n,1,2}(1) \cup B_{101}^{n,1,2,3}(1) \cup \dots \cup B_{10\dots01}^{n,1,2,\dots,i_0-1}(1) \cup A',$$
но $B_{10\dots01}^{n,1,2,\dots,i_0}(1) \not\subseteq A_1^1$. Подмножество A_0^1 разобъем на два непересекающихся подмножества следующим образом:
$$A_0^1 = A' \cup A'', \text{ где}$$
$$A' = \{\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(i_1, i_2, i_3) \in A_0^1 \ \ / \ \ i_2 \geq i_0\}, \text{ и}$$
$$A'' = \{\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(i_1, i_2, i_3) \in A_0^1 \ \ / \ \ i_2 < i_0\}.$$

1. Если $A' \neq \emptyset$, то через j_0 обозначим то наибольшее целое число, для которого существует вершина $\tilde{\alpha}(i_1, i_2, j_0)$, принадлежащая A'. Тогда, согласно двустабильности подмножества A, имеем $\mid A_{10\dots01}^{1,2,\dots,i_0} \mid \geq j_0 - i_0$, и следовательно
$$\mid B_{10\dots01}^{n,1,2,\dots,i_0}(1) \setminus A_{10\dots01}^{1,2,\dots,i_0} \mid = a_{i_0} \leq n - i_0 - j_0 + i_0 = n - j_0.$$
Легко заметить, что произвольная вершина подмножества $B_{10\dots01}^{n,1,2,\dots,i_0}(1) \setminus A_{10\dots01}^{1,2,\dots,i_0}$ может порождать в кубе B^n максимум $n - j_0 - 1 + \ + 1 = n - j_0$ новых граничных вершин (так как $A_1^1 \supseteq B_{11}^{n,1,2}(1)$). С другой стороны, собственный вклад любой вершины подмножества A' в границу $\Gamma(A')$ не меньше $n - j_0$. Так что, если выполним преобразование
$$M\Big(A' \Rightarrow B_{10\dots01}^{n,1,2,\dots,i_0}(1) \setminus A_{10\dots01}^{1,2,\dots,i_0}, b\Big),$$
где $b = \min(\mid A' \mid, a_{i_0})$, то число граничных вершин полученного множества (которое вновь обозначим через A) не увеличивается, и $A' = \emptyset$, или же $A' \neq \emptyset$ и $A_1^1 \supseteq B_{10\dots01}^{n,1,2,\dots,i_0}(1)$. Если $A' \neq \emptyset$ и $A_1^1 \supseteq B_{10\dots01}^{n,1,2,\dots,i_0}(1)$, то i_0 увеличиваем на единицу и повторяем предыдующие шаги до такого числа i_0, для которого соответствующее подмножество $A' = \emptyset$.
2. Если $A' = \emptyset$, то поступим следующим образом. Прежде всего заметим, что
$$A_0^1 = A'' \text{ и } P(A_0^1) + \tilde{e}_1 \subseteq B_{11}^{n,1,2}(1) \cup B_{101}^{n,1,2,3}(1) \cup \dots \cup B_{10\dots01}^{n,1,2,\dots,i_0-1}(1).$$
И следовательно, если вместо подмножества A_1^1 возьмем конечный отрезок лексикографического порядка длины $\mid \Gamma(A_1^1) \mid$ в $B_1^{n,1}(2)$, то число граничных вершин полученного подмножества может только уменьшаться, а число i_0—увеличиваться, его обозначим через k_1. То есть, подмножество A_1^1 представляется в виде (10), причем если еще $A_0^1 \neq \emptyset$, то для любой вершины $\tilde{\alpha}(i_1, i_2, i_3) \in A_0^1 \ \ i_2 \leq k_1$.

