Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники. 17, 1997, 76-85.

Непараметрическое состоятельное оценивание момента изменения свойств случайной последовательности

Е. А. Арутюнян, И. А. Сафарян

Институт проблем информатики и автоматизации
НАН РА и ЕрГУ

Предлагается метод непараметрического апостериорного обнаружения и оценивания момента изменения статистических свойств случайной последовательности, если таких моментов не больше одного. Доказана состоятельность процедур, полученных с помощью двухвыборочных статистик Чернова-Сэвиджа. Рассмотрены примеры, в которых функции распределения, начальная и после момента изменения, имеют несколько точек пересечения.

1 Введение

Задача обнаружения изменений вероятностных свойств случайного процесса возникла в связи с проблемой разладки производственных процессов. Позднее были найдены приложения в радиолокации, медицине, гидрологии, сейсмологии и других областях. Подробные обзоры по этой теме [1-4] содержат классификацию исследуемых моделей, описание различных применяемых методов и полученных результатов.

В настоящей работе мы ограничимся случаем непараметрического апостериорного обнаружения момента изменения свойств последовательности независимых случайных величин (НСВ).

В предположении, что имеет место не более одного изменения, нужно установить, подчиняется ли вся последовательность $X^{1,N} = (X_1, ..., X_N)$ отсчетов случайного процесса в моменты времени 1, 2,..., N некоторому закону распределения $F_1(x)$, или же существует такой номер наблюдения $\widetilde{n}$ (называемый моментом изменения), что последовательность $X^{\widetilde{n}+1,N}$ имеет функцию распределения $F_2(x) \not\equiv F_1(x)$. Мы рассматриваем случай, когда распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ непрерывны и неизвестны. Рассматриваются также примеры, когда имеется априорная информация о виде отличия распределений $(F_2(x) = F_1(x-\theta), F_2(x) < F_1(x)$, и т.д.).

Непараметрическое обнаружение момента изменения исследовалось в [3-11]. Подход, объединяющий работы [5-10], заключается в проверке гипотезы однородности последовательностей $X^{1,n}$ и $X^{n+1,N}$, $n = \overline{1, N-1}$, с помощью некоторой непараметрической двухвыборочной статистики и в определении оценки $\widehat{n}$ момента $\widetilde{n}$ из условия экстремума этой статистики.

Настоящая работа посвящена изучению асимптотических свойств оценок при $N \to \infty$. В теореме 1 сформулированы условия, обеспечивающие состоятельность оценки, полученной описанным выше способом. В теореме 2 мы приводим условие на функцию меток двухвыборочных статистик Чернова-Сэвиджа [9], достаточное для выполнения теоремы 1. Это условие определяет конкретный вид статистики в зависимости от вида различий $F_1(x)$ и $F_2(x)$.

Следует отметить, что использование статистик Чернова-Сэвиджа позволяет решать и другие задачи. Так, например, сравнение статистик с несколькими различными функциями меток дает возможность непараметрического подхода к проблеме одновременного обнаружения и классификации моментов изменений, которая в параметрической постановке исследована в [14].

2 Оценка момента изменения свойств последовательности НСВ

Пусть $X^{1,N}$ – последовательность НСВ. Нулевая гипотеза H_0 состоит в том, что все члены этой последовательности имеют некоторое непрерывное распределение $F_1(x)$. Альтернативная гипотеза H_1 состоит в том, что существует некоторое $\tilde{t} \in (0,1)$, определяющее такой номер $\tilde{n} = [\tilde{t}N]$, после которого все члены последовательности $X^{\tilde{n}+1,N}$ имеют непрерывное распределение $F_2(x) \not\equiv F_1(x)$.

