Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 17, 1997, 105–110.

Комплексные матрицы Адамара

А. Г. Саруханян

Институт проблем информатики и автоматизации
НАН РА и ЕрГУ

Комплексной матрицей Адамара порядка n называется $(\pm 1, \pm i)$–матрица C_n, удовлетворяющая условию

$$C_n C_n^* = C_n^* C_n = nI_n, \tag{1}$$

где C_n^* – комплексно–сопряженная матрица C_n, $i = \sqrt{-1}$.

Очевидно, что комплексную матрицу Адамара можно представить в виде $C_n = X + iY$, где $(0, -1, +1)$–матрицы X, Y порядка n удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{array}{l} X \star Y = 0, \\ X \pm Y \quad - \quad (-1, +1) - \text{матрица}, \\ XY^T = YX^T, \quad X^T Y = Y^T X, \\ XX^T + YY^T = X^T X + Y^T Y = nI_n, \end{array} \tag{2}$$

где $\star$ - адамарово произведение [1], T - знак транспонирования.

Таким образом, можно утверждать, что для существования комплексной матрицы Адамара порядка n необходимо и достаточно существование $(0, -1, +1)$– матриц X, Y, удовлетворяющих условиям (2).

Известно, что если C_n – комплексная матрица Адамара, то $n \equiv 0 (mod 2)$ [1]. Но задача построения или существования комплексных матриц Адамара для любого четного числа до сих пор остается открытой.

Понятие комплексных матриц Адамара впервые было введено Турином в [2]. Им же получены первые результаты о построении комплексных матриц Адамара, которые сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1.[1,2]. *a*) Если существует комплексная матрица Адамара порядка m и матрица Адамара порядка n, то существует матрица Адамара порядка mn;

b) Если существуют комплексные матрицы Адамара порядка m и n, то существует также комплексная матрица Адамара порядка mn;

Отметим, что существование комплексной матрицы Адамара порядка n влечет существование матрицы Адамара порядка $2n$. В самом деле, пусть $C_n = X + iY$ – комплексная матрица Адамара порядка n. Нетрудно показать, что матрица

$$\begin{pmatrix} X+Y & X-Y \\ X-Y & X+Y \end{pmatrix}$$

является матрицей Адамара порядка $2n$.

Здесь возникает естественный вопрос, а именно: можно ли построить комплексную матрицу Адамара порядка $\frac{m}{2}$ исходя из матриц Адамара порядка m.

Указанная задача пока решена только для матриц Адамара типа Вильямсона. Так, пусть H_m – матрица Адамара типа Вильямсона порядка m. Это означает, что существуют матрицы A, B, C, D типа Вильямсона порядка $\frac{m}{4}$. Рассмотрим матрицы

$$P_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} D & C \\ C & -D \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что $(0,-1,+1)-$матрицы $X = \frac{1}{2}(P_1+P_2)$, $Y = \frac{1}{2}(P_1-P_2)$ порядка $\frac{m}{2}$ удовлетворяют условиям (2). А это означает, что $Q = X + iY$ является комплексной матрицей Адамара порядка $\frac{m}{2}$.

Лемма 1. Пусть существуют комплексные матрицы Адамара порядка m и n. Тогда существуют комплексные матрицы X, Y порядка $\frac{mn}{2}$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{array}{l} XY^* = 0, \\ XX^* + YY^* = mnI_{\frac{mn}{2}}. \end{array} \tag{3}$$

Доказательство. Комплексные матрицы Адамара U и V порядка m и n представим в виде

$$U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} V_1 & V_2 \end{pmatrix}$$

Можно показать, что удовлетворяются следующие условия:

$$\begin{array}{l} U_1U_2^* = 0, \\ U_1U_1^* = U_2U_2^* = mI_{\frac{m}{2}}, \\ V_1V_1^* + V_2V_2^* = nI_n. \end{array} \tag{4}$$

Теперь нетрудно показать, что матрицы $X = U_1 \times V_1$, $Y = U_2 \times V_2$ удовлетворяют условиям (3).

Матрицы типа Вильямсона X_i, $i = 1,2,3,4$ называются специальными матрицами типа Вильямсона [3], если выполняются условия:

$$X_1X_2^T + X_3X_4^T = X_1X_3^T + X_2X_4^T = X_1X_4^T + X_2X_3^T = 0,$$

Отметим, что специальные матрицы типа Вильямсона впервые были рассмотрены Турином [3], им были получены симметрические специальные матрицы типа Вильямсона порядка 3^{2r}, $r = 1,2,\ldots$. Далее, в [4] былы построены симметрические специальные матрицы типа Вильямсона порядка $3^{2r}p_1^{4r_1}\cdots p_n^{4r_n}$, где $r, r_i = 1,2,\ldots$, а $p_i \equiv 3(mod4)$ – простые числа, $p_i > 3$.

