Математические проблемы кибернетики и вычислительной техники 17, 1997, 130–139.

Об ортогональном параметрическом преобразовании Фибоначчи

В. Л. Даллакян

Институт проблем информатики и автоматизации
НАН РА и ЕрГУ

В работе рассматриваются некоторые свойства числовых и функциональных параметрических последовательностей Фибоначчи. На основе полученных свойств вводится ортогональная, нормированная и полная в L_2 система функций и определяются соответствующие ей прямое и обратное ортогональные параметрические преобразования Фибоначчи. Приводятся формулы для быстрого выполнения этих преобразований.

1 Введение

С созданием новых средств вычислительной техники увеличивается возможность эффективного использования в науке и технике математических преобразований. Широко известными среди них являются преобразования Фурье, Уолша, Адамара, Хаара. Областями применения (ортогональных) преобразований являются управление, связь [1], цифровая обработка изображений [2,3]. В [4] предлагается некоторая ортогональная система функций, построенная на основе (классической) последовательности Фибоначчи, и изучается соответствующее ортогональное преобразование Фибоначчи.

В настоящей работе вводится понятие функциональной параметрической последовательности Фибоначчи, являющейся, с одной стороны, частным случаем линейных рекуррентных последовательностей с постоянными коэффициентами [5], а, с другой стороны, обобщением классической последовательности Фибоначчи [6]. Полученные свойства таких последовательностей позволили определить ортогональные, нормированные и полные в L_2 системы функций и соответствующие им прямые и обратные ортогональные параметрические преобразования, называемые преобразованиями Фибоначчи.

2 Параметрическая последовательность Фибоначчи и ее свойства

Определение 2.1. Числовая последовательность $\{\varphi_n\}$ называется последовательностью Фибоначчи, если при всяком $n > 2$ выполняется соотношение

$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + \varphi_{n-2}. \tag{2.1}$$

Важным частным случаем последовательности Фибоначчи является последовательность чисел $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$, называемая рядом Фибоначчи, где, как видим, $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$.

Определение 2.2 Для любых чисел α и β, не равных одновременно нулю, и определенных на отрезке $[0,1]$ функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ называется параметрической последовательностью Фибоначчи, если при всяком (целом) $n > 2$

$$\varphi_n(x) = \alpha\varphi_{n-1}(x) + \beta\varphi_{n-2}(x). \tag{2.2}$$

В случае, когда функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ постоянны, мы имеем дело с числовой параметрической последовательностью Фибоначчи.

Отметим некоторые частныхе случаи параметрической последовательности Фибоначчи $\{\varphi_n(x)\}$. При $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$ $\quad \varphi_n(x) = \alpha^{n-2}\varphi_2(x)$ $(n > 1)$, т.е. начиная со второго члена $\{\varphi_n(x)\}$ является геометрической прогрессией. Если, кроме того, $\varphi_2(x) = \alpha\varphi_1(x)$, то $\varphi_n(x) = \alpha^{n-1}\varphi_1(x)$ $(n \geq 1)$.

При $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ $\{\varphi_n(x)\}$ имеет вид

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \beta\varphi_1(x), \beta\varphi_2(x), \beta^2\varphi_1(x), \beta^2\varphi_2(x), \dots,$$

т.е. $\varphi_{2n+1}(x) = \beta^n\varphi_1(x)$, $\quad \varphi_{2n} = \beta^{n-1}\varphi_2(x)$ $(n \geq 1)$

Приведем некоторые примеры параметрических последовательностей Фибоначчи.

Пример 2.1. При $\varphi_1(x) = e^{ix}$, $\varphi_2(x) = e^{-ix}$, $\alpha = \beta = 1$ параметрическая последовательность Фибоначчи состоит из функций e^{ix}, e^{-ix}, $e^{ix} + e^{-ix}$, $e^{ix} + 2e^{-ix}$, $2e^{ix} + 3e^{-ix}$, $3e^{ix} + 5e^{-ix}, \dots$.

Пример 2.2. При $\varphi_1(x) = \sin x$, $\varphi_2(x) = \cos x$, $\alpha = \beta = 1$ параметрическая последовательность Фибоначчи состоит из функций $\sin x$, $\cos x$, $\sin x + \cos x$, $\sin x + 2\cos x$, $2\sin x + 3\cos x, \dots$.