Для проверки при $N \to \infty$ нулевой гипотезы $\mathrm{H}_0 : \tilde{t} = 1$ против альтернативы $\mathrm{H}_1 : \tilde{t} \in (0,1)$ и оценки неизвестного параметра $\tilde{t}$, введем следующие распределения:

$$F_1(x,t,\tilde{t}) = \begin{cases} F_1(x), & t \le \tilde{t}, \\ \frac{\tilde{t}}{t}F_1(x) + \frac{t-\tilde{t}}{t}F_2(x), & t > \tilde{t}, \end{cases} \tag{1}$$

$$F_2(x,t,\tilde{t}) = \begin{cases} \frac{\tilde{t}-t}{1-t}F_1(x) + \frac{1-\tilde{t}}{1-t}F_2(x), & t \le \tilde{t}, \\ F_2(x), & t > \tilde{t}, \end{cases} \tag{2}$$

$t \in (0,1)$, $\tilde{t} \in [0,1]$.

Если обозначить

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_0^t &: \ F_1(x,t,\tilde{t}) = F_2(x,t,\tilde{t}), \\ \mathrm{H}_1^t &: \ F_1(x,t,\tilde{t}) \not\equiv F_2(x,t,\tilde{t}), \end{aligned} \tag{3}$$

то справедливость H_0 означает, что $\tilde{t} = 1$, и что H_0^t имеет место при любом t, а справедливость H_1 означает, что $\tilde{t} < 1$, и что H_1^t верна при любом t. Таким образом, гипотезы H_0 и H_0^t и альтернативы H_1 и H_1^t эквивалентны при любом t.

Обозначим $W_N(t)$ статистику, предназначенную для проверки H_0^t против H_1^t, и $\mathrm{P}_i(A)$ вероятность события A в случае справедливости $\mathrm{H}_i, i = 0,1$.

Предположим, что существуют неслучайные функции $w_0(t,\tilde{t}\ )$ и $w_1(t,\tilde{t}\ )$ такие, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_i\{\max_{0<t<1} \mid W_N(t) - w_i(t,\tilde{t}\ ) \mid > \varepsilon\} = 0\ ,\ i = 0,1. \tag{4}$$

Это означает, что последовательность статистик $W_N(t)$, в интервале равномерно сходится по вероятности P_i к функции $w_i(t,\tilde{t}\ )$.

Ограничим наше рассмотрение статистиками, асимптотическое распределение которых при гипотезе H_0

$$Q_0(u;t) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_0\{W_N(t) \le u\}$$

при любом $t \in (0,1)$ невырождено и непрерывно. Для заданного $\alpha \in (0,1)$ определим критическое значение $C_\alpha(t)$ из условия

$$Q_0(C_\alpha(t), t) = \alpha, \tag{5}$$

а область отклонения гипотезы H_0^t из условия

$$W_N(t) \le C_\alpha(t). \tag{6}$$

Тогда асимтотический уровень значимости критерия (6) для H_0 против H_1 будет равен α, а асимтотическая мощность β будет равна

$$\beta = \lim_{N\to\infty} P_1\{W_N(t) \le C_\alpha(t)\}.$$

Теорема 1 *Если последовательность статистик $\{W_N(t)\}$ равномерно сходится по вероятности при H_0 к функции $w_0(t,\tilde{t}\,)$, а при H_1 к функции $w_1(t,\tilde{t}\,)$, причем*

$$w_1(t,\tilde{t}\,) < w_0(t,\tilde{t}\,), \quad t \in (0,1), \tag{7}$$

и $w_1(t,\tilde{t}\,)$ строго убывает при $t \in (0,\tilde{t})$ и строго возрастает при $t \in (\tilde{t},1)$, то

(a) для любого фиксированного $t \in (0,1)$ критерий с критической областью (6) состоятелен для H_0 против H_1;

(b) в случае справедливости гипотезы H_1

$$\hat{t} = \arg\min_{0<t<1} W_N(t) \tag{8}$$

есть состоятельная оценка для $\tilde{t}$.

Доказательство теоремы приведено в приложении. Состоятельность оценки (8) доказывается аналогично тому, как она доказана Дарховским в [5] для частного случая, когда $F_1(x) < F_2(x)$ и $W_N(t)$ – статистика Манна-Уитни.

