Математические вопросы кибернетики и вычислительной техники 17, 1997, 1-5.

Трековые языки, соответствующие процессам в сильно связных графах

К. Б. Амбарцумян

Институт проблем информатики и автоматизации
НАН РА и ЕрГУ

С помощью теории трековых языков доказана распознаваемость языков процессов в сильно связном графе.

При исследовании процессов в сильно связных графах возникает вопрос о распознаваемости языков соответствующих этим процессам. В данной статье используется "трековая" информация, содержащаяся в процессах, что дает возможность применить известные результаты относительно распознаваемости трековых языков.

Прежде всего введем основные понятия теории процессов и трековых языков ([1],[2]), необходимые для дальнейщего изложения .

Пусть $G=(V,E)$-конечный ориентированный граф с множеством вершин V и множеством дуг E , граф $R(G)=(V\times Z,U)$-его развертка,где $U=\{(w,w')/w=v.t\ ,\ w'=v'.t+1\ ,\ t\in Z,\ (v,v')\in E\}$. Подмножество $p\subset(V\times Z,U)$ назовем *процессом* в графе G , если $w=v.t\in p$ тогда и только тогда , когда $\uparrow w=\{v'.t-1/\ (v',v)\in E\}\subset p$ для всех $w\in V\times Z$

Назовем *алфавитом зависимости* пару (X,D), где X является конечным множеством, а $D\subseteq X\times X$ рефлексивное, симетричное отношение зависимости .

Графом зависимости в конечном алфавите зависимости (X,D) назовем помеченный ациклический граф $[U,E,\lambda]$, где U-счетное множество вершин, $E\subseteq U\times U$ множество дуг, $\lambda:U\to X$ метящая функция , такая что $E\cup E^{-1}\cup idU=\lambda^{-1}(D)$.

Множество графов зависимости для данного алфавита зависимости (X,D) обозначим через $M(X,D)$.

Определим *конкатенацию* (произведение) двух графов зависимости. Допустим имеем два графа зависимости $[U_1,E_1,\lambda_1]$ и $[U_2,E_2,\lambda_2]$. Скажем, что $[U,E,\lambda]$ является конкатенацией (произведением) графов зависимости $[U_1,E_1,\lambda_1]$ и $[U_2,E_2,\lambda_2]$ и обозначим $[U_1,E_1,\lambda_1]\bullet[U_2,E_2,\lambda_2]=[U,E,\lambda]$, если $[U,E,\lambda]$ является объединением $[U_1,E_1,\lambda_1]$ и $[U_2,E_2,\lambda_2]$, вместе с новыми дугами (g_1,g_2) для всех вершин $g_1\in U_1$, $g_2\in U_2$, так что $(\lambda_1(g_1),\lambda_2(g_2))\in D$.

Граф зависимости $[U,E,\lambda]$ является *реальным*, если $\downarrow f=\{q\in U/q\leq f\}$ (где $q\leq f$, если существует путь из q в f) является конечной для всех вершин f из U. Множество реальных графов зависимости для данного алфавита (X,D) обозначим через $R(X,D)=R$.

Определим отображение $\varphi: X^{\infty}\to R$ через $\varphi(a)=[\{x\}\ ,\ \varnothing\ ,\lambda(x)=a]$ для всех букв a из алфавита X и $\varphi(a_1a_2...)=\varphi(a_1)\bullet\varphi(a_2)$ ... для всех слов из X^{∞}.

Пусть $\eta: M\to S$ морфизм в конечный моноид S. Реальный трековый язык $L\in R$ *распознается с помощью* η , если для произвольной (ограниченной или неограниченной) последовательности $(r_i)\subseteq M$ из $r_1\bullet r_2\bullet ...\in R$ следует, что $\eta^{-1}\eta(r_1)$

$\bullet\eta^{-1}\eta(r_2)\bullet ...\subseteq R$ Теорема1.[2] *Реальный трековый язык $L\in R$ распознаваем $\Leftrightarrow$ если $\varphi^{-1}(L)$ является распознаваемым словарным языком.*

Теперь перейдем к изложению результатов, полученных автором по распознаваемости языков процессов в сильно связанном графе.