Теорема 2.1. Пусть $\{\varphi_n\}$ – параметрическая последовательность Фибоначчи. Тогда имеют место соотношения

$$\begin{aligned} \varphi_{n+2} &= \beta\sum_{k=1}^{n}\alpha^{n-k}\varphi_k + \alpha^n\varphi_2, \\ \varphi_n\varphi_{n+1} &= \alpha\sum_{k=2}^{n}\beta^{n-k}\varphi_k^2 + \beta^{n-1}\varphi_1\varphi_2. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Доказательство. Оба соотношения верны при $n = 1, 2$. Допустим, что они верны и при $n = m$ и покажем их выполнение при $n = m + 1$. Действительно,

$$\begin{aligned} \beta\sum_{k=1}^{m+1}\alpha^{m+1-k}\varphi_k + \alpha^{m+1}\varphi_2 &= \alpha\left[\beta\sum_{k=1}^{m}\alpha^{m-k}\varphi_k + \alpha^m\varphi_2\right] + \beta\varphi_{m+1} = \\ &= \alpha\varphi_{m+2} + \beta\varphi_{m+1} = \varphi_{m+3}, \\ \alpha\sum_{k=2}^{m+1}\beta^{m+1-k}\varphi_k^2 + \beta^{m+1-1}\varphi_1\varphi_2 &= \beta\left[\alpha\sum_{k=2}^{m}\beta^{m-k}\varphi_k^2 + \beta^{m-1}\varphi_1\varphi_2\right] + \alpha\varphi_{m+1}^2 = \\ &= \beta\varphi_m\varphi_{m+1} + \alpha\varphi_{m+1}^2 = \varphi_{m+1}\varphi_{m+2}. \end{aligned}$$

и, применив метод индукции, получаем требуемый результат.

Следствие 2.1. Если первые два члена параметрической последовательности Фибоначчи $\{\varphi_n\}$ с параметрами $\alpha \neq 0, \beta > 0$ удовлетворяют соотношению $\alpha\varphi_1\varphi_2 > 0$, то и для любого $n > 1$ выполняются неравентсва: $\alpha\varphi_n\varphi_{n+1} > 0$ и $\varphi_n\varphi_{n+2} > 0$.

Теорема 2.2. Пусть $\{\varphi_n\}$- параметрическая последовательность Фибоначчи, причем $\alpha \neq 0$ и $\varphi_i \neq 0$, $k \leq i \leq n-1$. Тогда имеет место соотношение

$$\sum_{j=k}^{n-1} \frac{\beta^j}{\varphi_j \varphi_{j+2}} + \frac{\beta^n}{\alpha \varphi_n \varphi_{n+1}} = \frac{\beta^k}{\alpha \varphi_k \varphi_{k+1}}. \tag{2.4}$$

Доказательство. Заметим, что согласно соотношению (2.2) при всяком $n > 2$

$$\frac{\beta^{q-1}}{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}} + \frac{\beta^q}{\alpha \varphi_n \varphi_{n+1}} = \frac{\beta^{q-1}}{\alpha \varphi_{n-1} \varphi_n}. \tag{2.5}$$

Последовательно $n-k-1$ раз выводя из под знака суммы соотношения (2.4) последний ее член и, используя соотношение (2.5), находим, что левая часть в (2.4) равна

$$\frac{\beta^k}{\varphi_k \varphi_{k+2}} + \frac{\beta^{k+1}}{\alpha \varphi_{k+1} \varphi_{k+2}}$$

и еще раз применив равенство (2.5) находим искомый результат.

Рассмотрим теперь множество $\Phi_{\alpha,\beta}$ всех параметрических последовательностей Фибоначчи с фиксированными параметрами α и β.

Имеет место

Лемма 2.1. Множество $\Phi_{\alpha,\beta}$ с покоординатными операциями сложения и умножения на число образует линейное пространство.

Доказательство. Пусть последовательности $\{\varphi'_n\}$ и $\{\varphi''_n\}$ принадлежат $\Phi_{\alpha,\beta}$. Тогда для любых чисел c_1 и c_2 и любого $n > 2$ имеем равенство

$$c_1\varphi'_n + c_2\varphi''_n = \alpha(c_1\varphi'_{n-1} + c_2\varphi''_{n-1}) + \beta(c_1\varphi'_{n-2} + c_2\varphi''_{n-2}),$$

которое означает, что последовательность $c_1\{\varphi'_n\} + c_2\{\varphi''_n\} \in \Phi_{\alpha,\beta}$.

Две последовательности $\{v_n\}$ и $\{w_n\}$ из $\Phi_{\alpha,\beta}$ называются непропорциональными (см. также [6]), если при любом постоянном c найдется такой номер n, для которого $\frac{v_n}{w_n} \neq c$.

