А. А. БАБАДЖАНЯН, А. Р. АНДРАНИКЯН

ПРОЕКЦИОННО-СВЯЗНЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

Введение

В [1,2] был предложен итеративный метод решения операторных уравнений, названный проекционно-связным, а также была показана связь с известными методами, в частности, с методом осреднения функциональных поправок Ю. Д. Соколова и общей теорией приближенных методов Л. В. Канторовича. Схему метода кратко можно описать следующим образом:

—пусть в пространстве Банаха **B** дано линейное уравнение второго рода

$$x=Ax+f, \tag{0.1}$$

где вполне непрерывный оператор $A:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$, а $(E-A)^{-1}$ существует и непрерывен. Решение (0.1) предлагается аппроксимировать последовательностью решений уравнений

$$x^{(k+1)}=AP_k\ x^{(k+1)}+f\quad (P_k f\neq 0)\quad k=0,1,\cdots \tag{0.2}$$

начиная с заданного $P_0\neq E$, где на каждом шаге $k+1$ по найденному приближению $x^{(k)}$ строится такой проектор P_k, чтобы имело место условие (B): $P_k x^{(k)}=x^{(k)}$ для всех $k=1,2,\cdots$. Решения (0.2) последовательно можно найти из двухуровневого итеративного процесса:

$$P_k x^{(k+1)}=P_k A P_k x^{(k+1)}+P_k f \tag{0.3}$$

$$x^{(k+1)}=AP_k x^{(k+1)}+f\qquad (k=0,1,\cdots) \tag{0.2'}$$

(предполагается, что $P_k f\neq 0$ для $k=0,1,\ \cdots$), сущность которого состоит в том, что (0.3) можно сначала решить на подпространстве $R(P_k)$ относительно $P_k x^{(k+1)}$ (этот шаг есть галеркинская аппроксимация), а затем скорректировать (расширить) решение на всем **B**.

Аналогичным образом внешний процесс проекционно-связного метода приближает решение (0.1) последовательностью решений уравнений:

$$x^{(k+1)}=P_k A x^{(k+1)}+f\quad (P_k Af\neq O\ k=0,1,\ldots,\ldots \tag{0.4}$$

где проектор P_k выбирается из условий (B'): $P_k A x^{(k)}=Ax^{(k)}$ $(k=,1,2,\cdots)$, начиная с заданного $P_0\neq E$. Расщепив пространство **B**, итеративный процесс (0.4) можно записать в следующем двухуровневом виде:

$$P_k A x^{(k+1)} = P_k A P_k A x^{(k+1)} + P_k A f \tag{0.5}$$

$$x^{(k+1)} = P_k A x^{(k+1)} + f \qquad (k=0,1,\cdot\cdot\cdot) \tag{0.4}$$

Заметим, что $P_k A x^{(k+1)} = P_k(x^{(k+1)} - f)$.

Условия сходимости методов в общем случае даны в [2], а в случае $A: R^n \to R^n$, где R^n—конечномерное вещественное пространство даны в работах [2, 3]. Некоторые приложения проекционно-связных методов даны в [4].

В работе показано, что проекционно—связные методы позволяют сводить решение фредгольмового уравнения второго рода в пространстве L_2 к итеративному решению интегральных уравнений с вырожденными ядрами. Приведены результаты экспериментальных сравнений с другими точными методами [6—8].

1. Описание метода для линейных интегральных уравнений

Обозначим через $L_2(a, b)$—пространство действительных, квадратично суммируемых функций определенных на отрезке $[a, b]$, норма в котором определяется следующим образом:

$$\|u(x)\| = \left\{ \int_a^b |u(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Рассмотрим в $L_2(a,b)$ интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$u(x) = b(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)\, u(y) dy, \tag{1.1}$$

где $b(x)$, $K(x,y)$—заданные и $u(x)$—искомая функции, а λ—отличное от нуля действительное число.