3 Применение статистик Чернова-Сэвиджа для обнаружения и оценивания момента изменения

Пусть функция $J(u)$, $u \in (0,1)$, обладает производными первого и второго порядка и удовлетворяет при некотором $K \in (0,\infty)$ условию:

$$| J(u)^{(l)} | \le K(u(1-u))^{-l-1/2+\delta}, \quad 0 < \delta < 1/2, \; l = 0,1,2. \tag{9}$$

Двухвыборочная статистика Чернова-Сэвиджа [12], предназначенная для проверки однородности выборок $X^{1,n}$ и $X^{n+1,N}$ имеет вид

$$T_N(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} J\left(\frac{R_i}{N+1}\right), \quad n = [tN], \tag{10}$$

где R_i - ранг i-го наблюдения в последовательности $X^{1,N}$. При этом $J(u)$ называется функцией меток.

Обозначим

$$G(x,t,\tilde{t}\,) = tF_1(x,t,\tilde{t}) + (1-t)F_2(x,t,\tilde{t}), \tag{11}$$

$$A(t,\tilde{t}\,) = \int_{-\infty}^{\infty} J(G(x,t,\tilde{t}))dF_1(x,t,\tilde{t}), \tag{12}$$

и положим

$$W_N(t) = \frac{1}{1-t}(T_N(t) - A(t,1)), \quad t \in (0,1), \tag{13}$$

$$w_1(t,\tilde{t}\,) = \frac{1}{1-t}(A(t,\tilde{t}) - A(t,1)), \quad 0 \le \tilde{t} \le 1, \tag{14}$$

$$w_0(t,\tilde{t}\,) \equiv 0. \tag{15}$$

Теорема 2 *Если, в случае справедливости H_1, $\bar{t} \in [\Delta, 1-\Delta]$ и $\hat{t} \in [\Delta, 1-\Delta]$ для некоторого $\Delta \in (0, 1/2)$, то выполнение условия*

$$A(\bar{t},\bar{t}) < A(t,1) \tag{16}$$

достаточно для того, чтобы последовательность статистик (13) с функциями (14) и (15) удовлетворяла при любом $t \in [\Delta, 1-\Delta]$ условиям теоремы 1.

Заметим, что $G(x,t,1) = F_1(x)$ и $G(x,\bar{t},\bar{t}) = \bar{t}F_1(x) + (1-\bar{t})F_2(x)$.
Поэтому

$$A(t,1) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)dF_1(x) = \int_0^1 J(u)du$$

не зависит от t, и можно обозначить

$$A(t,1) = A. \tag{17}$$

Подставляя (1), (2), и (17) в (12), получим

$$w_1(t,\bar{t}\,) = \begin{cases} \frac{1}{1-t}(A(\bar{t},\bar{t}) - A), & t \le \bar{t} \\ \frac{\bar{t}}{t(1-\bar{t})}(A(\bar{t},\bar{t}) - A) & t > \bar{t}. \end{cases} \tag{18}$$

Таким образом, если справедливо (16), то $w_1(t,\bar{t}\,)$ монотонно убывает при $t \le \bar{t}$. монотонно возрастает при $t > \bar{t}$, и при любом $t \in (\Delta, 1-\Delta)$ справедливо $w_1(t,\bar{t}\,) < w_0(t,\bar{t}\,)$.

Доказательство того, что для $W_N(t)$, $w_1(t,\bar{t}\,)$ и $w_0(t,\bar{t}\,)$, определенных в (13-15), выполняется (4), отнесено в Приложение.

Смысл теоремы 2 в том, что при наличии априорной информации о виде различия распределений $F_1(x)$ и $F_2(x)$, путем выбора функции $J(u)$ можно находить подходящие статистики для оценивания момента изменения.