Лемма 2.2. Для непропорциональных последовательностей $\{v_n\}$ и $\{w_n\}$ из $\Phi_{\alpha,\beta}$ имеет место неравенство

$$\frac{v_1}{w_1} \neq \frac{v_2}{w_2}.$$

Доказательство. Допустим, что для непропорциональных последовательностей $\{v_n\}$ и $\{w_n\}$ из $\Phi_{\alpha,\beta}$ выполняется равенство $\frac{v_1}{w_1} = \frac{v_2}{w_2}$.

Тогда имеет место соотношение $\frac{\alpha v_2 + \beta v_1}{\alpha w_2 + \beta w_1} = \frac{v_2}{w_2}$, и, принимая во внимание (2.2), получаем равенство $\frac{v_3}{w_3} = \frac{v_2}{w_2}$.

По индукции убеждаемся в том, что при $n \geq 1$ имеет место равенство

$$\frac{v_n}{w_n} = \frac{v_{n+1}}{w_{n+1}}.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Таким образом, непропорциональность двух последовательностей из $\Phi_{\alpha,\beta}$ проявляется уже с первых двух членов этих последовательностей.

Покажем, что произвольная последовательность $\{\varphi_n\}$ из $\Phi_{\alpha,\beta}$ может быть представлена в виде линейной комбинации двух непропорциональных последовательностей $\{v_n\}$ и $\{w_n\}$. Действительно, ввиду того, что $v_1w_2 - v_2w_1 \neq 0$, система уравнений

$$c_1v_1 + c_2w_1 = \varphi_1, \quad c_1v_2 + c_2w_2 = \varphi_2$$

всегда имеет решение относительно неизвестных c_1 и c_2. А это означает, что при всяком $n > 1$ имеем $\varphi_n = c_1v_n + c_2w_n$.

Следовательно, мы можем выделить две непропорциональные последовательности, через которые будут выражаться все остальные. Рассмотрим для этого геометрическую прогрессию $1, q, q^2, \ldots$, являющуюся одновременно и параметрической последовательностью Фибоначчи, т.е. такую, что $q^n = \alpha q^{n-1} + \beta q^{n-2}$.

При условии $\alpha^2 + 4\beta \neq 0$ корни уравнения $q^2 - \alpha q - \beta = 0$

$$\mu = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}, \quad \nu = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 4\beta}}{2}$$

различны и поэтому прогрессии $1, \mu, \mu^2, \ldots,$ и $1, \nu, \nu^2, \ldots$ являются непропорциональными последовательностями в $\Phi_{\alpha,\beta}$, а всякая последовательность $\{\varphi_n\} \in \Phi_{\alpha,\beta}$ может быть представлена в следующем виде

$$c_1 + c_2, c_1\mu + c_2\nu, c_1\mu^2 + c_2\nu^2, \ldots,$$

где $c_1 = \frac{\varphi_2 - \nu\varphi_1}{\mu-\nu}$, $c_2 = -\frac{\varphi_2 - \mu\varphi_1}{\mu-\nu}$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2.3. n-ый член параметрической последовательности Фибоначчи $\{\varphi_n\}$ выражается через первые два ее члена по формуле

$$\varphi_n = \frac{\varphi_2 - \nu\varphi_1}{\mu - \nu}\mu^{n-1} - \frac{\varphi_2 - \mu\varphi_1}{\mu - \nu}\nu^{n-1}.$$

Следствие 2.3. При выполнении условия $\varphi_2 = \alpha\varphi_1$ имеет место формула

$$\varphi_n = \frac{\mu^n - \nu^n}{\mu - \nu}\varphi_1. \tag{2.6}$$

Рассмотрим теперь в качестве частного случая множество $\Phi_{1,1}$ последовательностей Фибоначчи. Базисом в этом пространстве могут служить последовательности $1, \gamma, \gamma^2, \ldots,\quad 1, \delta, \delta^2, \ldots,$ где $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (золотое сечение), $\delta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Из представления (2.6) вытекает, что для n-го члена ряда Фибоначчи $\{u_n\}$ имеет место формула Бине [6]

$$u_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\sqrt{5}}.$$

Следствие 2.4. Пусть последовательность $\{\varphi_n\}$ принадлежит $\Phi_{1,1}$. Тогда

$$\varphi_n = u_{n-2}\varphi_1 + u_{n-1}\varphi_2. \tag{2.7}$$

Следствие 2.5. При $n > 1$ имеют место тождества

$$\gamma^n = u_n\gamma + u_{n-1}, \quad \delta^n = u_n\delta + u_{n-1},$$

$$\gamma^n+\delta^n=u_{n+1}+u_{n-1},\ \gamma^n-\delta^n=\sqrt{5}u_n,$$
$$\gamma^n=\frac{1}{2^n}(a_n+b_n\sqrt{5}),\ \delta^n=\frac{1}{2^n}(a_n-b_n\sqrt{5}),$$

где $a_n=2^nu_{n-1}+2^{n-1}u_n,\ b_n=2^{n-1}u_n$.

