Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 17, 1997, 86-91

О структуре нечетких рекурсивно - перечислимых множеств

С. Н. Манукян

Институт проблем информатики и автоматизации
НАН РА и ЕрГУ

Строится аппарат для индуктивного представления нечетких рекурсивно - перечислимых множеств, аналогичный разработанному в [1] аппарату для представления обычных рекурсивно - перечислимых множеств. А именно, вводится система операций над нечеткими рекурсивно – перечислимыми множествами, позволяющая построить (в определенном смысле) все множества указанного типа, исходя из конечного числа исходных множеств.

1 Основные определения

Нечетким рекурсивно - перечислимым множеством (НРПМ) размерности n будем называть любое рекурсивно - перечислимое множество систем вида $(x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon)$, где x_i при $1 \le i \le n$ суть натуральные числа, ε есть двоично - рациональное число, $0 \le \varepsilon \le 1$. Это определение аналогично понятиям двоично – рационального многомерного рекурсивно - перечислимого множества из [2] и понятию рекурсивно - перечислимого нечеткого арифметического предиката из [3]. Будем рассматривать НРПМ любых размерностей $n \ge 0$. НРПМ размерности n будем называть *стандартным*, если оно содержит все системы вида $(x_1, x_2, ..., x_n, 0)$. Будем говорить, что НРПМ Q размерности n *поглощает* НРПМ P размерности n, если для любой системы $(x_1, x_2, ..., x_n, \varepsilon) \in P$, где $\varepsilon > 0$, можно построить систему вида $(x_1, x_2, ..., x_n, \delta) \in Q$, такую, что $\delta \ge \varepsilon$. Будем говорить, что НРПМ P и Q *эквивалентны*, если P поглощает Q, и Q поглощает P. Легко видеть, что отношение эквивалентности между НРПМ рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Введем некоторые операции над множествами указанного типа. Через $\vec{x}$ в дальнейших рассмотрениях будем обозначать $x_1, x_2, ..., x_n$, через $\vec{y}$ будем обозначать $y_1, y_2, ..., y_m$; ε и δ суть переменные для двоично - рациональных чисел.

<u>Сумма</u> $A+B$ НРПМ A и B размерностей соответственно n и m определяется следующим порождающим правилом (п.п.):

$$\begin{array}{ll} \text{если} & (\vec{x}, \varepsilon) \in A,\ (\vec{x}, \delta) \in B, \\ \text{то} & (\vec{x}, \min(1, \varepsilon + \delta)) \in A + B. \end{array}$$

В этом определении предполагается, что $n = m$.

<u>Произведение</u> $A \cdot B$ таких же A и B определяется следующим п.п.:

$$\begin{array}{ll} \text{если} & (\vec{x}, \varepsilon) \in A,\ (\vec{x}, \delta) \in B, \\ \text{то} & (\vec{x}, \varepsilon \cdot \delta) \in A \cdot B. \end{array}$$

(здесь также $n = m$).

Декартово произведение $A \times B$ таких же A и B определяется следующим п.п.:

$$\begin{array}{ll} \text{если} & (\vec{x}, \varepsilon) \in A,\ (\vec{y}, \delta) \in B, \\ \text{то} & (\vec{x}, \vec{y}, \varepsilon \cdot \delta) \in A \times B. \end{array}$$

Проекция $\downarrow_i A$ НРПМ A размерности n по i-й координате (где $1 \leq i \leq n$) определяется следующим п.п.:

$$\begin{array}{lll} \text{если} & (x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n, \varepsilon) & \in A, \\ \text{то} & (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n, \varepsilon) & \in \downarrow_i A. \end{array}$$

Транспозиция $T_{ij}A$ i-й и j-й координат в НРПМ A размерности n (где $1 \leq i, j \leq n$) определяется следующим п.п.:

$$\begin{array}{lll} \text{если} & (x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n, \varepsilon) & \in A, \\ \text{то} & (x_1, ..., x_j, ..., x_i, ..., x_n, \varepsilon) & \in T_{i,j}A. \end{array}$$