И далее, если $A_0^1 \neq \emptyset$, то аналогичным образом подмножество $A_{01}^{1,2}$ можем представить в виде (10) в подкубе $B_0^{n,1}$. Остается заметить, что те вершины, которые добавляются к подмножеству $A_{01}^{1,2}$ не порождают нижние граничные вершины в подкубе $B_0^{n,1}$ и граничные вершины в подкубе $B_1^{n,1}$. Так как, если i_0 — то наибольшее целое число, для которого $A_{010\dots01}^{1,2,\dots,i_0} \neq \emptyset$, то $i_0 \leq k_1$ и
$$P\Big(B_{011}^{n,1,2,3}(1) \cup B_{0101}^{n,1,2,3,4}(1) \cup \dots \cup B_{010\dots01}^{n,1,2,\dots,i_0}(1)\Big) + \tilde{e}_1 \subseteq A_1^1$$

$$\left(B_{011}^{n,1,2,3}(1) \cup B_{0101}^{n,1,2,3,4}(1) \cup \dots \cup B_{010\dots01}^{n,1,2,\dots,i_2}(1)\right) + \bar{e}_1 \subseteq T(A_1^1).$$

а число k_2 в представлении (10) не больше числа k_1.

Этот процесс проведем для всех подмножеств $A_{0\dots01}^{1,2,\dots,i}, 1 \le i \le r_0$.

Лемма доказана.

4 Изопериметрическая задача для 3–го слоя куба B^n

Непосредственно из определения канонического множества по расстоянию следует

Следствие 6. *Если $m \ge C_{n-2}^2 + C_{n-1}^2$, то $R(n,3,m) = L(n,3,m)$.*

Теорема 1. *Если $m \le 1 + 3(n-3)$, то каноническое подмножество по расстоянию $R(n,3,m)$ оптимально.*

Доказательство.

Достаточно показать, что для любого подмножества $A \subseteq B_3^n$ мощности m

$$|\,\Gamma(A)\,| \ge |\,\Gamma(R(n,3,m))\,|.$$

Не нарушая общности, можно предполагать, что подмножество $A \subseteq B_3^n$ удовлетворяет требованиям леммы 4.

1. Тогда, если $m \le 1 + 2(n-3)$, то $A_0^1 = \emptyset$. И следовательно,

$$|\,\Gamma(A)\,| = |\,\Gamma(A_1^1)\,| + m = |\,\Gamma(L(n-1,2,m))\,| + m =$$
$$= |\,\Gamma(R(n-1,2,m))\,| + m = |\,\Gamma(R(n,3,m))\,|.$$

2. Пусть теперь $1 + 2(n-3) < m \le 1 + 3(n-3)$. Тогда, согласно лемме 4 имеем:

$$A_1^1 \supseteq B_{11}^{n,1,2}(1) \cup B_{101}^{n,1,2,3}(1) \text{ и } A_0^1 \subseteq B_{011}^{n,1,2,3}(1).$$

Если $A_1^1 = B_{11}^{n,1,2}(1) \cup B_{101}^{n,1,2,3}(1)$, то уже A — каноническое множество. Поэтому будем предполагать, что $|\,A_1^1\,| = a_1 > 2n-5$ и $|\,A_0^1\,| = a_0 < n-3$, т.е. $a_1 = 2n-5+a_2$, где $a_2 \ne 0$.

Прежде всего, заметим, что

$$|\,\Gamma(R(n,3,m))\,| = t(n-1,3,m-2n+5) + t(n-2,1,n-2) +$$
$$+ t(n-3,1,n-3) + n - 1 + 2n - 5.$$

Так как $m - 2n - 5 \le n - 3$, то

$t(n-1,3,m-2n+5) = t(n-3,1,m-2n+5) = t(n-3,m-2n+5)$.

Следовательно,

$$|\,\Gamma(R(n,3,m))\,| = t(n-3,m-2n+5) + t(n-2,n-2) + t(n-3,n-3) + 3n - 6.$$

С другой стороны,

$$|\,\Gamma(A)\,| \ge |\,T(A_0^1)\,| + |\,\Gamma(A_1^1)\,| + 2n - 5 + a_2 \ge$$
$$\ge t(n-1,3,a_0) + t(n-2,n-2) + t(n-3,n-3) + t(n-3,2,a_2) + 3n - 6 + a_2.$$

Теперь, исходя из мощности $|\,A_1^1\,|$, рассмотрим следующие возможные подслучаи:

(а) Если $0 \le a_0 \le n-3$ и $0 < a_2 \le n-4$, то

$$t(n-1,3,a_0) = t(n-3,1,a_0) = t(n-3,a_0)$$

$$t(n-3,2,a_2) = t(n-4,1,a_2) = t(n-4,a_2)$$

И следовательно,

$$|\,\Gamma(A)\,| \ge t(n-3,a_0) + t(n-2,n-2) + t(n-3,n-3) + t(n-4,a_2) + $$
$$+ 3n - 6 + a_2 \ge |\,\Gamma(R(n,3,m))\,|,$$

так как $t(n-3,a_0)+t(n-4,a_2)+a_2 = t(n-3,a_0)+t(n-3,a_2) = t(n-3,a_0+a_2)+$ $a_0 \cdot a_2 \ge t(n-3,a_0+a_2) = t(n-3,m-2n+5)$.