Замечание. Известно [12], что асимптотические свойства статистик Чернова-Сэвиджа могут нарушаться при $\bar{n}/N \to 0$ или $\bar{n}/N \to 1$. Поэтому в формулировке теорему 2 было введено ограничение $\Delta < \bar{t} < 1-\Delta$. Величина параметра $\Delta \in (0, 1/2)$ в конкретных приложениях может быть оценена экспериментально.

Пример 1. Пусть

$$F_1(x) - F_2(x) > 0.$$

Тогда (16) выполняется при любой монотонно возрастающей $J(u)$. В частности, при $J(u) = u$ получается статистика Вилкоксона:

$$T_N(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} R_i/(N+1).$$

Пример 2. Пусть

$$x(F_1(x) - F_2(x)) > 0.$$

Если кроме того распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$, симметричны, т.е. $F_i(x) = 1 - F_i(-x)$. $i = 1, 2$, то при $J(u) = u$ неравенство (16) нарушается и статистику Вилкоксона использовать в этом случае нельзя. Неравенство (16) выполняется, если $J(u)$ монотонно убывает при $u \in (0, 1/2)$ и монотонно возрастает при $u \in (1/2, 1)$. В частности, при

$$J(u) = \left(u - \frac{1}{2}\right)^2,$$

На плоскости (t,u) обозначим $\mathcal{M}$ область, ограниченную прямой $u_1(t) = w_1(\,\tilde{t},\tilde{t}\,)$ + $\delta_\varepsilon/2$ и кривой $u_2(t) = w_1(\,t,\tilde{t}\,) - \delta_\varepsilon/2$. Пусть $\hat{u} = W_N(\,\hat{t}\,)$. Обозначим E_1, E_2, E_3, E_4 следующие события:

$$
\begin{aligned}
E_1 &: \ \{|\,\hat{t}-\tilde{t}\,| \le \varepsilon\},\\
E_2 &: \ \{t_1 < \hat{t} < t_2\},\\
E_3 &: \ \{(\hat{t},\hat{u}) \in \mathcal{M}\},\\
E_4 &: \ \{\max_{0<t<1} |\,W_N(t) - w_1(t,\tilde{t}\,)\,| < \ \delta_\varepsilon/2\}.
\end{aligned}
$$

С помощью рис.1 можно проверить справедливость следующих включений:

$$E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset E_4.$$

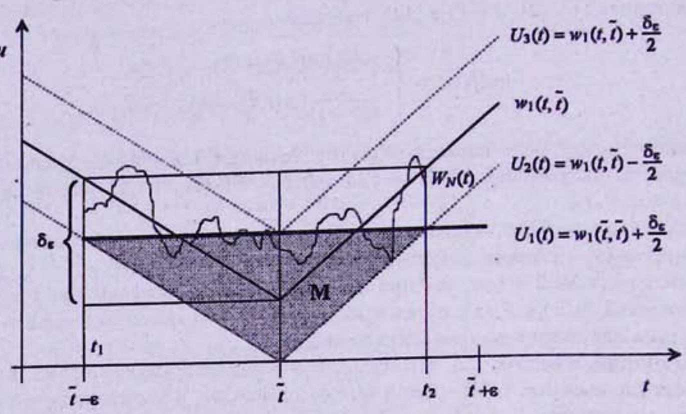

Рис. 1. Статистика $W_N(t)$ и функция $w_1(t,\tilde{t}\,)$ в окрестности точки $\tilde{t}$.

Поэтому $\mathrm{P}_1(E_1) \ge \mathrm{P}_1(E_4)$, а $\mathrm{P}_1(\overline{E_1}) \le \mathrm{P}_1(\overline{E_4})$.
Таким образом,

$$\mathrm{P}_1\{|\,\hat{t}-\tilde{t}\,| > \varepsilon\} \le \mathrm{P}_1\{\max_{0<t<1} |\,W_N(t) - w_1(t,\tilde{t}\,)\,| > \delta_\varepsilon/2\}$$

и, так как выполняется (4), то

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_1\{|\,\hat{t}-\tilde{t}\,| > \varepsilon\} = 0.$$

Доказательство теоремы 2.