Аддитивно - транзитивное замыкание $\oplus A$ НРПМ A четной размерности $2n$ определяется следующими двумя п.п.:

$$\begin{array}{lrl} \text{a) если} & (x_1, x_2, ..., x_{2n}, \varepsilon) & \in A, \\ \text{то} & (x_1, x_2, ..., x_{2n}, \varepsilon) & \in \oplus A; \\ \text{b) если} & (x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{2n}, \varepsilon) & \in \oplus A, \\ & (x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{2n}, y_1, y_2, ..., y_n, \delta) & \in \ominus A, \\ \text{то} & (x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n, \min(1, \varepsilon + \delta)) & \in \oplus A. \end{array}$$

Мультипликативно - транзитивное замыкание $\odot A$ НРПМ A четной размерности $2n$ определяется в точности таким же образом, с заменой $\min(1, \varepsilon + \delta)$ на $\varepsilon \cdot \delta$. Легко видеть, что все введенные операции, исходя из стандартных множеств, дают стандартные множества.

Через Z, R, H обозначим НРПМ, задаваемые следующими п.п.:

$$\begin{array}{llll} (0,1) & \in Z; & (x,y,0) & \in R; \\ (x,0) & \in Z; & (x,1/2) & \in H; \\ (x,x+1,1) & \in R; & (x,0) & \in H. \end{array}$$

Легко видеть, что все эти множества стандартны.

2 Основная теорема

Основное утверждение, связанное с введенными операциями и множествами, формулируется следующим образом:

Всякое НРПМ может быть построено с точностью до эквивалентности исходя из Z, R, H при помощи операций $+, \cdot, \times, \downarrow_i, T_{ij}, \oplus, \odot$.

3 Вспомогательные понятия и утверждения

Для доказательства основной теоремы потребуются некоторые дополнительные понятия.

Наряду с нечеткими рекурсивно - перечислимыми множествами введем в рассмотрение обычные рекурсивно - перечислимые множества (любых неотрицательных размерностей); для того, чтобы отличать их от НРПМ, будем иногда называть их "четкими рекурсивно - перечислимыми множествами" (ЧРПМ). Для всякого ЧРПМ A размерности n определим его *нечеткий образ*; в качестве такового будем рассматривать НРПМ размерности n, которому принадлежат все системы вида $(x_1, x_2, ..., x_n, 0)$, а также все системы вида $(x_1, x_2, ..., x_n, 1)$, где $(x_1, x_2, ..., x_n) \in A$. Ясно что нечеткий образ всякого ЧРПМ есть стандартное НРПМ.

Введем в рассмотрение операции над ЧРПМ, определяемые в [1], однако, для того, чтобы отличать их от соответствующих операций над НРПМ, будем вместо обозначений $\times, \downarrow_i, T_{ij}$, применяемых в [1], писать, соответственно, $\tilde{\times}$, $\tilde{\downarrow}_i$, $\tilde{T}_{ij}$. Таким образом, мы имеем операции $\cap$, $\cup$, $\tilde{\times}$, $\tilde{T}_{ij}$, $*$, $\tilde{\downarrow}_i$ над ЧРПМ. Через $\tilde{V}$, $\tilde{Z}$, $\tilde{R}$ обозначим ЧРПМ размерностей, соответственно 1, 1, 2, определяемые следующими п.п.: $x \in \tilde{V}$, $0 \in \tilde{Z}$, $(x, x+1) \in \tilde{R}$; тем самым $\tilde{V}$ есть множество, состоящее из всех натуральных чисел, $\tilde{Z}$ есть одноэлементное множество, состоящее лишь из нуля, $\tilde{R}$ есть график функции $f(x) = x + 1$.

Лемма 1 *Всякое ЧРПМ может быть получено из $\tilde{Z}$ и $\tilde{R}$ при помощи $\cap$, $\cup$, $\tilde{\times}$, $\tilde{T}_{ij}$, $*$, $\tilde{\downarrow}_i$.*

Доказательство. Вначале установим, что график всякой примитивно - рекурсивной функции может быть получен указанным образом. Множество $\tilde{V}$ всех натуральных чисел получается в виде $\tilde{\downarrow}_2\tilde{R}$. Множество $\tilde{E} = \{(x,x)\}_{x\in N}$ получается в виде $\tilde{\downarrow}_2((\tilde{R}\tilde{\times}\tilde{V})\cap(\tilde{V}\tilde{\times}\tilde{T}_{12}R))$. Посредством $\tilde{V}^k$ обозначаем $\underbrace{\tilde{V}\tilde{\times}\tilde{V}\tilde{\times}...\tilde{\times}\tilde{V}}_{\text{k раз}}$.

