А. А. БАБАДЖАНЯН

# НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ «КОНСТРУКТИВНОСТИ» В ТЕОРЕМЕ О НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКЕ

Теоремы о неподвижных точках, являющиеся основой нелинейного функционального анализа, можно разделить на две группы. К первой группе, называемой «элементарными теоремами о неподвижных точках» [1], относятся различные обобщения принципа сжимающих отображений Каччиопполи-Банаха (обзор см. в [2]).

Условия теоремы, хотя и существенно ограничивают класс отображений действующих в метрическом пространстве, однако содержат конструктивную процедуру построения неподвижной точки—метод последовательных приближений Пикара*, составляющий основу многих итерационных процедур вычислительной математики.

Вторая группа—это собственно теорема о неподвижной точке Боля-Брауэра и ее основные обобщения: теорема Шаудера, Тихонова, Какутани-Фана, Лефшеца-Хопфа (полные обзоры и различные эквивалентные формулировки даны в [1, 4, 5]).

Оставаясь в рамках чисто топологических условий и являясь основой доказательства многих теорем существования (в теории дифференциальных и интегральных уравнений, в задачах оптимизации и теории игр, в математической экономике и т. д.), эта группа теорем не содержит однако конструктивной процедуры нахождения неподвижной точки.

В последнее время, в связи с развитием средств вычислительной техники, начались глубже изучаться методы продолжения (гомотопии) и их дискретные аналоги—симплициальные методы, для нахождения $\varepsilon$-неподвижной точки, начало которым заложено работами [6—8], так же см. [9—11].

Эти методы, по сути, основаны на самих схемах доказательства теоремы о неподвижной точке, однако их вычислительные алгоритмы, даже для задач практически небольшой размерности, наталкиваются на непреодолимые трудности.

В [12] (работа представлена 2.07.84 г.) была сформулирована «конструктивная» процедура нахождения неподвижной точки в условиях теорем Боля-Брауэра и Шаудера и ее приложение к линейным уравнениям с вполне непрерывным оператором.

1. Нижеследующие определения и обозначения использованы из [16].

*Теорема 1* [12]. Пусть компактное множество $M$ в банаховом пространстве $\boldsymbol{B}$ обладает свойством неподвижной точки. Тогда всякая точка сгущения последовательности неподвижных точек

* Метод последовательных приближений Пикара применял еще в IX веке арабский астроном Абасс аль-Гасиб аль-Марвази (см. [3]).

$$x_{k+1}=Fr_k(x_{k+1}) \quad (\text{или } x_{k+1}=r_kF(x_{k+1})) \quad k=0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где ретрагирующие (непостоянные) отображения $r_k: M \to M$ $(k=0, 1, \ldots)$ начиная с произвольного $r_0$, удовлетворяют условиям

(B) $\quad r_k(x_k)=x_k$ (соответственно $r_kF(x_k)=F(x_k)$) $k=1, 2 \ldots,$

является неподвижной точкой непрерывного отображения $F$.

Схема доказательства дана в [12]. Полное доказательство приводится в другой работе.

*Замечание 1.* Если ретрагирующие отображения $r_k$ постоянны для всех $k=0, 1, \ldots$, то (1) вырождается в силу условий (B) в метод последовательных приближений Пикара.

*Замечание 2.* Предложенный «конструктивный» метод нахождения неподвижной точки, в то же время можно связать с другими методами решения операторных уравнений основанными на принципе сжимающих отображений: с методом Гаусса-Зейделя и его глубоким обобщением—методом осреднения функциональных поправок Ю. Д. Соколова.

Как известно, метод Ю. Д. Соколова для решения нелинейного функционального уравнения $x=F(x)$ имеет следующий вид [9]:

$$x_{k+1}=F(x_k+P_k(x_{k+1}-x_k)) \qquad k=0,1, \ldots, \tag{2}$$

где $P_k$—проектор, $x_0$—задано.

Очевидно, при условии (B), которые для метода Ю. Д. Соколова можно интерпретировать как условие максимального использования информации полученной на каждом шаге, (2) совпадает с (1). В то же время, в конечномерном случае $B=R^n$, если проектор $P_k$ выбирать на $k'=k(\mathrm{mod}\, n)+1$-ое координатное направление, т. е. $P_kx=\xi_ke^{k'}$, а $\xi_k$—$k$-ая координата вектора $x$, (2) совпадает с одним шагом метода Гаусса-Зейделя.

Отметим, что метод Ю. Д. Соколова является частным случаем (1) (см. замечание 1), а не наоборот—как это может казаться из замечания 2.

2. Ниже дается приложение этой теоремы на случай линейного операторного уравнения второго рода

$$x=Ax+b, \tag{3}$$

где $A$ вполне непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве $B$ и не имеющий единицу своим собственным числом.