Вначале мы покажем, что для $W_N(t), w_1(t,\tilde{t}\,)$ и $w_0(t,\tilde{t}\,)$, определенных в (13)–(15), при каждом $t \in (\Delta, 1-\Delta)$ справедливо утверждение:

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_i\{|\,W_N(t) - w_i(t,\tilde{t}\,)\,| > \varepsilon\} = 0, \quad i = 0,1. \qquad (1$$

чаем статистику Муда

$$T_N(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{R_i}{N+1} - \frac{1}{2}\right)^2.$$

Пример 3. Пусть

$$\prod_{j=1}^{m}(x - b_j)(F_1(x) - F_2(x)) > 0.$$

силу непрерывности $F_1(x)$ и $F_2(x)$ это означает, что они имеют m точек пере-
ния b_j. Обозначим значение функций распределения в точках пересечения через
$F_1(b_j) = F_2(b_j), j = \overline{1,m}$. Тогда, если a_j известны, то, как показано в [10] неравен-
(16) выполняется при функции меток

$$J(u) = (m+1)\int_0^u \prod_{j=1}^{m}(v - a_j)dv,$$

приводит к статистике, представляющей собой полином от рангов с коэффициен-
β_j, зависящими только от $a_j, j = \overline{1,m}$,

$$T_N(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{R_i}{N+1}\right)^{m+1} + \sum_{j=1}^{m}\beta_j\left(\frac{R_i}{N+1}\right)^j\right).$$

Приложение

зательство теоремы 1.

доказательства утверждения (a) нужно показать, что при любом $t \in (0,1)$ выпол-
ся

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{P}_1\{W_N(t) \le C_\alpha(t)\} = 1.$$

оскольку $C_\alpha(t)$ определяется из условия (5), а $\{W_N(t)\}$ при H_0 равномерно сходится
$t,\tilde{t}$), то $C_\alpha(t) > w_0(t,\tilde{t}) - \varepsilon$ для любого $\varepsilon > 0$ и любого $t \in (0,1)$. С другой
ны, так как выполняется (7), то всегда можно взять $\varepsilon < w_0(t,\tilde{t}) - w_1(t,\tilde{t})$. Пусть
$w_0(t,\tilde{t}) - w_1(t,\tilde{t}))/\varepsilon$, тогда $\lambda > 1$ и $C_\alpha(t) > w_1(t,\tilde{t}) + (\lambda - 1)\varepsilon$. Таким образом,

$$\mathrm{P}_1\{W_N(t) \le C_\alpha(t)\} \ge \mathrm{P}_1\{W_N(t) \le w_1(t,\tilde{t}) + (\lambda-1)\varepsilon\} \ge$$

$$\ge \mathrm{P}_1\{|\, W_N(t) - w_1(t,\tilde{t})\,| \le (\lambda-1)\varepsilon\}.$$

равая часть этого неравенства стремится к 1 при $N \to \infty$ в силу того, что выпол-
я (4), следовательно, и левая часть стремится к 1.
ля доказательства утверждения (b) обозначим для любого $\varepsilon > 0$

$$\delta_\varepsilon = \min\{|\, w_1(\tilde{t} - \varepsilon,\tilde{t}) - w_1(\tilde{t},\tilde{t})\,|, |\, w_1(\tilde{t} + \varepsilon,\tilde{t}) - w_1(\tilde{t},\tilde{t})\,|\}.$$