График тождественной функции $I_n^k(x_1, x_2, ..., x_n) = x_k$ при $n \geq 1$ получается в виде $\tilde{T}_{1k}\tilde{T}_{2,n+1}(\tilde{E}\times\tilde{V}^{n-1})$. График тождественного нуля $\mathcal{I}(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ получается в виде $\tilde{V}^n\tilde{\times}\tilde{Z}$. Если

$$\Psi(x_1, x_2, ..., x_n) = f(g_1(x_1, ..., x_n), ..., g_k(x_1, ..., x_n)),$$

и $F, G_1, ..., G_k$ суть соответственно графики $f, g_1, ..., g_k$, то график функции Ψ получается в виде

$$\underbrace{\tilde{\downarrow}_{n+1}\tilde{\downarrow}_{n+1}\cdots\tilde{\downarrow}_{n+1}}_{\text{k раз}}\left(\bigcap_{i=1}^{k}(\tilde{T}_{n+1,n+i}(G_i\tilde{\times}\tilde{V}^k))\bigcap(\tilde{V}^n\tilde{\times}F)\right).$$

Если

$$\Psi(x_1, x_2, ..., x_n, 0) = \alpha(x_1, ..., x_n);$$

$$\Psi(x_1, x_2, ..., x_n, y+1) = \beta(x_1, ..., x_n, y, \Psi(x_1, ..., x_n, y)),$$

и A, B суть графики соответственно α и β, то график функции Ψ получается в виде

$$(\underbrace{\tilde{\downarrow}_{n+1}\tilde{\downarrow}_{n+1}\cdots\tilde{\downarrow}_{n+1}}_{\text{(n+2) раза}}(*(\tilde{T}_{n+3,2n+4}(B\tilde{\times}\tilde{V}^{n+1})\bigcap\tilde{R}_n\bigcap J_n)\bigcap$$

$$\bigcap\tilde{T}_{n+1,n+2}(A\tilde{\times}\tilde{V}^{n+3})\bigcap\tilde{T}_{1,n+1}(\tilde{Z}\tilde{\times}\tilde{V}^{2n+3})))\bigcup\tilde{T}_{n+1,n+2}(A\tilde{\times}\tilde{Z}),$$

где $\widetilde{R}_n$ есть

$$\widetilde{T}_{1,n+1}\ \widetilde{T}_{2,2n+3}(\widetilde{R}\widetilde{\times}\widetilde{V}^{2n+2}),$$

и J_n есть $\bigcap\limits_{k=1}^{n} J_{n,k}$, где

$$J_{n,k}=\widetilde{T}_{1,k}\ \widetilde{T}_{2,n+2+k}(\widetilde{E}\widetilde{\times}\widetilde{V}^{2n+2}).$$

Таким образом, график всякой примитивно - рекурсивной функции получается указанным образом. Если M – примитивно - рекурсивное множество размерности n, D – график его характеристической функции (принимающей значение 0 на самом множестве и 1 вне его), то $M=\widetilde{\downarrow}_{(n+1)}(D\cap(\widetilde{V}^n\widetilde{\times}\widetilde{\widetilde{Z}}))$. Но любое рекурсивно - перечислимое множество может быть получено как проекция примитивно - рекурсивного. Этим завершается доказательство леммы.

Следствие. Нечеткий образ всякого рекурсивно - перечислимого множества может быть получен из Z и R при помощи $+,\cdot,\times,T_{ij},\odot,\downarrow_i$. В самом деле, легко видеть, что Z и R суть нечеткие образы соответственно $\widetilde{\widetilde{Z}}$ и $\widetilde{R}$, и операциям $\cup,\cap,\widetilde{\times},\widetilde{T}_{ij},*,\widetilde{\downarrow}_i$ над ЧРПМ соответствуют операции $+,\cdot,\times,T_{ij},\odot,\downarrow_i$ над их нечеткими образами.