Доказательство. Первая пара соотношений получается применением формулы (2.7) к указанным базисным последовательностям в $\Phi_{1,1}$.

Вторая пара соотношений получается из первой пары с использованием свойства $\gamma+\delta=1$.

Третья пара тождеств получается методом индукции с использованием соотношений $a_m+5b_m=a_{m+1}ua_m+b_m=b_{m+1}$.

3 Параметрическая система функций и преобразование Фибоначчи

На основе полных ортогональных и нормированных в пространстве L_2 систем функций Хаара, Уолша, Адамара в теории обработки сигналов (изображений) широкое применение получили одноименные ортогональные преобразования. В настоящей работе мы определим полную ортогональную и нормированную систему функций, называемую параметрической системой Фибоначчи, и рассмотрим параметрическое преобразование Фибоначчи.

Пусть n - натуральное число, $\{\varphi_n\}$ - числовая параметрическая последовательность Фибоначчи, у которой $\alpha\neq 0,\ \beta>0,\ \alpha\varphi_1\varphi_2>0$, а Δ_{ni} - это интервал $[\frac{i-1}{n},\frac{i}{n})$.

Определение 3.1. Параметрической системой Фибоначчи называется система функций, состоящая из серий функций $\{f_{ni}(x)\}_{i=1}^n$ (n-ая серия состоит из n функций), определенных на отрезке [0,1] с помощью следующих формул:

$$f_{n1}(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}\beta^{\frac{j-1}{2}}}{\sqrt{\varphi_j\varphi_{j+2}}}, & x\in\Delta_{nj},\ j=1,2,\ldots,n-1,\\ \dfrac{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}\beta^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}}, & x\in\Delta_{nn},\end{cases}$$

$$f_{ni}(x)=\begin{cases}0, & x\in\Delta_{nj},\ 1\leq j\leq i-2,\\ -\dfrac{\beta^{\frac{1}{2}}\varphi_{i-1}}{\sqrt{\varphi_{i-1}\varphi_{i+1}}}, & x\in\Delta_{ni-1},\\ \dfrac{\alpha\beta^{\frac{j-i}{2}}\varphi_i}{\sqrt{\varphi_j\varphi_{j+2}}}, & x\in\Delta_{nj},\ i\leq j\leq n-1,\\ \dfrac{\alpha\beta^{\frac{n-i}{2}}\varphi_i}{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}}, & x\in\Delta_{nn},\end{cases}$$
$$i=\ 2,3,\ldots,n.$$

Покажем, что определенная таким образом каждая из серий функций $\{f_{ni}(x)\}$ является ортогональной и нормированой.

Рвссмотрим, во-первых, скалярные произведения $L_{1i}=(f_{n1}(x),f_{ni}(x)),\ i=1,2,\ldots,n$ первой функции $f_{n1}(x)$ n-ой серии со всеми функциями этой серии. При $i=1$ имеем

$$L_{11}=\int_0^1 f_{n1}^2(x)dx=\sum_{j=1}^n\int_{\Delta_{nj}}f_{n1}^2(x)dx=$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\alpha\varphi_1\varphi_2\beta^{j-1}}{\varphi_j\varphi_{j+2}} + \frac{\alpha\varphi_1\varphi_2\beta^{n-1}}{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}.$$

Вынося $\alpha\varphi_1\varphi_2\beta^{-1}$ за скобки и воспользовавшись теоремой 2.2 получаем $L_{11} = 1$.
Далее, при $2 \le i \le n$ имеем