Пусть ядро $K(x, y)$ квадратично суммируемо в квадрате $Q=\{a \leqslant x, y \leqslant b\}$, т. е.

$$M^2 = \int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2\, dxdy < \infty.$$

Тогда, как известно, интегральный оператор $Ku \equiv \int_a^b K(x, y) u(y) dy$ действующий из $L_2(a, b)$ в $L_2(a, b)$ вполне непрерывен. Пусть оператор $(E-\lambda K)$ непрерывно обратим, что выполняется если $1/\lambda \notin \sigma(K)$—спектру оператора K. В частности, оператор обладает этим свойством, если $|\lambda| < 1/M$ и при этом к уравнению (1.1) можно применить метод последовательных приближений.

Суть проекционно-связного метода решения интегрального уравнения (1. 1) состоит в том, что исходя из начального P_0 последующие приближения определяются согласно (0.2) следующим образом

$$u_{k+1}(x) = b(x) + \lambda K P_k\, u_{k+1}(x) \qquad (k=0,1,\cdot\cdot\cdot) \tag{1.2}$$

(при предположении, что операторы $(E-\lambda KP_k)$ непрерывно обратимы, и $P_k b \neq 0$ для $k=0,1,\ldots$), где строится на каждом шаге $k+1$ по найденному приближению такой проектор P_k, чтобы имело место условие (B).

Внешний процесс проекционно-связного метода можно записать в следующем виде:

$$u_{k+1}(x) = b(x) + \lambda P_k K u_{k+1}(x) \qquad (k=0,1,\cdots) \tag{1.3}$$

(при условии существования непрерывных обратных $(E-\lambda P_k K)^{-1}$ и $P_k Kb \neq 0$ для $k=0,1,\cdots$), где проектор P_k выбирается из условий (B').

Пусть P_k проектирует пространство $L_2\,(a,b)$ на его конечномерное подпространство $L_2^k(a,\,b)$ размерности n_k, с базисом $e_1^k(x)\cdots e_{n_k}^k(x)$. Тогда существуют линейные функционалы $f_1^k\cdots f_{n_k}^k$ с условиями

$$f_i^k(e_j^k) = \delta_{ij} \qquad \text{для } i,\; j=\overline{1,n_k} \tag{1.4}$$

(где δ_{ij}—символ Кронекера), так что P_k представляется в виде:

$$P_k u(x) = \sum_{i=1}^{n_k} f_i^k(u) e_i^k(x) \text{ для любых } \quad u(x) \in L_2(a,b),$$

Причем для проекцинно-связного метода надо выбрать подпространство $L_2^k(a,\,b)$ так, чтобы приближенное решение $u_k(x) \in L_2^k(a,b)$ (для внешнего процесса: $Ku_k(x) \in L_2^k(a,b)$).

Как известно, всякий линейный функционал определенный на $L_2(a,b)$ представляется в виде:

$$f(u) = \int_a^b u(t)\beta(t)\, dt,$$

где $\beta(x)$—функция принадлежащая $L_2(a,b)$, т. е. f_i^k функционалы выражаются как

$$f_i^k(u) = \int_a^b u(t)\;\beta_i^k(t)dt,$$

где $\beta_i^k(x)$ функции выбираются удовлетворяющими условиям (1.4).

Следовательно проектор P_k можно представить в виде:

$$P_k u(x) = \sum_{i=1}^{n_k} e_i^k\,(x) \int_a^b u(t)\,\beta_i^k(t)dt.$$

Обозначив через $P_k(x,t) = \sum_{i=1}^{n_k} e_i^k(x)\beta_i^k(t)$, получим:

$$P_k u(x) = \int_a^b P_k(x,t)\; u(t)dt. \tag{1.5}$$

На основании выражения (1.5), правая часть (1.2) может быть представлена в виде:

$$b(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)P_k u_{k+1}(y)\,dy=b(x)+\lambda\int_a^b G_k(x,t)u_{k+1}(t)dt,$$

где $$G_k(x,t)=\int_a^b K(x,y)\cdot P_k(y,t)dy.$$

Таким образом приближенные решения находятся как решения интегральных уравнений

$$u_{k+1}(x)=b(x)+\lambda\int_a^b G_k(x,t)u_{k+1}(t)dt\quad (k=0,1,\cdots), \tag{1.6}$$

которые, вообще говоря, проще исходного уравнения, так как данное ядро $K(x,y)$ заменяется на вырожденное, имеющее вид:

$$G_k(x,t)=\sum_{i=1}^{n_k}\beta_i^k(t)\int_a^b K(x,y)e_i^k(y)dy\qquad (k=0,1,\cdots),$$

Это позволяет сводить уравнение (1.6) к линейной алгебрической системе.