го, что $w_1(t,\tilde{t})$ монотонно убывает при $t \in (0,\tilde{t})$ и монотонно возрастает при
$\tilde{t},1)$ следует, что уравнение $w_1(t,\tilde{t}) = w_1(\tilde{t},\tilde{t}) + \delta_\varepsilon$ имеет только два решения t_1
для которых справедливо утверждение

$$\tilde{t} \in [t_1, t_2] \subset [\tilde{t} - \varepsilon, t + \varepsilon].$$

Лемма 1 *Если функция меток $J(u)$ при некоторых $K \in (0,\infty)$ и $\delta \in (0,1/2)$ удовлетворяет (9), то при любом $t \in (\Delta, 1-\Delta)$ для статистики (10) справедливо представление:*

$$T_N(t) = A(t,\bar{t}) + B_N(t,\bar{t}) + C_N(t,\bar{t}), \tag{20}$$

где $A(t,\bar{t})$ – неслучайная величина, определенная в (12), а $B_N(t,\bar{t})$ и $C_N(t,\bar{t})$ – случайные величины, которые, как при H_0 так и при H_1 при некоторых $K_1, K_2 \in (0,\infty)$ удовлетворяют условиям:

$$EB_N(t,\bar{t}) = 0, \tag{21}$$

$$DB_N(t,\bar{t}) < K_1/N, \tag{22}$$

$$E \mid C_N(t,\bar{t}) \mid < K_2/N^{0.5+\delta}, \tag{23}$$

Доказательство леммы совпадает с доказательством теоремы Чернова – Сэвиджа [12], поскольку в нем требуется только выполнение условия (9) для функции меток и непрерывность распределений, совпадение которых проверяется с помощью статистики $T_N(t)$. Распрeделения $F_1(x,t,\bar{t})$ и $F_2(x,t,\bar{t})$, определенные в (1) и (2) непрерывны по x при любых $t \in (0,1)$ и $\bar{t} \in (0,1]$.

Из (13) и (14) имеем

$$W_N(t) - w_1(t,\tilde{t}\,) = \frac{1}{1-t}(T_N(t) - A(t,\bar{t})) = \frac{1}{1-t}(B_N(t,\bar{t}) + C_N(t,\bar{t})).$$

Следовательно,

$$\mathrm{P}_1\{\mid W_N(t) - w_1(t,\tilde{t}\,) \mid > \varepsilon\} \leq$$

$$\leq \mathrm{P}_1\left\{\frac{1}{1-t} \mid B_N(t,\bar{t}) \mid > \ \varepsilon/2\right\} + \mathrm{P}_1\left\{\frac{1}{1-t} \mid C_N(t,\bar{t}) \mid > \ \varepsilon/2\right\}.$$

Используя (21)–(23) и, применяя к первому слагаемому неравенство Чебышева, а ко второму неравенство Маркова, получим

$$\mathrm{P}_1\{\mid W_N(t) - w_1(t,\tilde{t}\,) \mid > \varepsilon\} \leq \frac{4K_1}{N\varepsilon^2(1-t)^2} + \frac{2K_2}{\varepsilon N^{1+\delta}(1-t)},$$

откуда следует (19) для $i = 1$.

Аналогично проверяется (19) при $i = 0$.

Теперь мы докажем, что при любых $\Delta < t_1 < t_2 < (1-\Delta)$ существуют такие $K_3, K_4 \in (0,\infty)$, такие, что

$$|w_1(t_1,\tilde{t}\,) - w_1(t_2,\tilde{t}\,)| \leq K_3(t_2 - t_1), \tag{24}$$

$$|W_N(t_1) - W_N(t_2)| \leq K_4(t_2 - t_1). \tag{25}$$

Из (18) получим:

$$|w_1(t_1,\tilde{t}\,) - w_1(t_2,\tilde{t}\,)| \leq \frac{(t_2 - t_1)}{\Delta^2}|A(\bar{t},\bar{t}) - A|,\ t_1, t_2 \in (\Delta, \tilde{t}),$$

$$|w_1(t_1,\tilde{t}\,) - w_1(t_2,\tilde{t}\,)| \leq \frac{(t_2 - t_1)(1-\Delta)}{\Delta^3}|A(\bar{t},\bar{t}) - A|,\ \ t_1, t_2 \in (\,\tilde{t}, 1-\Delta),$$

$$|w_1(t_1,\tilde{t}) - w_1(t_2,\tilde{t})| \leq$$

$$\leq \frac{(t_2-t_1)(2-\Delta)}{\Delta^3}|A(\tilde{t},\tilde{t}) - A|,\ t_1 \in (\Delta,\tilde{t})\ t_2 \in (\tilde{t},1-\Delta).$$