$$\begin{aligned} L_{1i} &= \int_0^1 f_{n1}(x) f_{ni}(x)dx = \frac{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}\beta^{\frac{i-2}{2}}}{\sqrt{\varphi_{i-1}\varphi_{i+1}}}\left(-\frac{\beta^{\frac{1}{2}}\varphi_{i-1}}{\sqrt{\varphi_{i-1}\varphi_{i+1}}}\right) + \\ &+\sum_{j=i}^{n-1} \frac{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}\beta^{\frac{j-1}{2}}}{\sqrt{\varphi_j\varphi_{j+2}}}\frac{\alpha\beta^{\frac{j-i}{2}}\varphi_i}{\sqrt{\varphi_j\varphi_{j+2}}} + \frac{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}\beta^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}}\frac{\alpha\beta^{\frac{n-i}{2}}\varphi_i}{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}} = \\ &= -\frac{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}\beta^{\frac{i-1}{2}}}{\varphi_{i+1}} + \sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}\alpha\beta^{\frac{-i-1}{2}}\varphi_i\left[\sum_{j=i}^{n-1}\frac{\beta^j}{\varphi_j\varphi_{j+2}} + \frac{\beta^n}{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}\right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись теоремой 2.2, получаем, что выражение в квадратных скобках вно $\frac{\beta^i}{\alpha\varphi_i\varphi_{i+1}}$ и, следовательно, $L_{1i} = 0$.

Рассмотрим теперь остальные скалярные произведения $L_{ki} = (f_{nk}(x), f_{ni}(x))$, $2 \le i \le n$ остановившись сначала на случае, когда $k \ne i$, и для определенности полагая $< i$. Согласно определению функций $f_n(x)$ имеем

$$\begin{aligned} L_{ki} &= -\frac{\alpha\beta^{\frac{i-k}{2}}\varphi_k\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-1}\varphi_{i+1}} + \sum_{j=i}^{n-1}\frac{\alpha^2\beta^{\frac{j-k}{2}}\beta^{\frac{j-i}{2}}\varphi_k\varphi_i}{\varphi_j\varphi_{j+2}} + \frac{\alpha^2\beta^{\frac{n-k}{2}}\beta^{\frac{n-i}{2}}\varphi_k\varphi_i}{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}} = \\ &= -\frac{\alpha\beta^{\frac{i-k}{2}}\varphi_k}{\varphi_{i+1}} + \alpha^2\beta^{\frac{-k-i}{2}}\varphi_k\varphi_i\left[\sum_{j=i}^{n-1}\frac{\beta^j}{\varphi_j\varphi_{j+2}} + \frac{\beta^n}{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}\right] = \\ &= -\frac{\alpha\beta^{\frac{i-k}{2}}\varphi_k}{\varphi_{i+1}} + \alpha^2\beta^{\frac{-k-i}{2}}\varphi_k\varphi_i\frac{\beta^i}{\alpha\varphi_i\varphi_{i+1}} = 0. \end{aligned}$$

При $k = i$, очевидно, первое слагаемое в представлении для L_{ki} меняется на $\frac{\beta\varphi_{i-1}}{\varphi_{i-1}\varphi_{i+1}}$, в остальных слагаемых k заменяется на i и мы получаем, что

$$L_{ii} = \frac{\beta\varphi_{i-1}}{\varphi_{i+1}} + \frac{\alpha\varphi_i}{\varphi_{i+1}} = 1.$$

Эта система функций полна в L_2. Действительно, рассмотрим множество M_n всех нкций, сохраняющих постоянное значение на каждом из интервалов Δ_{ni}, $i = 1, 2, \ldots, n$. чевидно, M_n есть линейное пространство размерности n и все функции n-ой серии йдут в M_n. Так как эти функции в силу ортогональности системы $\{f_{mk}(x)\}$ линейно зависимы и так как их число равно n, то функции $f_{nk}(x)$ образуют в M_n полную стему независимых векторов. Отсюда, принимая во внимание, что любая непрерывя функция может сколь угодно близко аппроксимироваться функциями из M_n (при статочно большом n), мы убеждаемся в полноте нашей системы.

пределение 3.2. Параметрической матрицей Фибоначчи называется квадратная маица порядка n $\Phi_n(\alpha, \beta) = \{a_{ij}\}$, элементы которой задаются следующими формулами:

$$a_{1j} = \frac{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}\beta^{\frac{j-1}{2}}}{\sqrt{\varphi_j\varphi_{j+2}}},\ \ j = 1, 2, \ldots, n-1,\ \ a_{1n} = \frac{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}\beta^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}},$$

$$
a_{ij} = \begin{cases} 0, & 1 \le j \le i-2, \\ -\dfrac{\beta^{\frac{1}{2}}\varphi_{i-1}}{\sqrt{\varphi_{i-1}\varphi_{i+1}}}, & j = i-1, \\ \dfrac{\alpha\beta^{\frac{j-i}{2}}\varphi_i}{\sqrt{\varphi_j\varphi_{j+2}}}, & i \le j \le n-1, \\ \dfrac{\alpha\beta^{\frac{n-i}{2}}\varphi_i}{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}}, & j = n, \end{cases}
$$
$$
i = \; 2, 3, \ldots, n.
$$