Теорема 2. Пусть существуют комплексные матрицы Адамара порядка m и n, и специальные симметрические матрицы типа Вильямсона порядка k. Тогда существует также комплексная матрица Адамара порядка mnk.

Доказательство. Согласно лемме 1 существуют комплексные матрицы X, Y порядка $\frac{mn}{2}$, удовлетворяющие условию (3). Пусть A_i, $i = 1,2,3,4$ специальные симметрические матрицы типа Вильямсона порядка k. Рассмотрим $(0,+1,-1)-$матрицы P, Q

$$P = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_1+A_2 & A_3+A_4 \\ A_3+A_4 & A_1+A_2 \end{pmatrix}, \qquad Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} A_1-A_2 & A_3-A_4 \\ A_3-A_4 & A_1-A_2 \end{pmatrix}.$$

Можно показать, что эти матрицы удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{array}{l} P \pm Q \quad - (-1,+1) - \text{матрица}, \\ P \star Q = 0, \quad P^T = P, \quad Q^T = Q, \\ PQ = QP, \quad P^2 = Q^2 = nI_{2n}. \end{array} \tag{5}$$

Теперь нетрудно показать, что матрица $C = X \times P + Y \times Q$ удовлетворяет условию $CC^* = (XX^* + YY^*) \times kI_{2k} = mnkI_{mnk}$. Т.е. C – комплексная матрица Адамара порядка mnk.

Из этой теоремы вытекает

Следствие 1. Существуют комплексные матрицы Адамара порядка $9^r mnp_1^{4r_1} p_2^{4r_2} \cdots p_t^{4r_t}$ где m, n – порядки комплексных матриц Адамара, $p_i \equiv 3(mod4)$ – степень простого числа, $p_i > 3$, $r, r_i = 1, 2, \ldots$.

В частности, существуют комплексные матрицы Адамара порядка $4 \cdot 9^r mnp_1^{4r_1} \cdots p_t^{4r_t}$, где m, n – порядки матриц типа Вильямсона.

Теперь рассмотрим задачу построения комплексных матриц Адамара следующего вида

$$C = \sum_{j=1}^{k} X_j \times A_j. \tag{6}$$

Теорема 3. Для того, чтобы матрица (6) была комплексной матрицей Адамара порядка r, необходимо и достаточно существование $(0, \pm1, \pm i)$–матриц X_j и $(\pm1, \pm i)$–матриц A_j, $j = 1, 2, \ldots, k$ размерностей $m \times n$ и $p \times q$, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{array}{ll} 1. & mp = nq = r \equiv 0(mod2); \\ 2. & X_j \star X_t = 0, \quad j \neq t; \\ 3. & \sum_{j=1}^{t} X_j \quad - \quad (\pm1, \pm i) - \text{матрица}; \\ 4. & \sum_{j=1}^{k} X_j X_j^* \times A_j A_j^* + \sum_{s,t=1}^{k} X_s X_t^* \times A_s A_t^* = rI_r, \quad s \neq t; \\ 5. & \sum_{j=1}^{k} X_j^* X_j \times A_j^* A_j + \sum_{s,t=1}^{k} X_s^* X_t \times A_s^* A_t = rI_r, \quad s \neq t. \end{array} \tag{7}$$

Первые три условия очевидны, а последние два равенства вытекают из (1).

Эта теорема задачу построения комплексных матриц Адамара вида (6) сводит к построению комплексных прямоугольных матриц, удовлетворяющих условиям (7).

Рассмотрим частный случай этой задачи, когда A_j являются $(\pm1, \pm i)$–векторами длины q $(p = 1)$, и, как следует из (7), в этом случае матрицы X_j должны иметь размерности $r \times \frac{r}{q}$.

Лемма 2. Если существует матрица Адамара порядка n, то существует также комплексная матрица Адамара вида $(1, i) \times X + (i, 1) \times Y$.

Доказательство. Пусть H_n – матрица Адамара порядка n. Очевидно, что ее можно представить в виде $H_n = (++) \times X + (+-) \times Y$, где $(0, -1, +1)$–матрицы X, Y имеют размерность $n \times \frac{n}{2}$ и удовлетворяют условиям:

$$\begin{array}{l} X \star Y = 0, \quad X^T Y = 0, \\ X \pm Y - (-1, +1) - \text{матрица}, \\ XX^T + YY^T = \frac{n}{2} I_n, \\ X^T X = Y^T Y = \frac{n}{2} I_{\frac{n}{2}}. \end{array} \tag{8}$$

Теперь нетрудно показать, что

$$C_n = (1, i) \times X + (i, 1) \times Y \tag{9}$$

является комплексной матрицей Адамара порядка n.

Следствие 2. Если существует комплексная матрица Адамара порядка m и матрица Адамара порядка n, то существует также комплексная матрица Адамара порядка $\frac{mn}{2}$.