Допустим имеем сильно связный орграф $G(A,E)$. Множество A вершин этого графа назовем алфавитом меток . Для данного графа $G(A,E)$ зададим алфавит зависимости (A,D), где в отношение зависимости D войдет каждая пара вершин графа $G(A,E)$, которая связана дугой.

Обозначим через $P(G)$ множество процессов графа $G(A,E)$ [2] . Известно, что $P(G)$ образует конечную булеву решетку с образующими $W'_1, \ldots, W'_n$, где $W'_i(i=\overline{1,n})$ является связным, бесконечным в обе стороны, периодическим, ациклическим графом. Произвольный процесс $p'\in P(G)$ представляется в виде объединения атомарных процессов

$$p'=W'\,i_1\cup\ldots\cup W'\,i_s\,,\, i_1,\ldots,i_s\le n\,.$$

Отсечем от каждой образующей $W'_i(i=\overline{1,n})$ ее бесконечное начало. Фиксируем произвольное $t\in Z$. Для каждой образующей $W'_i(i=\overline{1,n})$ отбрасываем все те $w'=u.t'$ вершины и инцидентные им ребра для которых $t'<t$ и каждую вершину $w=u.t$ полученного графа пометим буквой u. Понятно что из $W'_i(i=\overline{1,n})$ получается граф $W_i(i=\overline{1,n})$ который будет связным, бесконечным в одну сторону, периодическим, ациклическим графом. Через $P_t(W_1,\ldots,W_n)$ обозначим множество процессов полученной решетки. Для произвольного $p(t)\in P_t(W_1,\ldots,W_n)$ в результате пошаговых изменений t получаются $p(t),p(t+1),\ldots,p(t+\pi),p(t+\pi+1)$, где π-период, $p(t+i)\in P_{t+i}(W_1,\ldots,W_n)$ и $p(t+\pi+1)=p(t)$. Отсюда следует,что изменение t не вносит серьезных изменений в $p(t)$ (в дальнейшем обозначим просто p) и доказательства и утверждения верны для произвольного $p(t)$. Ребра графа p назовем фундаментальными.

Рассмотрим такие последовательности вершин графа $p=W\,i_1\cup\ldots\cup W\,i_s\,,\, i_1,\ldots,i_s\le n$, каждая из которых включает все вершины p и не нарушает частичный порядок этого графа. То-есть , в каждой такой последовательности $q_1q_2\ldots q_j\ldots$ нет таких двух $q_i\,,q_j$ вершин $(i<j)$, для которых определен частичный порядок и $q_j\le q_i$. Возьмем произвольную последовательность $q_1q_2\ldots q_j\ldots$ и заменим элементы этой последовательности соответствующими им метками . Понятно, что получим слово $a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_j}\ldots$ в алфавите меток A. Очевидно, что произвольному процессу p будет соответствовать множество слов в алфавите меток A . Обозначим его $\mathfrak{L}(p)$.

Рассмотрим произвольную образующую $W_i(i=\overline{1,n})$. Вообще говаря $W_i(i=\overline{1,n})$ не является графом зависимости так как в нем могут отсутствовать некоторые дуги между вершинами вида g_1 , g_2 где $(\lambda(g_1),\lambda(g_2))\in D$. Сопоставим $W_i(i=\overline{1,n})$ множество графов зависимости полученных проведением дуг (мы их назовем нефундаментальными), между вершинами, которые по определению графа зависимости, должны быть соединены дугой, однако, не допуская при этом появления циклов. В некоторых случаях, эти дуги можно провести несколькими способами. Тогда образующей $W_i(i=\overline{1,n})$ будет соответствовать множество $Y(W_i)(i=\overline{1,n})$ графов зависимости. Меткам элементов множества $Y(W_i)(i=\overline{1,n})$ придадим индекс i и полученное множество графов зависимости обозначим $Y_i(W_i)(i=\overline{1,n})$. Очевидно, что элементы множества

$$\mathfrak{I}(p)=\{T_1\cup\ldots\cup T_s /\, (T_1,\ldots,T_s)\in Yi_1\,(Wi_1)\times\ldots\times Yi_s\,(Wi_s),\, i_1,\ldots,i_s\le n\}\,,$$