Иначе говоря, параметрическая матрица Фибоначчи порядка n $\Phi_n(\alpha, \beta)$ имеет следующий вид

$$
\Phi_n(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}}{\sqrt{\varphi_1\varphi_3}} & \frac{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}\beta^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\varphi_2\varphi_4}} & \frac{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}\beta^{\frac{2}{2}}}{\sqrt{\varphi_3\varphi_5}} & \cdots & \frac{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}\beta^{\frac{n-2}{2}}}{\sqrt{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}} & \frac{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}\beta^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}} \\ -\frac{\beta^{\frac{1}{2}}\varphi_1}{\sqrt{\varphi_1\varphi_3}} & \frac{\alpha\varphi_2}{\sqrt{\varphi_2\varphi_4}} & \frac{\alpha\beta^{\frac{1}{2}}\varphi_2}{\sqrt{\varphi_3\varphi_5}} & \cdots & \frac{\alpha\beta^{\frac{n-3}{2}}\varphi_2}{\sqrt{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}} & \frac{\alpha\beta^{\frac{n-2}{2}}\varphi_2}{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}} \\ 0 & -\frac{\beta^{\frac{1}{2}}\varphi_2}{\sqrt{\varphi_2\varphi_4}} & \frac{\alpha\varphi_3}{\sqrt{\varphi_3\varphi_5}} & \cdots & \frac{\alpha\beta^{\frac{n-4}{2}}\varphi_3}{\sqrt{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}} & \frac{\alpha\beta^{\frac{n-3}{2}}\varphi_3}{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\alpha\varphi_{n-1}}{\sqrt{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}} & \frac{\alpha\beta^{\frac{1}{2}}\varphi_{n-1}}{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{\beta^{\frac{1}{2}}\varphi_{n-1}}{\sqrt{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}} & \frac{\alpha\varphi_n}{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}} \end{bmatrix}.
$$

Воспользовавшись теоремой 2.2 нетрудно показать, что имеет место

Теорема 3.1. Параметрическая матрица $\Phi_n(\alpha, \beta)$ является ортогональной.

Определение 3.3. Пусть X произвольный n-мерный вектор с действительными компонентами $X^T = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Вектор- строка $Y^T = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется (прямым) параметрическим преобразованием Фибоначчи, если

$$
Y = \Phi_n(\alpha, \beta)X. \tag{3.1}
$$

Определение 3.4. Обратным параметрическим преобразованием Фибоначчи называется преобразование

$$
X = \Phi_n^T(\alpha, \beta)Y. \tag{3.2}
$$

Структура матрицы $\Phi_n(\alpha, \beta)$ подсказывает, что компоненты векторов X и Y связаны рекуррентными соотношениями. Для получения этих соотношений введем следующие обозначения.

Матрицу порядка n, у которой элементы m-той "наддиагонали" (при $0 \le m < n$) или "поддиагонали" (при $-n < m \le 0$) равны $d_1, d_2, \ldots, d_{n-|m|}$, а все остальные элементы равны нулю будем обозначать следующим образлм:

$$
diag_n^m\{d_1, d_2, \ldots, d_{n-|m|}\}.
$$

Пусть

$$
D = diag_n^0\left\{\sqrt{\varphi_1\varphi_3}, \sqrt{\varphi_2\varphi_4}, \ldots, \sqrt{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}, \sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}\right\},
$$

$$
B = diag_n^1\left\{-\sqrt{\beta}, -\sqrt{\beta}, \ldots, -\sqrt{\beta}\right\},
$$

I - единичная матрица порядка n,

$$\Phi = diag_n^0\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\}, \quad A = diag_n^0\left\{\sqrt{\frac{\alpha\varphi_2}{\varphi_1}}, \alpha, \dots, \alpha\right\}.$$

Тогда в этих обозначениях, как не трудно проверить, имеет место тождестово

$$\Phi_n(\alpha, \beta)D(I+B) = A\Phi + B^T\Phi(I+B).$$

Применив операцию транспонирования к обеим частям этого тождества и воспользовавшись соотношением (3.2) получаем соотношение

$$(R+\Phi B)Y = (I+B^T)DX,$$

где $R = \Phi A + B^T\Phi B = diag_n^0\{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}, \varphi_3, \varphi_4, \dots, \varphi_{n+1}\}$.