(б) Если $a_2 = n-3$ и $a_0 = 0$, т.е. $m = 3n-8$, то $t(n-1,3,a_0) = 0$;

$$t(n-3,2,a_2) = t(n-3,2,n-3) = t(n-4,1,n-4) + t(n-5,1,1) =$$
$$= t(n-4,n-4) + n - 6.$$

Так что

$$|\,\Gamma(A)\,| \ge t(n-2,n-2) + t(n-3,n-3) + t(n-4,n-4) +$$
$$+ 3n - 6 + n - 3 + n - 6 =$$
$$= t(n-2,n-2) + t(n-3,n-3) + t(n-3,n-4) + 3n - 6 + n - 5 =$$
$$= t(n-2,n-2) + t(n-3,n-3) + t(n-3,n-3) + 3n - 6 + n - 5 =$$
$$= |\,\Gamma(R(n,3,3n-8))\,| + n - 5 > |\,\Gamma(R(n,3,m))\,|, \text{ как только } n > 5.$$

Теорема доказана.

Верна также

Лемма 5. *Если $m \le 3n-9$, то конечный отрезок лексикографического порядка длины $m - L(n,3,m)$ также оптимален.*

Действительно, если $m \le 2n-5$, то $L(n,3,m) = R(n,3,m)$, а если $2n-5 < m \le 3n-9$, то легко проверить, что

$$|\,\Gamma(L(n,3,m))\,| = |\,\Gamma(R(n,3,m))\,|.$$

Теорема 2. *Если $m \ge C_{n-1}^2 + C_{n-2}^2$, то конечный отрезок лексикографического порядка длины $m - L(n,3,m)$ является оптимальным множеством.*

Доказательство.

Достаточно показать, что для любого подмножества $A \subseteq B_3^n$ мощности m

$$|\,\Gamma(A)\,| \ge |\,\Gamma(L(n,3,m))\,|.$$

Не нарушая общности, можно предполагать, что подмножество $A \subseteq B_3^n$ удовлетворяет требованиям леммы 4. Тогда

- $d_1 = |\, B_1^{n,1}(2) \setminus A_1^1 \,| = C_{n_1}^2 + m_1$, где $0 \le m_1 < n_1$;
- $d_2 = |\, B_{01}^{n,1,2}(2) \setminus A_{01}^{1,2} \,| = C_{n_1}^2 + \sum_{i=1}^{r}(n_1 + i - 1) + m_2$, где $0 \le m_2 < n_1 + r$, здесь $r \ge 1$, если $m_1 \ne 0$, а при $m_1 = 0$ возможно, что $r = 0$;
- все вершины подмножества $A_{00}^{1,2}$ принадлежат 1–ым слоям различных подкубах B^{r_i}, где все $r_i \ge n_1$.

Пусть $d_0 = d_1 + d_2 = 2C_{n_1}^2 + m_1 + m_2 + \sum_{i=1}^{r}(n_1 + i - 1)$. Так как $m \ge C_{n-1}^2 + C_{n-2}^2$, то $|\, A_{00}^{1,2} \,| \ge d_0$. Так что вместо d_0 вершин из $A_{00}^{1,2}$, имеющих наименьшие лексикографические номера, можем взять подмножество

$$\left(B_1^{n,1}(2) \setminus A_1^1\right) \cup \left(B_{01}^{n,1,2}(2) \setminus A_{01}^{1,2}\right).$$

Тогда, после этого преобразования, в кубе B^n порождаются максимум

$$a_1 = 2C_{n_1}^3 + \frac{m_1(m_1-1)}{2} + \frac{m_2(m_2-1)}{2} + \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_1+i-1)(n_1+i-2)}{2} + C_{n_1}^2 + m_1$$

новых граничных вершин, а в подкубе $B_{00}^{n,1,2}$ перестанут быть граничными по крайней мере

$$a_2 = \frac{n_1(n_1-1)(n_1-1)}{2} + \frac{m_1(m_1-1)}{2} + \frac{m_2(m_2-1)}{2} + \\ + \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_1+i-1)(n_1+i-2)}{2}$$

вершин.