Под (внешним) проекционно-связным методом для решения (3) будем понимать процедуру построения следующего итерационного процесса [13—15].

$$x^{(k+1)}=P_kAx^{(k+1)}+b \quad (P_kAb\neq 0), \quad k=0, 1, \ldots, \tag{4}$$

где, начиная с заданного $P_0$, проекторы (линейные) $P_k$ на каждом шаге $k=1, 2, \ldots$ выбираются из условия (B): $P_kAx^{(k)}=Ax^{(k)}$,

а под (внутренним) проекционно-связным методом—следующий процесс [13—15]

$$x^{(k+1)}=AP_kx^{(k+1)}+b \qquad (AP_kb\neq 0), \quad k=0, 1, \ldots, \tag{5}$$

где, начиная с заданного $P_0$, проекторы $P_k$ на каждом шаге $k=1, 2, \ldots$ выбираются из условия (B): $P_kx^{(k)}=x^{(k)}$.

В обоих случаях будем полагать $\|P_k\|<c$ для всех $k=0, 1, \ldots$

Сходимость приближений $x^{(k+1)}$ найденных из (4) (соответственно из (5)) к решению уравнения (3) дается следующей теоремой.

*Теорема 2.* [13, 14]. При сделанных выше предположениях, последовательность решений уравнения (4) (соответственно (5)) сходится к решению (3), если существуют непрерывные обратные $(E-AP_k)^{-1}$ (соответственно $(E-P_kA)^{-1}$), для всех $k=0, 1, \ldots$

Доказательство следует из теоремы 1 и того, что отображение $AP_k(P_kA)$ $k=0, 1, \ldots$ действие которого можно определить из шара достаточно большого радиуса в пространство $B$, имеет в этом шаре единственную неподвижную точку.

Расщепляя пространство $B=B_k\oplus B_k^1$, где $B_k=R(P_k)=P_kB$ вообще конечномерно, решение (4) можно найти из двухуровневого итеративного процесса

$$P_k(x^{(k+1)}-b)=P_kAP_k(x^{(k+1)}-b)+P_kAb \quad (P_kAb\neq 0), \tag{6}$$

$$x^{(k+1)}=P_k(x^{(k+1)}-b)+b, \quad k=0, 1, \ldots \tag{7}$$

и, соответственно, для (5)

$$P_kx^{(k+1)}=P_kAP_kx^{(k+1)}+P_kb \qquad (AP_kb\neq 0) \tag{8}$$

$$x^{(k+1)}=AP_kx^{(k+1)}+b \quad k=0, 1, \ldots \tag{9}$$

В (7) $P_k(x^{(k+1)}-b)=P_kAx^{(k+1)}$.

Из построения видно, что, хотя, например (8) соответствует проекционной схеме для уравнений второго рода, однако вложенности подпространств $B_k\subset B_{k+1}$ не требуется и размерность подпространств может быть одной для всех $k=0, 1, \ldots$, кроме того, в отличие от метода Бубнова—Галеркина, ортогональность проектора $P_k$ не обязательна.

*Замечание 3.* На выбор проектора могут быть наложены дополнительные условия [13—15], в частности $Ab\in R(P_k)$ (для (8), (9) $b\in R(P_k)$).

Представление проектора двумя возможными способами приводит к двум различным схемам проекционно-связных методов.

а) *Проекционная схема.* Рассмотрим на шаге $k=0, 1, \ldots$ представление проектора в виде [16]:

$$P_kx=\sum_{l=1}^{n_k} f_l^{(k)}(x)e_l^{(k)}, \quad \text{где } f_l^{(k)}(e_j^{(k)})=\delta_{lj}, \tag{10}$$

линейные непрерывные функционалы $f_l^{(k)}(x)\in B^*$, $\{e_l^{(k)}\}_1^{n_k}$-базис конечномерного подпространства $B_k$ размерности $n_k$ шага $k$.

Условия (B) очевидно эквивалентно требованию $x^{(k)}\in co\{e_l^{(k)}\}$.

Решение (9) (для краткости будем излагать схему внутреннего проекционно-связного метода), как вектора из $B_k\subset B$ на следующем шаге $k+1$ будем находить в виде

$$P_kx^{(k+1)}=\sum_{l=1}^{n_k} \alpha_l^{(k+1)}e_l^{(k)}, \tag{11}$$

где $\alpha_l^{(k+1)}$—неизвестные постоянные. После подстановки (11) в (8), имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\alpha_i^{(k+1)}=\sum_{j=1}^{n_k} f_i^{(k)}(Ae_j^{(k)})\alpha_j^{(k+1)}+f_i^{(k)}(b) \qquad i=\overline{1, n_k}. \tag{12}$$

Требуется невырожденность системы уравнений и $f_i^{(k)}(b)\neq 0$ для некоторого $i$.