Для дальнейшего нам потребуется алгоритм ν, перерабатывающий всякое двоично - рациональное число из $[0,\,1]$ в натуральное число и такой, что $\nu(0)=0$, $\nu(1)=1$, $\nu(m/2^n)=2^{n-1}+(m+1)/2$ для всякого нечетного натурального числа m, удовлетворяющего условию $0<m<2^n$. Легко видеть, что алгоритм ν устанавливает взаимно - однозначное соответствие между двоично - рациональными числами из $[0,\,1]$ и натуральными числами (при этом больший номер получает двоично - рациональное число с большим знаменателем, а при одинаковых знаменателях – с большим числителем). Введем также в рассмотрение алгоритм ρ такой, что при любом натуральном n (обозначения такие же, как в [4], §44, §45)

$$\rho(n)=\frac{(2n\dot{-}2^{\beta(n)})\dot{-}1+\overline{\mathrm{sg}}(|n-1|)}{2^{\beta(n)}},$$

где $\beta(n)=\mu k_{k\le n}[2^k\ge n]$. Легко проверить, что $\rho(\nu(\varepsilon))=\varepsilon$, $\nu(\rho(n))=n$ для всякого двоично - рационального числа $\varepsilon\in[0,1]$ и для всякого натурального n.

Лемма 2 *Пусть Γ – одномерное стандартное НРПМ, которому принадлежат все системы вида $(n,\rho(n))$, и любая система $(n,\varepsilon)\in\Gamma$ удовлетворяет условию $\varepsilon\le\rho(n)$. Тогда любое стандартное НРПМ может быть получено с точностью до эквивалентности исходя из Z, R, Γ при помощи операций $+,\cdot,\times,T_{ij},\odot,\downarrow_i$.*

Доказательство. Пусть A – НПРМ размерности n. Рассмотрим ЧРПМ в размерности $(n+1)$, такое, что ему принадлежат те и только те системы $(x_1,x_2,...,x_n,z)$, для которых

$$(x_1,x_2,...,x_n,\rho(z))\in A.$$

Пусть D – нечеткий образ B. Тогда, согласно лемме 1, D может быть получено из Z и R при помощи операций, перечисленных в формулировке леммы. Построим нечеткий образ V множества $\widetilde{V}$; ясно, что $V=\downarrow_2 R$. Через W обозначим множество

$$\underbrace{V\times V\times ...V}_{\text{п раз}}\times\Gamma;$$

ему, очевидно, принадлежат все системы вида $(x_1, x_2, ..., x_n, z, \rho(z))$, и для всякой системы $(x_1, x_2, ..., x_n, z, \varepsilon) \in W$ оказывается: $\varepsilon \leq \rho(z)$.

Но тогда НРПМ $W \cdot D$ будут принадлежать все системы вида $(x_1, x_2, ..., x_n, z, \rho(z))$, такие, что $(x_1, x_2, ..., x_n, \rho(z)) \in A$, и для всякой системы $(x_1, x_2, ..., x_n, z, \varepsilon) \in W \cdot D$, где $\varepsilon \neq 0$, оказывается: $(x_1, x_2, ..., x_n, \rho(z)) \in A$, $\varepsilon \leq \rho(z)$.

Поэтому НРПМ $\downarrow_{n+1} (W \cdot D)$ эквивалентно A. Лемма доказана.

4 Доказательство основной теоремы

Согласно лемме 2, достаточно построить НРПМ Г со свойствами, указанными в формулировке леммы. Рассматривая степени H относительно умножения $\cdot$, получаем НРПМ вида H_m, где каждое H_m есть множество всех пар вида $(x, 1/2^m)$ и $(x, 0)$; применяя декартово умножение на V, получаем НРПМ $H_{m,n}$, где каждое $H_{m,n}$ есть множество всех систем вида $(x_1, x_2, ..., x_n, 1/2^m)$ и $(x_1, x_2, ..., x_n, 0)$.

"Пустое НРПМ" (которому принадлежат лишь системы вида $(x, 0)$) получаем, например, в виде $\downarrow_1 (R \cdot T_{12} R)$. НРПМ F, которому принадлежат все системы вида $(n, 1/2^n)$ и $(n, 0)$ (при всех натуральных n), и только они, получаем в виде

$$\downarrow_1 ((Z \times V) \cdot (\odot(R \cdot (V \times H)))).$$

Строим НРПМ

$$F_1 = Z + \downarrow_2 (T_{12} R \cdot (V \times F));$$

ему принадлежат все системы вида $(n, 0)$ и $(n, \min(1, 1/2^{n-1}))$, и только они.