Ввиду обратимости матрицы R, для прямого параметрического преобразования Фибоначчи имеет место соотношение

$$Y = R^{-1}[-\Phi BY + (I+B^T)DX]. \tag{3.3}$$

Из следствия 2.1 вытекает, что матрица D обратима и, следовательно, для обратного параметрического преобразования Фибоначчи имеем

$$X = D^{-1}[-B^TDX + (R+\Phi B)Y]. \tag{3.4}$$

Матричные коэффициенты в представлениях (3.3) и (3.4) равны

$$\begin{aligned}
R^{-1}(-\Phi B) &= diag_n^1 \left\{\frac{\sqrt{\beta}\varphi_1}{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}}, \frac{\sqrt{\beta}\varphi_2}{\varphi_3}, \frac{\sqrt{\beta}\varphi_3}{\varphi_4}, \dots, \frac{\sqrt{\beta}\varphi_{n-1}}{\varphi_n}\right\},\\
R^{-1}D &= diag_n^0 \left\{\frac{\sqrt{\varphi_1\varphi_3}}{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}}, \frac{\sqrt{\varphi_2\varphi_4}}{\varphi_3}, \frac{\sqrt{\varphi_3\varphi_5}}{\varphi_4}, \dots \frac{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}}{\varphi_{n+1}}\right\},\\
R^{-1}B^TD &= diag_n^{-1} \left\{-\frac{\sqrt{\beta}\sqrt{\varphi_1\varphi_3}}{\varphi_3}, -\frac{\sqrt{\beta}\sqrt{\varphi_2\varphi_4}}{\varphi_4}, \dots -\frac{\sqrt{\beta}\sqrt{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}}{\varphi_{n+1}}\right\},\\
-D^{-1}B^TD &= diag_n^{-1} \left\{\frac{\sqrt{\beta}\sqrt{\varphi_1\varphi_3}}{\sqrt{\varphi_2\varphi_4}}, \frac{\sqrt{\beta}\sqrt{\varphi_2\varphi_4}}{\sqrt{\varphi_3\varphi_5}}, \dots \frac{\sqrt{\beta}\sqrt{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}}{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}}\right\},\\
D^{-1}R &= diag_n^0 \left\{\frac{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_3}}{\sqrt{\varphi_1\varphi_3}}, \frac{\varphi_3}{\sqrt{\varphi_2\varphi_4}}, \dots \frac{\varphi_{n+1}}{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}}\right\},\\
D^{-1}\Phi B &= diag_n^1 \left\{-\frac{\sqrt{\beta}\varphi_1}{\sqrt{\varphi_1\varphi_3}}, -\frac{\sqrt{\beta}\varphi_2}{\sqrt{\varphi_2\varphi_4}}, \dots -\frac{\sqrt{\beta}\varphi_{n-1}}{\sqrt{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}}\right\}.
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что (3.3) можно записать в виде рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned}
y_n &= \frac{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}}{\varphi_{n+1}}x_n & &-\frac{\sqrt{\beta}\sqrt{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}}{\varphi_{n+1}}x_{n-1},\\
y_k &= \frac{\sqrt{\beta}\varphi_k}{\varphi_{k+1}}y_{k+1} & &+\frac{\sqrt{\varphi_k\varphi_{k+2}}}{\varphi_{k+1}}x_k - \frac{\sqrt{\beta}\sqrt{\varphi_{k-1}\varphi_{k+1}}}{\varphi_{k+1}}x_{k-1},\\
y_1 &= \frac{\sqrt{\beta}\varphi_1}{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}}y_2 & &+\frac{\sqrt{\varphi_1\varphi_3}}{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}}x_1, \ k = n-1, n-2, \dots, 2,
\end{aligned}$$

задающих быстрый алгоритм для вычисления прямого параметрического преобразования Фибоначчи. Если коэффициенты в этих соотношениях выразить через элементы параметрической матрицы Фибоначчи, то мы будем иметь следующие соотношения.

$$\begin{aligned}
y_n &= a_{nn}^{-1}\left(1+\frac{\beta\varphi_{n-1}}{\alpha\varphi_n}\right)^{-1} x_n + a_{nn-1}^{-1}\left(1+\frac{\beta\varphi_{n-1}}{\alpha\varphi_n}\right)^{-1}\left(\frac{\beta\varphi_{n-1}}{\alpha\varphi_n}\right) x_{n-1},\\
y_k &= -\frac{a_{k+1k}}{a_{kk}}\left(1+\frac{\beta\varphi_{k-1}}{\alpha\varphi_k}\right)^{-1} y_{k+1} + a_{kk}^{-1}\left(1+\frac{\beta\varphi_{k-1}}{\alpha\varphi_k}\right)^{-1} x_k +\\
&+a_{kk-1}^{-1}\left(1+\frac{\beta\varphi_{k-1}}{\alpha\varphi_k}\right)^{-1}\left(\frac{\beta\varphi_{k-1}}{\alpha\varphi_k}\right) x_{k-1},\\
y_1 &= -\frac{a_{21}}{a_{11}} y_2 + \frac{1}{a_{11}} x_1, \quad k = n-1, n-2, \ldots, 2.
\end{aligned}$$

Аналогичным образом можно раскрыть формулу (3.4). Тогда для обратного параметрического преобразования Фибоначчи будем иметь соотношения.

