Математические вопросы вычислительной техники 17, 1997, 125–129.

Обобщенное наклонное преобразование Адамара

С. Б. Алавердян

Институт проблем информатики и автоматизации
НАН РА и ЕрГУ

1 Введение

На различных этапах обработки и интерпретации изображений используются быстрые ортогональные преобразования. Среди них выделяется наклонное (слэнт) преобразование, содержащее линейную базисную функцию, что хорошо приближает линейное изменение яркости изображения вдоль строки. Наклонное преобразование 4-го и 8-го порядков впервые было предложено Энимото и Шибатой [3]. Прэтт и Чен [5,6] обобщили это преобразование на случай размерности 2^n, $n = 1, 2, ...$, и предложили алгоритм вычисления преобразования сложности $0(N \log N)$. Далее Файно в сообщении [7] описал наклонное преобразование Хаара (НПХ), и для его выполнения предложил быстрый алгоритм сложности $0(N)$. Сведения о наклонных преобразованиях можно также найти в публикациях [1,2,8,10].

В задачах сжатия сигналов существенное место занимает условие секвентности ортогонального преобразования. Для случая размерности 2^n вопрос секвентности наклонных преобразований не решен.

Возникают задачи

a) упорядочения базисных функций наклонного преобразования, в соответствии с хорошо известными системами Уолша, Уолша–Адамара и Уолша–Пэли;

b) построения секвентных наклонных преобразований;

c) построения наклонных преобразований размерости k^n, где k – отличное от 2 целое число.

В работе предложены способ генерации прямых и обратных наклонных преобразований размерности k^n и быстрый алгоритм преобразования, требующий выполнения $O(N \log N)$ арифметических операций. Предложены алгоритмы перестановок, позволяющие получить наклонные преобразования, упорядоченные по Уолшу, Пэли и Адамару. Найдена связь между наклонным преобразованием и преобразованием Уолша – Адамара. Получены хорошие результаты при сжатии данных с использованием предложенного преобразования.

2 Обобщенное наклонное преобразование Адамара

К наклонным преобразованиям предъявляются следующие основные требования:

1. Система базисных векторов ортонормирована.
2. Среди базисных векторов есть постоянный.
3. Имеется базисный вектор, убывающий скачками постоянной величины. (Этот вектор называется наклонным.)
4. Существует быстрый алгоритм вычисления преобразования.

В этом пункте приведена рекуррентная формула синтеза матриц обобщенного наклонного преобразования Адамара размерности $N = k^n$. С этой целью обозначим через

$$A_k = \|a_{ij}\|, \quad i, j = 0, 1, ..., k-1.$$

некоторую ортонормированную матрицу наклонного преобразования k-го порядка, в которой нулевая строка постоянна, а первая является наклонной, т.е.

$$a_{0i} = \sqrt{1/k}, \quad i = 0, 1, ..., k-1,$$

$$a_{1j} - a_{1j+1} = const, \quad j = 0, 1, ..., k-2.$$

Определим матрицу T_N размера $N \times N$, где $N = k^n$, следующим образом:

$$T_N = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_N & -b_N & \\ & & & \ddots & \\ & & b_N & a_N & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -k^{n-2}-\text{я} \quad \textit{строка.} \\ \\ -k^{n-1}-\text{я} \quad \textit{строка.} \\ \\ \\ \end{array}$$

Постоянные α_N и β_N вычислотся из рекуррентных соотношений

$$a_k = I; \quad a_N = kb_N a_{N/k}, \tag{2.1}$$

$$b_N = \sqrt{\frac{1}{1 + k^2_{N/k}}} \tag{2.2}$$

или по формулам

$$a_{kN} = \sqrt{\frac{(k^2-1)N^2}{k^2N^2-1}} \tag{2.3}$$

$$b_{kN} = \sqrt{\frac{N^2-1}{k^2N^2-1}} \tag{2.4}$$

Определение. Матрицей наклонного преобразования Адамара порядка k^n $(n = 1, 2...)$ назовем следующее выражение:

$$SHAD_k = A_k.$$

$$SHAD_{k^n} = T_{k^n}(A_k \otimes SHAD_{k^{n-1}}). \tag{2.5}$$

Для построения матрыы A_k можно применить известный процесс ортогонализации Грамма – Шмидта с некоторыми модификациями.

3 Секвентные наклонные преобразования

Требование секвентности было предъявлено к матрицам наклонных преобразований в работе [2]. Мы считаем, что упорядочение некоторой матрицы наклонного преобразования должно соответствовать упорядочению базовай системы, из которой получена наклонная. Кроме того, формулы, предложенные в [2] не обеспечивают секвентности. Она нарушается для матрицы уже 8-го порядка.

Перестановка, приводящая к секвентной матрице наклонного преобразования найдена здесь для размерностей 2^n $(n_2, 3, ...)$.

Утверждение 3.1. Секвентные числа соотетствуюших по номеу строк матрицы наклонного преобразованя Адамара
$SHAD_{2^n}$ и матрицы преобразования Уолша – Адамара HAD_{2^n} равны.