где $p=Wi_1\cup\ldots\cup Wi_s$, $i_1,\ldots,i_s\le n$, являются графами зависимости в алфавите зависимости (A',D'), который получается из алфавита зависимости (A,D) следующим образом. $A' = \bigcup_{i=1}^{n} \{a_i \,/\ \ \forall a \in A\}$, а D' получается из D так: если если $a,b \in A$ и $(a,b) \in D$, то $(a_i,b_i) \in D'$ $(i = \overline{1,n})$. То есть одному процессу $p = Wi_1 \cup \ldots \cup Wi_s$, i_1 , . . . , $i_s \leq n$ сильно связного графа мы поставили в соответствие трековый язык $\Im(p)$. Рассмотрим такие последовательности вершин произвольного графа зависимости $w \in \Im(p)$, которые включают в себя все вершины графа w и не нарушают частичную упорядоченность этого графа. Заменим элементы такой последовательности соответствующими им метками. Получим слово в алфавите A'. Множеству графов зависимости $\Im(p)$ поставим в соответствие множество всех таких слов в алфавите A', которое обозначим $\aleph(\Im(p))$.

Утверждение. $\aleph(\Im(p)) = \mathfrak{L}(p)$.

Доказательство.
Для доказательства покажем, что

1) $g \in \mathfrak{L}(p) \Rightarrow g \in \aleph(\Im(p))$

и

2) $g \in \aleph(\Im(p)) \Rightarrow g \in \mathfrak{L}(p)$

1) Возьмем произвольное слово $g \in \mathfrak{L}(p)$. Допустим, что $g = \ell^1 \ell^2 \ldots$, где $\ell^i \in A$, $i=1,2$ ... . Если $g \in \mathfrak{L}(p)$, то существует такая последовательность вершин $V = v_1 v_2 \ldots$ процесса p , каторая включает в себя вершины p и не нарушает частичную упорядоченность определяемого p . Так как при построении $\Im(p)$ по p вершины $v_1 v_2 \ldots$ не меняются, а только добавляются нефундаментальные ребра, а соответствующие этим вершинам метки получают индексы. Очевидно, что существует такой граф зависимости $F \in \Im(p)$, что последовательность $V = v_1 v_2 \ldots$,вершин графа зависимости F , включает в себя все вершины F и не нарушает частичную упорядоченность. Заменим элементы этой последовательности соответствующими им метками. Получим слово $g' = \ell^1_{i_1} \ell^2_{i_2} \ldots$ в алфавите A', буквы которого различаются от соответствующих букв слова $g = \ell^1 \ell^2 \ldots$ тем, что они имеют индексы. Если Ψ есть функция, снимающая индексы, то $\Psi(g') = g$.

Доказательство пункта *2)* производится подобным образом, только в обратном направлении.

Теорема2. *Существует такой морфизм η , что трековый язык $\Im(p)$ распознается с помощью η .*

Определение. Допустим имеем граф зависимости $G(A,E)$. Подмножество вершин $A' \subseteq A$ графа $G(A,E)$ назовем множеством минимальных (максимальных) вершин (в дальнейшем просто минимальные (максимальные) вершины), если для произвольных $a \in A'$, $b \in A$:

1) если $b \in A'$, то между b и a не определен порядок .

2) если $b \notin A'$, то либо между b и a не определен порядок, либо есть порядок и причем $a < b$ ($b < a$).

Обозначим через $\mu(A')$ $(\sigma(A'))$ множество меток минимальных (максимальных) вершин.