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\sqrt{\alpha\varphi_1\varphi_2}}{\sqrt{\varphi_1\varphi_3}} y_1 + \frac{-\sqrt{\beta}\varphi_1}{\sqrt{\varphi_1\varphi_3}} y_2,\\
x_k &= \frac{\sqrt{\beta}\sqrt{\varphi_{k-1}\varphi_{k+1}}}{\sqrt{\varphi_k\varphi_{k+2}}} x_{k-1} + \frac{\varphi_{k+1}}{\sqrt{\varphi_k\varphi_{k+2}}} y_k + \frac{-\sqrt{\beta}\varphi_k}{\sqrt{\varphi_k\varphi_{k+2}}} y_{k+1},\\
x_n &= \frac{\sqrt{\beta}\sqrt{\varphi_{n-1}\varphi_{n+1}}}{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}} x_{n-1} + \frac{\varphi_{n+1}}{\sqrt{\alpha\varphi_n\varphi_{n+1}}} y_n, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1
\end{aligned}$$

и после выражения коэффициентов этих соотношений через элементы матрицы $\Phi_n(\alpha,\beta)$ будем иметь

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11} y_1 + a_{22} y_2,\\
x_k &= \frac{a_{kk}}{a_{kk-1}}\left(-\frac{\beta\varphi_{k-1}}{\alpha\varphi_k}\right) x_{k-1} + a_{kk}\left(1+\frac{\beta\varphi_{k-1}}{\alpha\varphi_k}\right) y_k + a_{k+1k} y_{k+1},\\
x_n &= \frac{a_{nn}}{a_{nn-1}}\left(-\frac{\beta\varphi_{n-1}}{\alpha\varphi_n}\right) x_{n-1} + a_{nn}\left(1+\frac{\beta\varphi_{n-1}}{\alpha\varphi_n}\right) y_n, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1.
\end{aligned}$$

Оценим теперь количество операций умножения L^* и сложения L^+, необходимых для выполнения прямого и обратного параметрических преобразований Фибоначчи.

Из приведенных рекуррентных соотношений видно, что, если известны элементы параметрической матрицы Фибоначчи и элементы матриц

$$Q = B^T\Phi B(A\Phi)^{-1} = diag_n^0\left\{0, -\frac{\beta\varphi_1}{\alpha\varphi_2}, -\frac{\beta\varphi_2}{\alpha\varphi_3}, \ldots, -\frac{\beta\varphi_{n-1}}{\alpha\varphi_n}\right\},$$

$I-Q$ и $(I-Q)^{-1}Q$, то для прямого преобразования $L^* = 7(n-1)+4$, $L^+ = 2(n-1)$, а для обратного преобразования $L^* = 6(n-1)+1$, $L^+ = 2(n-1)$.

С другой стороны, если заранее рассчитать ненулевые элементы матриц-коэффициентов из (3.3) и (3.4), то как для прямого, так и для обратного параметрического преобразования Фибоначчи будем иметь: $L^* = 3(n-1)+1$, $L^+ = 2(n-1)$.

Литература

1. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях.- М.:Наука, 1989.

2. Sarukhanyan A.G., Grigoryan A.M. Decomposition of the Hadamard matrices by orthogonal vectors, The paired algorithm for computing of 1-D Hadamard transform. ISCIS 11, November 6-8, 1996, Autalya, Turkey.

3. Agaian S., Astola J., Egiazarian K. Binary Polynomial Transforms and Nonlinear Digital Filters. - Marcel Dekker, Inc., New York- Basel-Hong Kong, 1995.

4. Agaian S.S., Alaverdian S.B. Fast Orthogonal Fibonacci Transform. - Processing of International Colloquium on Coding Theory, June 24-28, 1988, Osaka, Japan, pp.335-352.

5. Рейнгольд Э. Нивергельт Ю. Део Н. Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика. М.:Мир, 1980.

6. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи - М.:Наука, 1992.