Объединяя эти неравенства и учитывая, что

$$|A(\tilde{t},\tilde{t})| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |J(G(x,\tilde{t},\tilde{t}))|\,dF_1(x) + \frac{(1-\tilde{t})}{\tilde{t}}\int_{-\infty}^{\infty} |J(G(x,\tilde{t},\tilde{t}))|\,dF_2(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\Delta}\int_{-\infty}^{\infty} |J(G(x,\tilde{t},\tilde{t}))|\,dG(x,\tilde{t},\tilde{t}) = \frac{1}{\Delta}\int_0^1 |J(u)|\,du$$

и

$$|A| \leq \int_0^1 |J(u)|\,du$$

а функция меток удовлетворяет (9), получим (24).

Докажем теперь справедливость (25)

$$|W_N(t_2) - W_N(t_1)| = \left|\frac{1}{1-t_2}(T_N(t_2) - A) - \frac{1}{1-t_1}(T_N(t_1) - A)\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{1-t_2}T_N(t_1) - \frac{1}{1-t_1}T_N(t_2)\right| + \left|\frac{1}{1-t_2} - \frac{1}{1-t_1}\right| |A|$$

используя (9) и (10), получим

$$|W_N(t_2) - W_N(t_1)| \leq$$

$$\leq \frac{(t_2-t_1)}{\Delta}K' + \frac{2(t_2-t_1)}{\Delta^2}\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left|J\left(\frac{R_i}{N+1}\right)\right| +$$

$$+\frac{(t_2-t_1)}{\Delta}\frac{1}{n_2-n_1}\sum_{i=n+1}^{n_2}\left|J\left(\frac{R_i}{N+1}\right)\right| \qquad (26)$$

Ограниченность второго слагаемого следует из того, что

$$\frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left|J\left(\frac{R_i}{N+1}\right)\right| \leq \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1}\left(\frac{R_i}{N+1}\left(1-\frac{R_i}{N+1}\right)\right)^{-1/2+\delta} \leq$$

$$\leq \frac{1}{(1-\Delta)N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{i}{N+1}\left(1-\frac{i}{N+1}\right)\right)^{-1/2+\delta}$$

и правая часть этого неравенства представляет собой интегральную сумму интеграла

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x(1-x))^{1/2-\delta}} = \frac{\Gamma^2(1/2+\delta)}{\Gamma(1+2\delta)}.$$

Третье слагаемое в (26) в случае, когда $n_2 - n_1 \to \infty$ при $N \to \infty$ также удовлетворяет неравенству:

$$\frac{1}{n_2-n_1}\sum_{i=n_1+1}^{n_2}\left|J\left(\frac{R_1}{N+1}\right)\right| \leq (t_2-t_1)K'''.$$

Таким образом,

$$| W_N(t_2) - W_N(t_1) | \le \frac{(t_2 - t_1)}{\Delta^2} K' + \frac{2(t_2 - t_1)}{\Delta^2} K'' + \frac{(t_2 - t_1)}{\Delta^2} K'''.$$

Окончательно, обозначая

$$K_4 = \max\left(\frac{K'}{\Delta^2}, \frac{2K''}{\Delta^2}, \frac{K'''}{\Delta^2}\right),$$

получим (25).