Аналогичным образом согласно (1.5), правая часть (1.3) может быть представлена в виде:

$$b(x)+\lambda P_k\int_a^b K(x,t)\cdot u_{k+1}(t)\,dt=b(x)+\lambda\int_a^b G_k'(x,t)\cdot u_{k+1}(t)dt,$$

где $$G_k'(x,t)=\int_a^b K(y,t)\cdot P_k(x,y)dy.$$

Таким образом для внешнего проекционно-связного метода приближения $u_{k+1}'(x)$ определяются из интегральных уравнений с вырожденными ядрами:

$$u_{k+1}(x)=b(x)+\lambda\int_a^b G_k'(x,t)u_{k+1}(t)dt\qquad (k=0,1\cdots).$$

2. Вычислительная схема метода

Построим вычислительную схему проекционно-связного метода, описанного п. 1, для решения интегрального уравнения (1.1). Решение уравнения (1.1) последовательно можно найти из двухуровневого итеративного процесса:

$$P_k u_{k+1}(x)=\lambda P_k K P_k u_{k+1}(x)+P_k\, b(x) \tag{2.1}$$

$$u_{k+1}(x)=\lambda K P_k\, u_{k+1}(x)+b(x)\qquad (k=0,1,\cdots). \tag{2.2}$$

Поскольку на каждом шаге k итерационный процесс (2.1) соответствует приближенному методу Галеркина для уравнений 2-го рода (причем здесь ортогональность проектора необязательна), то в $k+1$-ом шаге для определения $P_k\, u_{k+1}(x)$ из (2.1) можно применить ту же вычислительную схему метода Галеркина.

$P_k u_{k+1}(x)$ единственным образом представим в виде:

$$P_k u_{k+1}(x)=\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k \cdot e_i^k(x), \quad (\alpha_i^k \neq 0 \text{ для } \forall i=\overline{1,n_k}). \tag{2.3}$$

Подставив (2.3) в (2.1), получим:

$$\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k e_i^k(x)=\lambda \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k P_k K e_i^k(x)+ \sum_{i=1}^{n_k} \nu_i^k e_i^k(x), \tag{2.4}$$

где $\nu_i^k=f_i^k(b(x))$.

Поскольку $P_k K e_i^k(x)=\sum_{m=1}^{n_k} a_{mi}^k \; e_m^k(x)$, где $a_{mi}^k = f_m^k(Ke_i^k(x))$, то (2.4) сводится к следующему уравнению:

$$\sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k e_i^k(x)=\lambda \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k \sum_{m=1}^{n_k} a_{mi}^k e_m^k(x)+\sum_{i=1}^{n_k} \nu_i^k e_i^k(x). \tag{2.5}$$

Из (2.5) коэффициенты α_i^k определяются как решение системы линейных алгебраических уравнений (предполагается, что система имеет единственное решение) вида:

$$\alpha^k=\lambda A^k \alpha^k+\nu^k, \quad (\gamma^k \neq 0) \tag{2.6}$$

где $(\alpha^k)^T=(\alpha_1^k, \cdot \cdot \cdot, \alpha_{n_k}^k)$ (т-знак транспонирования),

$(\nu^k)^T=(\nu_1^k, \cdot \cdot \cdot, \nu_{n_k}^k)$,

$A^k=\{a_{ij}^k\}_1^{n_k}$ — $(n_k \times n_k)$ матрица.

Подставив значение $P_k u_{k+1}(x)$ из (2.3), в (2.2) получим:

$$u_{k+1}(x)=\lambda \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k K e_i^k(x)+b(x), \tag{2.7}$$

т. е. решение интегрального уравнения (2. 2) шага $(k+1)$ находится из (2. 6), (2. 7).