Доказательство. Согласно лемме 2, существует комплексная матрица Адамара порядка n вида (9). Теперь комплексную матрицу Адамара порядка m представим в виде $|P_1^*, P_2^*|$, где P_j – комплексные матрицы размерности $\frac{m}{2} \times m$ и удовлетворяют условиям: $P_1P_2^* = 0, \quad P_1P_1^* = P_2P_2^* = mI_{\frac{m}{2}}$.

Далее, легко проверить, что матрица $P_1 \times X + P_2 \times Y$ является комплексной матрицей Адамара порядка $\frac{mn}{2}$.

Лемма 3. Пусть существует матрица Адамара порядка n и комплексная матрица Адамара порядка m, $\quad m \equiv 0(mod4)$. Тогда существуют $(\pm1, \pm i)$–матрицы X, Y порядка $\frac{mn}{4}$, удовлетворяющие условиям:

$$XY^* = 0, \quad XX^* + YY^* = \frac{mn}{2} I_{\frac{mn}{4}}. \tag{10}$$

Доказательство. Матрицу Адамара H_n и комплексную матрицу Адамара C_m представим в виде

$$H_n = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{pmatrix}, \qquad C_m = (\, C_1 \quad C_2 \quad C_3 \quad C_4 \,) \tag{11}$$

где H_j и C_j, $\quad j = 1, 2, 3, 4$ соответственно $(-1, +1)-$ и $(\pm1, \pm i)-$ матрицы размерностей $\frac{n}{4} \times n$ и $m \times \frac{m}{4}$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{array}{l} H_k H_j^T = 0, \quad k \neq j, \quad k, j = 1, 2, 3, 4, \\ H_j H_j^T = nI_{\frac{n}{4}}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \\ \sum_{j=1}^{4} C_j C_j^* = mI_m. \end{array} \tag{12}$$

Рассмотрим матрицы

$$P_1 = \frac{H_1 + H_2}{2}, \quad P_2 = \frac{H_1 - H_2}{2}, \quad P_3 = \frac{H_3 + H_4}{2}, \quad P_4 = \frac{H_3 - H_4}{2}. \tag{13}$$

Можно показать, что эти матрицы удовлетворяют условиям:

$$\begin{array}{l} P_1 * P_2 = 0, \quad P_3 * P_4 = 0, \\ P_1 \pm P_2, \quad P_3 \pm P_4 \quad - \quad (-1, +1) - \text{матрицы}, \\ P_k P_j^T = 0, \quad k \neq j, \quad k, j = 1, 2, 3, 4, \\ P_j P_j^T = \frac{n}{2} I_{\frac{n}{4}}, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{array} \tag{14}$$

Теперь уже нетрудно показать, что $(\pm1, \pm i)$–матрицы $X = P_1 \times C_1 + P_2 \times C_2$, $Y = P_3 \times C_3 + P_4 \times C_4$ порядка $\frac{mn}{4}$ удовлетворяют условиям (10).

Следствие 3. Если существуют матрицы Адамара порядка m и n, то существуют $(-1, +1)$–мат- рицы X, Y порядка $\frac{mn}{4}$, удовлетворяющие условиям (10).

Заметим, что если X, Y – $(-1, +1)$–матрицы, удовлетворяющие условиям (10), то $(0, -1, +1)$–мат- рицы $P = \frac{1}{2}(X + Y)$, $\quad Q = \frac{1}{2}(X - Y)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{array}{l} P * Q = 0, \\ P \pm Q \quad - \quad (-1, +1) - \text{матрица}, \\ PQ^T = QP^T, \\ PP^T = QQ^T = \frac{mn}{8} I_{\frac{mn}{4}}. \end{array} \tag{15}$$

Отсюда, в частности, следует

Следствие 4. Если существуют матрицы Адамара порядка m и n, то существует комплексная матрица Адамара порядка $\frac{mn}{4}$.

Следовательно, из леммы 3 вытекает

Лемма 4. Пусть существуют матрицы Адамара порядка n_i, $i = 1, 2, 3$. Тогда существуют $(\pm 1, \pm i)$–матрицы X, Y порядка $\frac{n_1 n_2 n_3}{16}$, удовлетворяющие условиям (10).

Теорема 4. Пусть существуют матрицы Адамара порядка n_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$. Тогда существует комплексная матрица Адамара порядка $\frac{1}{64} n_1 n_2 n_3 n_4 n_5$.

Доказательство. Согласно лемме 4 существуют $(\pm 1, \pm i)$–матрицы X, Y порядка $\frac{1}{16} n_1 n_2 n_3$, удовлетворяющие условиям (10).