Для того, чтобы показать выполнение (4), обозначим

$$t^* = \arg \max_{\Delta < t < 1-\Delta} | W_N(t) - w_1(t, \tilde{t}\,) | .$$

Если $t \in [t_1, t_2]$, то из (24) и (25) следует, что существует некоторое $K_5 \in (0, \infty)$, при котором

$$| W_N(t^*) - w_1(t^*, \tilde{t}\,) | \le | W_N(t_1) - w_1(t_1, \tilde{t}\,) | + (t_2 - t_1) K_5. \tag{27}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ определим целое число r следующим образом:

$$r = [\varepsilon / 2K_5(1 - 2\Delta)].$$

Разобъем отрезок $[\Delta, 1 - \Delta]$ на r интервалов одинаковой длины

$$t_{j+1} - t_j = \varepsilon / 2K_5,$$

тогда, учитывая (27), получим

$$\mathrm{P}\left\{ \max_{\Delta < t < 1-\Delta} | W_N(t) - w_1(t, \tilde{t}\,) | > \varepsilon \right\} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{r} \mathrm{P}\left\{ | W_N(t^*) - w_1(t^*, \tilde{t}\,) > \varepsilon \mid / \ t^* \in [t_{j+1}, t_j] \right\} \le$$

$$\le \sum_{j=1}^{r} \mathrm{P}\left\{ | W_N(t_j) - w_1(t_j, \tilde{t}\,) | + (t_{j+1} - t_j) K_5 > \varepsilon \right\} =$$

$$= \sum_{j=1}^{r} \mathrm{P}\left\{ | W_N(t_j) - w_1(t_j, \tilde{t}\,) | > \varepsilon / 2 \right\}$$

отсюда в силу справедливости (17) следует (4).

Литература

1. Бассвиль М., Банвениста А. Обнаружение свойств сигналов и динамических систем. М. Мир, 1989.

2. Basseville M., Nikiforov I. Detection of abrupt changes: Theory and applications. (Information and System Sciences Series) Englewood Cliffs, NJ. Prentice – Hall. 1993.

3. Changepoint Analysis – Empirical Reliability Theme Term (Edited by Miklos Csörgő). Technical Report Series of the Laboratory for Research in Statistics and Probability. Carleton University, 1993, June, N224.

4. Csörgő M., Horvath L. Nonparametric Methods of changepoint Problems. 1988, Handbook of Statistics, V.7, p. 403-425.

5. Дарховский Б.С. Непараметрический метод для апостериорного обнаружения момента "разладки" последовательности независимых случайных величин. Теория вероятностей и ее применения. 1976, Т.XX, N1, с. 180-184.

6. Лейпус Р. Асимптотические свойства критериев типа Колмогорова– Смирнова в задаче о "разладке". В сб.: Статистические проблемы управления. Вильнюс. Вып. 83, 1988, с. 99-103.

7. Pettitt A.N. A non-parametric approach to the change-point problem. Appl. Statist.. 1979, V. 28, N2, p. 126-135.

8. Csörgő M. Nonparametric tests for the change point problem. Journal of Statistical Planning and Inference. N17, 1987, p.1-9.

9. Асатрян Д.Г., Сафарян И.А. Состоятельный критерий для оценивания момента "разладки" случайной последовательности. Межвуз. сборник научных трудов. Ереван, 1982, вып. I, с. 35-43.

10. Асатрян Д.Г., Сафарян И.А. Непараметрические методы обнаружения изменений свойств случайных последовательностей. В сб.: Статистические проблемы управления. Вильнюс, 1984, вып.65, с. 9-20.

11. Арутюнян Е.А., Сафарян И.А., Петросян П.А., Нерсесян А.В. Статистический анализ гидрогеохимических данных для обнаружения надежных предвестников землетрясений. Тезисы доклада. V-я Школа-семинар стран СНГ. "Программно-алгоритмическое обеспечение прикладного многомерного статистического анализа". Цахкадзор, 1995, стр. 46-47.

12. Chernoff H., Savage I.R. Asimptotic normality and efficiency of certain nonparametric test statistics. Ann. of Math. Stat., 1958, v. 29, N4, p. 972-994.

13. Сафарян И.А. Комбинированные критерии, основанные на степенях рангов в задаче двух выборок. Ученые записки ЕрГУ, 1983, N2, с. 7-12.

14. Nikiforov V.I. A generalized change detection problem. IEEE Trans. Inform. Theory. 1995, V. 41, N1, p. 171-187.