Определение. Пусть (g_i) является произвольной последовательностью графов зависимости. Тогда $g=g_1 \bullet g_2 \bullet \ldots \bullet g_i \bullet \ldots$ определяется как бесконечное произведение со всеми очевидными дугами из g_i в g_j, если $i < j$. Графы g_i назовем делителями g.

Определение. Допустим имеем граф зависимости $G(A,E)$. Определим *ступень* для данного графа зависимости:
1) множество минимальных вершин графа $G(A,E)$ назовем ступенью.
2) множество минимальных вершин графа $G_1(A_1,E_1)$ назовем ступенью графа $G(A,E)$, если граф $G_1(A_1,E_1)$ получается путем отбрасывания множества минимальных вершин и инцидентным им ребер графа $G(A,E)$.
3) если множество минимальных вершин графа $G_{i-1}(A_{i-1},E_{i-1})$ $(i=\overline{2,n})$ является ступенью графа $G(A,E)$, то множество минимальных вершин графа $G_i(A_i,E_i)$ назовем ступенью графа $G(A,E)$, где $G_i(A_i,E_i)$ получается путем отбрасывания множества минимальных вершин и соответствующих им ребер графа $G_i(A_i,E_i)$.

Доказательство Теоремы.
Зададим разпознающий морфизм η. Зададим эквивалентность на $M(X',D')$. Два элемента $m,n \in M(X',D')$ эквивалентны:
1)если каждое из них не является делителем хотя бы одного слова из $\Im(p)$. Обозначим этот класс эквивалентности через B_0.
2)если существуют $f,g \in \Im(p)$ такие, что m делитель f, n делитель g и $\mu(m)=\mu(n)$, $\sigma(m)=\sigma(n)$. Обозначим эти классы эквивалентности через $B_1,B_2,\ldots,B_N$, а через $\mu(B_i)(\sigma(B_i))$ $(i=\overline{1,N})$ обозначим множество меток минимальных (максимальных) вершин соответствующих элементам класса B_i $(i=\overline{1,N})$.

Очевидно, что эквивалентность, определенная таким образом разбивает $M(X',D')$ на
конечное число классов N, поскольку одной из верхних оценок количества классов является конечное число $\tilde{C}_2^{2 \cdot x'}$. Так как мы рассматриваем сильно связные графы, то произвольный граф $g \in \Im(p)$ имеет периодическую структуру. То есть, метки вершин графа g периодически повторяются. Отсюда следует, что для произвольного элемента g данного класса эквивалентности B_i множество меток минимальных и максимальных вершин соответствующие этому классу также периодически повторяются. Пусть $b_i \in B_i$ $(i=\overline{1,N})$. Рассмотрим последовательность ступеней b_i $H_1,\ldots,H_f$ для которого верны следующие утверждения:
1) для произвольного $h \in H_i$ $(i=1,\ldots,f\text{-}1)$ существует $k \in H_{i+1}$, что в b_i есть дуга (h,k).
2) $\mu(H_1)=\mu(b_i)$ и $\sigma(H_f)=\sigma(b_i)$, а для произвольного H_i $(i=2,\ldots,f\text{-}1)$ $\mu(H_i) \neq \mu(b_i)$ и $\sigma(H_i) \neq \sigma(b_i)$.
Множество всех вершин $H_1,\ldots,H_f$ и инцидентных им дуг в b_i назовем периодом B_i и обозначим через $B_i(\pi)$. Количество ступеней f в $B_i(\pi)$ обозначим через $|B_i(\pi)|$. Всякий класс эквивалентности B_i $(i=\overline{1,N})$ разделим на подклассы Bi_1, Bi_2, . . . , в подкласс $Bi_j (j=\overline{1,+\infty})$ войдут те элементы класса B_i, которые имеют одинаковое количество ступеней, и количество ступеней элементов подкласса Bi_j равен $j|B_i(\pi)|$. Очевидно, что элементы подкласса $Bi_j (j=\overline{1,+\infty})$, произвольного класса эквивалентности Bi, отличаются от элементов подкласса Bi_{j-1} на один период.