Строим НРПМ

$$E = \downarrow_2 ((R \times V) \cdot (V \times T_{12} R));$$

ему принадлежат все системы вида $(m, n, 0)$ и $(n, n, 1)$, и только они; таким образом E есть нечеткий образ множества $\tilde{E}$, построенного при доказательстве леммы 1.

Строим НРПМ

$$G = T_{23}(R \times (E \cdot (V \times F_1)));$$

ему будут принадлежать все системы вида $(m, n, p, q, 0)$ и $(m, n, m+1, n, \min(1, 1/2^{n-1}))$ при любых натуральных m, n, p, q, и только такие системы.

Рассмотрим далее НРПМ $\oplus G$.

Ему, как легко видеть, будут принадлежать все системы вида $(m, n, m+p, n, \min(1, q/2^{n-1}))$ при любых натуральных m, n, p, q, таких, что $p \geq 1, q \leq p$, и только такие системы. Отметим, что это – единственное место в доказательстве основной теоремы, где применяется операция $\oplus$.

Построим НРПМ Z_4 размерности 4 в виде $Z \times V \times V \times V$; тогда множеству $\downarrow_1 \downarrow_1 (Z_4 \cdot \oplus G) = G_1$ размерности 2 будут принадлежать все системы вида $(p, n, \min(1, q/2^{n-1}))$ при $q \leq p$, и только они.

Множеству $(V \times F) + G_1 = G_2$ будут тогда принадлежать все системы вида $(p, n, 0)$ и $(p, n, \min(1, (2q+1)/2^n))$ при $q \leq p$, и только они.

Введем в рассмотрение четкое рекурсивно - перечислимое множество, которому принадлежат все системы

$$(\nu(\min(1, (2p+1)/2^n)), p, n),$$

и только они; ясно, что это множество примитивно - рекурсивно. Его нечеткий образ обозначим через Ω; тогда, согласно следствию из леммы 1, Ω получается исходя из Z и R при помощи $\cdot$, $+$, $\times$, T_{ij}, $\odot$, $\downarrow_i$. Но тогда одномерному множеству

$$\downarrow_2\downarrow_2((V \times G_2)\cdot\Omega) = \Omega_1$$

будут принадлежать все системы вида $(k, 0)$ и

$$(\nu(\min(1,(2p+1)/2^n)), \min(1,(2q+1)/2^n))$$

при $q \leq p$, и только они.

Зафиксировав любое натуральное число $k \geq 2$ и обозначив число $\rho(k) < 1$ через $(2p+1)/2^n$, мы видим, что множеству Ω_1 принадлежит система $(k, \rho(k))$, и как легко проверить, для любой системы (k, ε) из Ω_1 оказывается: $\varepsilon \leq \rho(k)$.

Зафиксровав любую пару (p, n) при $2p + 1 > 2^n$, мы видим, что пара (1, 1) принадлежит Ω_1.

Наконец, среди пар вида $(0, \varepsilon)$ множеству Ω_1 принадлежит лишь пара (0, 0). Таким образом, множество Ω_1 обладает всеми свойствами, указанными в отношении множества Γ в формулировке леммы 2.

Этим завершается доказательство основной теоремы.

Формулировка основной теоремы этой статьи опубликована в [5]; вследствие технических причин в формулировке, опубликованной в [5], оказалась досадная погрешность, а именно, из нее выпали слова: "с точностью до эквивалентности".

Литература

1. Цейтин Г.С. Один способ изложения теории алгорифмов и перечислимых множеств. Труды Матем. института им. В.А.Стеклова, т. 72, с. 69-98 (1964).

2. Заславский И.Д. О конструктивной истинности суждений и некоторых нетрадиционных системах конструктивной логики. Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники. Труды ВЦ АН Арм. ССР и ЕрГУ, т.8, с. 99-153 (1975).

3. Манукян С.Н. О перечислимых предикатах и секвенциальных исчислениях нечеткой логики. Девятая Всесоюзная конференция по математической логике. Тезисы докладов, Ленинград, с. 100 (1988).

4. Kleene S.C. Introduction to Metamathematics. D. Van Nostrand Comp., Inc., New York – Toronto, 1952. Русский перевод: Клини С.К. Введение в метаматематику. М., ИИЛ, 1957.

5. Манукян С.Н. О представлении нечетких рекурсивно - перечислимых множеств. Одиннадцатая межреспубликанская конференция по математической логике, Тезисы докладов, Казань, с. 94 (1992).