Таким образом (12) решается в пространстве $R^{n_k}$ изоморфном $B_k\subset B$ в котором находится решение (8).

Один шаг этой части излагаемой схемы есть обычный проекционный метод решения операторных уравнений второго рода [9, 16].

Заметим, что в отличие от проекционных методов, так как размерность подпространства $B_k$ произвольна, требования невырожденности матрицы системы (12) легко выполнимы.

Затем находится $x^{(k+1)}\in B$ (в отличие от проекционных методов являющиеся приближенными, так как решение принадлежит некоторому выбранному нами $B_k$)

$$x^{(k+1)}=\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^{(k+1)}Ae_i^{(k)}+b$$

т. е. найденный вектор $P_k x^{(k+1)}$ из подпространства $B_k\subset B$ корректируется в $B$.

Соответственно назовем: (4), (5)—*аппроксимирующими,* (6), (8)—*проекционными,* (7), (9)—*корректирующими уравнениями.*

б) *Дискретная схема.* Рассмотрим на шаге $k=0, 1, \ldots$ представление проектора $P_k$ в виде [17]:

$$P_k=T_k^- T_k,$$

где линейный оператор $T_k: B\to R^{n_k}$ и $T_k^-: R^{n_k}\to B$ является $g$-обратными (или 1-полуобратным т. е. удовлетворяющим условию $T_k T_k^- T_k = T_k$), который всегда существует т. к. $R^{n_k}$ замкнуты.

Определим

$$T_k(x)=\begin{pmatrix} f_1^{(k)}(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{n_k}^{(k)}(x)\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad T_k^-\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_{n_k}\end{pmatrix}=\sum_{i=1}^{n_k} x_i e_i^{(k)},$$

где $f_i^{(k)}(x)$—линейные функционалы, $x\in B$, $(x_1 \ldots x_{n_k})^*\in R^{n_k}$, а $\{e_i^{(k)}\}_1^{n_k}$—базис подпространства $B_k$.

В конечномерном случае $B=R^n$ изложение этой схемы имеется в [13—15].

Тогда (8) можно сузить и решить в самом пространстве $R(T_k)=R^{n_k}$ (в отличие от а).), которое тоже изоморфно подпространству $B_k\subset B$ т. е. (8) принимает вид

$$T_k x^{(k+1)}=T_k A T_k^- T_k x^{(k+1)}+T_k b \tag{13}$$

В некоторых пространствах, например в пространстве $L[a,b]$, при дискретизации отрезка $[a,b]$ интерполяционными узлами $t_i$ в качестве $f_i^{(k)}(x)$ можно принять значение $x^{(k)}(t_i)$. Тогда на одном шаге, (13) может быть сведена к сеточной схеме решения операторных уравнений.

Далее решение $T_k x^{(k+1)}$ из (13) интерполируется (если $B=R^n$— расширяется) на $B$ как $T_k^- T_k x^{(k+1)}$ и корректируется в $B$ т. е.

$$x^{(k+1)}=AT_k^- T_k x^{(k+1)}+b. \tag{14}$$

Соответственно назовем: (13)—*суженным или усеченными,* а (14)—*интерполирующим (и корректирующим) уравнениями;* $T_k$—*оператором дискретизации, а* $T_k^-$—*оператором интерполяции.*

Условия (В) в конкретных пространствах могут удовлетворяться разными способами выбора базиса $B_k$, т. е. при заданном операторе дискретизации путем построения оператора интерполяции $T_k^-$ из условия

$$T_k^- T_k x^{(k)} = x^{(k)} \quad k=0,1,\ldots.$$

Вышеизложенное нетрудно выписать и для внешнего проекционно-связного метода, а также для кратных проекционно-связных методов [13, 14].

2. Остановимся на некоторых возможных приложениях изложенного подхода.

2.1. Системы линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей общего вида рассматривались в [13—15, 18]. Для общего случая результаты п. п. 1, 2 позволяют предложить методы решения вырожденных и плохо обусловленных уравнений. Причем плохо обусловленные системы могут быть сведены не к решению «вырожденными» методами [19], а путем аппроксимации «хорошими» матрицами, т .е. сведением к невырожденным хорошо обусловленным уравнениям.

Кроме того отметим, что при решении систем линейных алгебраических уравнений предложенными методами, как видно из (13), (14) [14] порядок решаемой системы может быть произвольно малым, что существенно при решении «больших» задач.

2.2. Результаты п. 1 служат получению более конкретных утверждений для нелинейных уравнений с дифференцируемым оператором $F$.

2.3. Методы п. п. 1, 2 могут быть применены к решению дифференциальных уравнений как обыкновенных так и в частных производных.