Имеем

$$a_2 - a_1 = \frac{n_1(n_1-1)(n_1-1)}{2} - \frac{n_1(n_1-1)(n_1-2)}{3} - C_{n_1}^2 - m_1 =$$

$$= \frac{n_1(n_1-1)}{6}(3n_1 - 3 - 2n_1 + 4) - C_{n_1}^2 - m_1 = C_{n_1+1}^3 - C_{n_1}^2 - m_1 =$$

$$= C_{n_1}^3 + C_{n_1}^2 - C_{n_1}^2 - m_1 = C_{n_1}^3 - m_1 \ge 0 \text{ при } n_1 \ge 4.$$

Аналогичным образом, при $n_1 = 3$ и $m_1 = 2$ можно показать, что $a_2 \ge a_1$.

А это значит, что число граничных вершин полученного подмножества D не увеличивается. Кроме того, подмножество D уже содержит $B_1^{n,1}(2) \cup B_{01}^{n,1,2}(2)$ и следовательно, $P(D) = B_2^n$ и

$$|\, \Gamma(A) \,| \ge |\, \Gamma(D) \,| = |\, T(D_{00}^{1,2} \,| + C_{n-2}^3 + C_{n-1}^3 + C_n^1 \ge |\, \Gamma(L(n,3,m)) \,|.$$

Теорема доказана.

Непосредственно из теоремы 2 и леммы 5 следует

Лемма 6. *Для произвольного числа n конечный отрезок лексикографического порядка длины m — $L(n,3,m)$ максимум в $(n-2)^2 - 3n + 9$ случаях может быть не оптималным.*

Через $L(n)$ (соответственно через $OL(n)$) обозначим количество тех мощностей m, $0 \le m \le C_n^3$, для которых конечный отрезок $L(n,3,m)$ не оптимален (соответственно оптимален). Будем говорить, что конечный отрезок $L(n,3,m)$ в B_3^n почти всегда является оптимальным множеством, если $L(n)/OL(n)$ стремится к нулю при $n \to \infty$.

Верна следующая

Лемма 7. *отрезок лексикографического порядка длины m – $L(n,3,m)$ почти всегда является оптимальным множеством в B_3^n.*

Действительно, согласно лемме 6 $L(n) \le (n-2)^2 - 3n + 9$, и следовательно

$$\frac{L(n)}{OL(n)} \le \frac{(n-2)^2 - 3n + 9}{C_{n-2}^3 + 3n - 9} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

5 Заключение

Как известно, почти все известные решения дискретной изопериметрической задачи получались следующим образом: вершины дискретного пространства линейно упорядочивались так, чтобы начальный отрезок произвольной длины этого порядка являлся бы решением дискретной изопериметрической задачи.

Но для вершин 3 — го слоя куба B^n, вообще говоря, невозможно дать такое линейное упорядочение. Более того, экспериментально было показано, что, если $1 + 3(n-3) < m < C_{n-1}^2 + C_{n-2}^2$, то для некоторых мощностей m оптимальным является только одно из подмножеств $R(n,3,m)$, $L(n,3,m)$, $S(n,3,m)$, где $S(n,3,m)$ — каноническое множество из работы [3].

Через $\Gamma(m)$ обозначим число граничных вершин оптимального подмножества $A \subseteq B_3^n$ мощности m. Выдвигается следующее

Предположение

$$\Gamma(m) = \min\Big(\mid \Gamma(L(n,3,m)) \mid , \mid \Gamma(R(n,3,m)) \mid , \mid \Gamma(S(n,3,m)) \mid\Big).$$

Заметим, что для $n = 6,7$ это предположение справедливо.

Список литературы

[1] Harper L. H. Optimal numberings and isoperimetric problems on graphs. Journal of Combinatorial Theory, 1966,v.1, 3, p. 385–393.

[2] Katona G. The Hamming-sphere has minimum boundary. Studia Scient. Math. Hungaruca, 10, 1975, p. 131–140.

[3] Безруков С. Л. Об одной изопериметрической задаче. Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем, Сб. трудов ИМ СОАН СССР, 1983г., вып. 40, стр. 3–18.