Известно [9], что композиция перестановки по закону двоичной инверсии и обратной перестановки по коду Грэя позволяет получить из матрицы Уолша – Адамара секвентную матрицу Уолша. Тогда из утверждения 2.1 следует, что применяя эти же перестановки к матрице наклонного преобразования Адамара мы получим секвентную матрицу наклонного преобразования. Назовем это преобразование наклонным преобразованием Уолша (НПУ). Матрица НПУ может быть вычислена по формуле:

$$SWAL_{2^n} = p_{2^n}^{G/b} p_{2^n}^{inv} SHAD_{2^n},$$

где

$p_{2^n}^{inv}$ – матрица перестановки по закону двоичной инверсии.

$p_{2^n}^{G/b}$ – матрица, обратная матрице перестановки по коду Грея.

По аналогии получается матрипа наклонного пеобразования Пэли.

$$SPAL_{2^n} = p_{2^n}^{inv} SHAD_{2^n}.$$

Результаты этого пункта можно распространить и на случай матриц размерности k^n.

4 Связь между наклонным преобразованием Адамара и преобразованием Уолша – Адамара

Формулу (2.1) можно привести к виду:

$$SHAD_{k^n} = \prod_{i=0}^{n-2} (I_{k^i} \otimes T_{k^{n-i}}) A_k^{[n]}. \tag{4.1}$$

Под знаком произведения $\prod$ множители нумеруются слева напрево.

Если обозначить

$$S_{k^n} = \prod_{i=0}^{n-2} (I_{k^i} \otimes T_{k^{n-i}}),$$

то формула (4.1) примет вид:

$$SHAD_{k^n} = S_{k^n} A_k^{[n]}. \tag{4.2}$$

Назовем S_{k^n} – матрицей наклонного преобразования.

При $k = 2$ формула (4.2) может быть представлена в виде:

$$SHAD_{2^n} = S_{2^n} A_2^{[n]} = S_{2^n} HAD_{2^n}.$$

где HAD_{2^n} – матрица преобразования Уолша – Адамара.

Следовательно, наклонное преобразование Адамара при $k = 2$ может быть вычислено последовательным применением преобразования Уолша – Адамара и маклоняющего преобразования.

5 Быстрый алгоритм обобщенного наклонного преобразования Адамара

Утверждение 5.1. Существует быстрый алгоритм вычисления обобщенного наклонного преобразования Адамара (БНПА), имеющий вычислительную сложность $O(N \log N)$.

Доказательство. После факторизации формулы (2.5) получаем

$$SHT_k = A.$$

$$SHAD_N = T_N(A_K \otimes I_{N/k})(I_k \otimes SHAD_{N/k}). \tag{5.1}$$

Формула (5.1) позволяет построить быстрый алгоритм наклонного преобрезования Адамара (БНПА). Для БНПА переход от результатов N/k-мерных преобразований к N-мерному имеет вид:

$$Y_i = \begin{cases} \beta_N S_1 + \alpha_N S_2 & i = k^{n-1} \\ \alpha_N S_1 - \beta_N S_2 & i = k^{n-2} \\ \sum_{i=0}^{k-1} a_{pi} x_{pq}, \ \textit{где} & \begin{array}{l} p \ = [i/k^{n-1}], \\ q \ = i \bmod k^{n-1} \ \textit{в противном случае.} \end{array} \end{cases}$$

здесь $S_1 = \sum_{j=0}^{k-1} x_{j1}$; $S_2 = \sum_{j=0}^{k-1} a_{1j} x_{j0}$.

Можно показать, что сложность алгоритма БНПА в смысле количества операций сложения и умножения равна $O(n \log N)$.

Литература

1. Агаян С.С. Успехи и проблемы быстрых ортогональных преобразований. Распознавание. Классификация. Прогноз., вып. 3, 1990.
2. Агаян С.С. Оптимальные алгоритмы быстрых ортогональных преобразований и их реализация на ЭВМ. Кибернетика и вычислительная техника., вып. 2, 1986.
3. H.Enomoto and K.Shibata. Orthogonal Transform Coding System for Television Signals, IEEE Trans Electromagnetic Compatibility, EMC-13, 3, p. 11-17.
4. K.Shibata. Waveforms Analysis of Image Signals by Orthogonal Transformation. In: Proceeding of the Applications of Walsh Functions Sympozium: Washington, 1973.
5. W.K.Pratt, W.H.Chen, L.R.Welch, Slant Transform Image Coding, IEEE Trans. Comm., COM-22, 8, (August 1974).

6. W.K.Pratt, W.H.Chen. Color Image Coding With the Slant Tramsform, Prac. Symp. Walsh Functions Applications, Washington D.C., 1973.

7. Файно Б., Алгази Р., Косое преобразование Хаара., 17 ТИИЭР N5.

8. Большаков И.А., Ракошиц В.С., Приложение ортогональных систем дискретных функций к микропроцессорной обработке сигналов. Ч.1., Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, N5, 1997.

9. Трахман А.М. Трахман В.А. Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах. М.: Сов. Радио. 1975.

10. Алавердян С.Б. Об одном представлении базисных функций Слэнт–преобразования. Тезисы докладов ММРО – III, с.166-167, 1987.