2.4. Для фредгольмовых интегральных уравнений второго рода получен ряд результатов, в частности, показано, что в пространстве $L_2[ab]$ интегральное уравнение может быть решено точно, так как процесс решения сводится к решению серии уравнений с вырожденными ядрами.

2.5. В п. 2 фактически предложен конструктивный способ аппроксимации линейного оператора $A$ последовательностью $A_{k+1}=AP_k$ (или $P_kA$) $k=0, 1, \ldots$ [14].

*Определение.* Последовательность операторов $A_k: M_k\to B$, где $M_k$—открытые множества из $B$, будем называть сходящейся по подмножествам $M_k$ к оператору $A$, если

$$\|A_k x_k - A x_k\| \to 0 \text{ при } x_k \to x \text{ и } x_k \in M_k.$$

В этой связи, в теореме 2 даны условия устойчивости нулевого индекса линейных фредгольмовых операторов $E - A_{k+1}$.

Заметим, что уже в конечномерном случае определенная сходимость в пространстве матриц отлична от сходимости по норме.

2.6. Проекционно-связные методы, при надлежащем выборе проектора, могут служить основой алгоритмов решения задач линейной алгебры с «внутренним» параллелизмом.

В указанных направлениях работы будут продолжены.

Представлена 31.08.1984 г.

Ա. Ա. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ

## ԱՆՇԱՐԺ ԿԵՏԻ ԹԵՈՐԵՄՈՒՄ «ԿՈՆՍՏՐՈՒԿՏԻՎՈՒԹՅԱՆ» ՈՐՈՇ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԸ

### Ամփոփում

*Աշխատանքում շարադրված է «կոնստրուկտիվությունը» անշարժ կետի թեորեմների պայմաններում։ Օպերատորային հավասարումների լուծման համար ֆունկցիոնալ տարածություններում ներկայացված է պրոյեկցիոն-կապակցված մեթոդները և նրանց հնարավոր կիրառությունները։*

### ЛИТЕРАТУРА

1. *J. Dugundji, A. Granas.* Fixed—Point Theory, Vol. 1. Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1982.

2. *А. А. Иванов.* Неподвижные точки отображений метрических пространств. — В кн.: Исследования по топологии. II., Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 66, Л., Наука, 1976.

3. *E. S. Kenedy, W. R. Transue.* A medieval iterative algorism.—Proc. Amer. Math. Soc. 18(1967) p. 584—587.

4. *E. R. Smart.* Fixed Point Theorms.—Cambridge: Cambridge University Press, 1974.

5. *В. В. Немыцкий.* Метод неподвижных точек в анализе. — УМН, т. 1, (1936), с. 141—175.

6. *Д. Ф. Давиденко.* Об одном методе численного решения систем нелинейных уравнений.—ДАН СССР, 131, №4, (1960).

7. *H. Scarf* The Approximation of Fixed Point of a Continuous Mapping.—SIAM J. Appl. Mathem., v. 15, № 5 (1967) p. 1328—1343.

8. *S. Karamardian (Ed.)* Fixed Points: Algoritms and Application.—Proc. Conf. on Computing Fixed Points with Applications. Clemson University, Clemson, South Carolina, 1979.

9. *М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко и др.* Приближенное решение операторных уравнений. — М., Наука, 1969.

10. *В. Е. Шаманский.* Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ, часть II. — К., Наукова думка, 1966.

11. *М. Дж. Тодд.* Вычисление неподвижных точек и приложения к экономике. —М., Наука, 1983.

12. *А. А. Бабаджанян.* О «конструктивности» в теореме о неподвижной точке. — ДАН АрмССР (в печати).

13. *А. А. Бабаджанян.* Об одной интеративной схеме решения операторных уравнений.—ДАН АрмССР, т 77, №4 (1983).

14. *А. А. Бабаджанян.* Методы агрегирования. —Препринт ВЦ АН АрмССР, № 82—3, Ереван, 1982.

15. *А. А. Бабаджанян.* Проекционно-связные методы решения операторных уравнений. —В кн.: Труды ВЦ АН АрмССР и ЕГУ, Матем. вопросы кибернетики и вычис. техники, т.13(1984).

16. *Л. В. Канторович, Г. П. Акилов.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. —М., Физматгиз, 1959.

17. *M. Zuhair Nashed.* A Unified Operator Theory of General Inverses.—In.: General Inverses and Applications. (Ed. M. Zuhair Nashed), Academic Press, New-York, 1976, p. 1—109.

18. *А. А. Бабаджанян.* О сходимости общих процессов итеративного агрегирования. —ДАН АрмССР, т. 71, № 5 (1980).

19. *Д. К. Фадеев, В. Н. Фадеева.* Вычислительные методы линейной алгебры. —Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 54 (1975).