Теперь покажем, что для произвольного элемента r из $M(X',D')$ принадлежащего
произвольному подклассу $Bi_j (j=\overline{1,+\infty})$ класса B_i $(i=\overline{1,N})$ существует элемент r' из подкласса Bi_{j-1}, такой что r' является префиксом r. Это очевидно, так как если из r

удалить последний период, то полученный элемент (назовем его r') будет принадлежать подклассу Bi_{j-1} , и так как элементы класса эквивалентности B_i являются ацикличными графами , то $r=r' \bullet s$, где s это удаленный период. Очевидно, что элементы произвольного подкласса $Bi_j (j = \overline{1,+\infty})$ класса B_i $(i = \overline{1,N})$ отличаются друг от друга нефундаментальными дугами (вершины те же, а множество $\mathfrak{I}(p)$ было построено с помощью проведения всевозможных дуг не создающих циклов).
Пусть $l=a_i \bullet a_{i+1} \bullet \ldots \bullet a_{i+j} \bullet \ldots \in \mathfrak{I}(p)$ и $a_{i+j} \in Bi_s$. Тогда очевидно, что $m=a_i \bullet a_{i+1} \bullet \ldots \bullet a_{i+j-1} \bullet b \bullet a_{i+j+1} \bullet \ldots \in \mathfrak{I}(p)$ для любого $b \in B_i$.

Покажем, что определенная на $M(X',D')$ эквивалентность является конгруэнцией, то есть для любых i , j существует такое k, что $B_i \bullet B_j = \{f \bullet g \mid f \in B_i, g \in B_j\} \subseteq B_k$. Допустим $f_1 \in B_i$, $g_1 \in B_j$ и $f_1 \bullet g_1 \in B_k$, покажем, что для произвольных $f_2 \in B_i$, $g_2 \in B_j$ $f_2 \bullet g_2 \in B_k$. Классы эквивалентности B_i $(i = \overline{1,N})$ характеризуются множествами меток минимальных и максимальных вершин и так как операция конкатенации такова, что элементы множества $B_i \bullet B_j$ имеют одно и то же множество меток минимальных и максимальных вершин, что и f_2 , g_2 , то нам остается показать, что $f_2 \bullet g_2$ является делителем. Так как $f_1 \bullet g_1$ является делителем, можно сказать, что существует такое $v \in \mathfrak{I}(p)$, что $v=r \bullet f_1 \bullet g_1 \bullet \ldots$. Согласно вышесказанному, мы можем заменить f_1 на произвольный другой элемент из его класса B_i, в частности на f_2. Так же можно поступить и с g_1 , и в итоге получим $v=r \bullet f_2 \bullet g_2 \bullet \ldots$, то есть $f_2 \bullet g_2$ является делителем. Руководствуясь теми же соображениями, можно показать, что если i или j равны 0 то k также равен 0. Таким образом мы показали, что определенная выше эквивалентность является конгруэнцией, то есть задает морфизм η из моноида M в S, где S-фактор-моноид по введенной эквивалентности .

В качестве распознающего морфизма возьмем η. И так как для произвольного элемента $w \in \mathfrak{I}(p)$, где $w=a_1 \bullet \ldots \bullet a_j \bullet \ldots$ замена произвольного делителя $a_j \in B_i$ $(j = \overline{1,+\infty}, i = \overline{1,N})$ любым другим элементом $a_j' \in B_i$ не влечет за собой выхода из $\mathfrak{I}(p)$, то очевидно, что трековый язык $\mathfrak{I}(p)$ распознается с помощью η.

Литература

1. Шахбазян К. В. Об алгебре процессов в графах. Кибернетика. N6, с. 38-42, 1988.

2. P.Gastin. Recognizable and rational languages of finite and infinite traces. STACS'91. Lecture Notes in Computer Science, 480, p.89-104, 1991 .