Очвидно, что из леммы 3 следует, что существование матриц Адамара порядка n_4 и n_5 влечет существование $(-1, +1)$–матриц X, Y порядка $\frac{1}{4} n_4 n_5$, удовлетворяющих условиям (10). Отсюда, согласно (14), существуют $(0, -1, +1)$– матрицы P, Q порядка $\frac{1}{4} n_4 n_5$, удовлетворяющие условиям (14).

Теперь легко показать, что матрица $P \times X + Q \times Y$ является комплексной матрицей Адамара порядка $\frac{1}{64} n_1 n_2 n_3 n_4 n_5$.

Теорема 5. Пусть существуют матрицы Адамара порядка $4n_j$, $j = 1, 2, \ldots, 8$. Тогда существует комплексная матрица Адамара порядка $64 n_1 n_2 \cdots n_8$.

Доказательство. Согласно следствию 2 существует матрица Адамара порядка $16 n_1 n_2 n_3 n_4$. Из леммы 3 вытекает существование $(-1, +1)$–матриц X, Y порядка $16 n_1 n_2 n_3 n_4 n_5$, удовлетворяющих условиям (10). Как было показано выше, существуют также $(0, -1, +1)$–матрицы P, Q порядка $16 n_1 n_2 n_3 n_4 n_5$, удовлетворяющие условиям (14).

Далее, согласно лемме 4, существуют $(\pm 1, \pm i)$–матрицы X, Y порядка $4 n_6 n_7 n_8$, удовлетворяющие условиям (10). Рассмотрим матрицу $S = X \times P + Y \times Q$.

Вычислим

$$SS^* = XX^* \times PP^T + YY^* \times QQ^T = 64 n_1 n_2 \cdots n_8 I_{64 n_1 n_2 \cdots n_8}.$$

Теорема доказана.

Приведем основные результаты, полученные разными авторами, по построению комплексных матриц Адамара.

Утверждение 1. Пусть существуют матрицы Адамара порядка $4n_i$, $i = 1, 2, \ldots, 6$ и комплексные матрицы Адамара порядка $2m_1$ и $2m_2$. Тогда существуют:

1. Матрица Адамара порядка $8 n_1 m_1$ [2];
2. Комплексная матрица Адамара порядка $4 m_1 m_2$ [1,2];
3. Комплексные матрицы Адамара порядка $4 n_1 n_2$ [5], $8 n_1 n_2 m_1 m_2$, $32 n_1 n_2 \cdots n_6$ [6].

Результаты, полученные выше, сформулируем в виде второго утверждения.

Утверждение 2. Пусть существуют матрицы Адамара порядка $4n_i$, $i = 1, 2, \ldots, 8$, комплексная матрица Адамара порядка s и матрицы типа Вильямсона порядка m, n. Тогда существуют комплексные матрицы Адамара порядка

1. $4 \cdot 9^k p_1^{4k_1} \cdots p_t^{4k_t} mn$, где $p_i \equiv 3 (mod 4)$ – простое число, $p_i > 3$, $k, k_i = 1, 2, \ldots$, (см. Следствие 1);
2. $16 n_1 n_2 \cdots n_5$ (см. Теорема 4);
3. $64 n_1 n_2 \cdots n_8$ (см. Теорема 5);
4. $4 s n_1$ (см. Следствие 2).

Сравнение двух утверждений показывает, что порядки, приведенные во втором утверждении, – новые порядки комплексных матриц Адамара.

Следствие 5. Если существуют матрицы Адамара порядка $4n_i$, $i = 1,2,3,4$ и комплексные матрицы Адамара порядка $2m_1$, $2m_2$, то существует также комплексная матрица Адамара порядка $32n_1n_2n_3n_4m_1m_2$.

В самом деле, из следствия 2 вытекает существование комплексных матриц Адамара порядка $4n_1m_1$ и $4n_2m_2$. Теперь из утверждения 1 (пункт 3) следует искомый результат.

Литература

1. Wallis W.D., Street A.P., Wallis J.S. Combinatorics: Room Squares, Sum–Free Sets, Hadamard Matrices. Lecture Notes in Mathematics. vol. 292, 1972.
2. Turyn R.J. Complex Hadamard matrices. In Combinatorial Structures and Applications. Gordon and Breach, London, 1970, p. 435–437.
3. Turyn R.J. A special class of Williamson matrices and difference sets, J. Comb. Theory, ser. A, vol. 36, 1984, p. 111–115.
4. Ming Yuan Xia. Some infinite classes of special Williamson matrices and difference sets. J. Comb. Theory, ser. A, vol. 61, 1992, p. 230–242.
5. Seberry J., Zhang X.M. Some orthogonal designs and complex Hadamard matrices by using two Hadamard matrices, Austral. J. Combin., No. 4, 1991, p. 93–102.
6. Zhang X.M. Semi–regular sets of matrices and applications. Australasian J. of Combinatorics, No. 7, 1993, p. 65–80.