Внешний процесс проекционно-связного метода запишем в следующем двухуровневом виде:

$$P_k K u_{k+1}(x)=\lambda P_k K P_k K u_{k+1}(x)+P_k K b(x)$$

$$u_{k+1}(x)=\lambda P_k K u_{k+1}(x)+b(x) \qquad (k=0,1, \cdot \cdot \cdot).$$

Применяя аналогично вышеизложенную вычислительную схему, получим следующий итеративный процесс:

$$u_{k+1}(x)=\lambda \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k e_i^k(x)+b(x), \qquad (k=0,1, \cdot \cdot \cdot), \tag{2.8}$$

где коэффициенты α_i^k определяют из системы линейных алгебраических уравнений

$$\alpha^k=\lambda A^k \alpha^k+\nu'^k \qquad (\gamma'^k \neq 0) \quad k=0,1, \cdot \cdot \cdot, \tag{2. 9}$$

где $(\nu'^k)^T=(\nu_1'^k, \cdot \cdot \cdot, \nu_{n_k}'^k)$,

$\nu_i'^k=f_i^k(Kb(x))$.

3. Одномерные проекционно-связные процессы

Рассмотрим вычислительную схему метода в одномерном случае, т. е. в случае проектирования на одномерные подпространства $L_2^k(a,b)$ $(k=0,1,\cdot\cdot\cdot)$. Для выполнения условия (B) возьмем $e^k(x)=$ $=u_k(x)(k=1,2,\ldots)$ начиная с заданного $e^0(x)$.

При этом проектор P_k можно представить в виде:

$$P_k u(x)=f^k(u(x))\cdot u_k(x),\quad \text{где}\quad f^k(u(x))=\int_a^b u(t)\beta^k(t)dt,$$

причем функция $\beta^k(x)$ выбирается из условия:

$$f^k(u_k(x))=1. \tag{3.1}$$

Тогда (2. 6), (2. 7) приводится к следующему виду:

$$u_{k+1}(x)=\lambda\alpha^k K u_k(x)+b\,(x) \tag{3.2}$$

где постоянное α^k определяется из соотношения

$$\alpha^k=\frac{f^k(\,b(x))}{1-\lambda f^k(Ku_k(x))}\qquad (f^k(b(x))\neq 0), \tag{3.3}$$

предполагается, что $\lambda f^k(Ku_k(x))\neq 1$.

Для внешнего одномерного процесса проекционно-связного метода приближенное решение определяется из тех же формул (3.2), только с тем отличием, что

$$\alpha^k=\frac{f^k(Kb(x))}{1-\lambda f^k(Ke^k(x))} \tag{3.4}$$

здесь берется $e^k(x)=Ku_k(x)),\lambda f^k(Ke^k(x))\neq 1$ и $f^k(Kb(x))\neq 0)$.

В частности условие (3.1) выполняется, если в качестве $\beta^k(x)$ взять, например, постоянную: $\mu_k=\dfrac{1}{\int_a^b u_k(t)dt}$, а для внешнего процесса для выполнения условий $f^k(Ku_k(x))=1$ постоянную:

$$\mu_k=\frac{1}{\int_a^b Ku_k(t)dt}.$$

В [5] обсуждается метод, аналогичный (3.2), (3.3), для фокусирующего оператора К и при выборе проектора на одномерное подпространство вдоль ядра собственного функционала сопряженного оператора К*, соответствующие наибольшему (оторванному от остальной части спектра) собственному значению.

4. Приложение к интегральным уравнениям с вырожденным ядром

Рассмотрим частный случай простейшего вырожденного ядра:

$$K(x,y)=K_1(x)\cdot K_2(y),$$

при котором уравнение (1.1) принимает вид:

$$u(x)=b(x)+\lambda K_1(x)\int_a^b K_2(y)u(y)dy. \qquad (4.1)$$

Как известно, уравнение (4.1) имеет единственное решение:

$$u^*(x)=b(x)+c^*K_1(x),$$

где $c^*=\dfrac{\lambda\int_a^b K_2(y)b(y)dy}{1-\lambda\int_a^b K_1(y)K_2(y)dy}$, если λ не равно собственному числу:

$$\Lambda=\frac{1}{\int_a^b K_1(y)K_2(y)dy}.$$

Заметим, что вычислительная схема для внешнего процесса (2.8), (2.9) применительно к уравнению (4.1) приводится к одномерному процессу (3. 4), (3. 2), если в k-ом шаге для некоторого $i=\overline{1,n_k}$ в качестве $e_i^k(x)$ взять $a_k\cdot K_1(x)$ функцию, где a_k произвольное постоянное. Применим к уравнению (4.1) одномерный внешний процесс проекционно-связного метода, описанный в п. 3. Функционалы $f^k(u(x))$ можно представить в общем виде:

$$f^k(u(x))=\mu_k\int_a^b u_k(t)\beta^k(t)dt, \qquad (4.2)$$

где $$1/\mu_k=\int_a^b K_2(y)u_k(y)dy\cdot\int_a^b K_1(t)\beta^k(t)dt \qquad k=1,2,...$$

Согласно (3.4) и (4.2)

$$\alpha^k=\frac{\int_a^b K_2(y)b(y)dy}{\int_a^b K_2(y)u_k(y)dy(1-\lambda\int_a^b K_1(y)K_2(y)dy)}.$$

Подставив значение α^k в (3.2) получим:

$$u_{k+1}(x)=b(x)+\lambda K_1(x)\frac{\int_a^b K_2(y)\,b(y)dy}{1-\lambda\int_a^b K_1(y)K_2(y)dy}.$$

Это и значит, что при $\forall\lambda\neq\Lambda$ и $P^0\neq E$ второе приближение внешнего процесса представляет точное решение уравнения (4.1). С геометрической точки зрения это ясно, поскольку $Ku^*(x)\in R(P_k)$ $k=1,2\ \cdots$.

Согласно проекционно-связному методу (3.3), (3.2) для уравнения (4.1), если взять функционалы в виде: $f^k(u(x))=\mu_k\int_a^b u(t)dt$, где $1/\mu_k=\int\limits_a^b u_k(t)dt$, принимает в $k+1$-ом приближении вид:

$$u_{k+1}(x)=b(x)+\lambda K_1(x)\alpha^k\int\limits_a^b K_2(y)u_k(y)dy, \tag{4.3}$$

и

$$\alpha^k=\mu_k\cdot\frac{\int\limits_a^b b(t)dt}{1-\lambda\mu_k\int\limits_a^b K_2(y)u_k(y)\,dy\cdot\int\limits_a^b K_1(t)dt} \tag{4.4}$$

(в предположении, что знаменатель не равен нулю).

Из этого следует, что в случае 1) $K_2(y)=const$, первое приближение представляет точное решение уравнения (4. 1) при $\forall\lambda\neq\Lambda$ и $u_0(x)\neq 0$, а если взять $u_0(x)=1$, то так же и в следующих случаях:

2) $b(x)=const$, $\qquad K_1(x)=const$

3) $\int\limits_a^b K_2(y)b(y)dy=0$, $\qquad \int\limits_a^b b(t)dt\int\limits_a^b K_2(y)dy=0$ (т. е. $u^*(x)=b(x)$).

2), 3) имеют место и для метода Ю. Д. Соколова [7].

Если приближенные решения представить в виде:

$$u_{k+1}(x)=b(x)+c_{k+1}K_1(x) \qquad k=0,1,\ldots,$$

где

$$c_{k+1}=\lambda\alpha^k\cdot\int\limits_a^b K_2(y)u_k(y)dy, \tag{4.5}$$

то принимая во внимание значение α^k имеем:

$$c_{k+1}=\frac{\lambda\int\limits_a^b b(t)dt}{\dfrac{1}{\mu_k\cdot\int\limits_a^b K_2(y)u_k(y)dy}-\lambda\int\limits_a^b K_1(t)dt}.$$

Откуда учитывая, что $u_k(x)=b(x)+c_kK_1(x)$, получим следующее рекуррентное соотношение для определения коэффициентов c_{k+1}:

$$c_{k+1}=\frac{\lambda\int\limits_a^b b(t)dt}{\dfrac{\int\limits_a^b b(t)dt+c_k\int\limits_a^b K_1(t)dt}{\int\limits_a^b K_2(y)b(y)dy+c_k\int\limits_a^b K_1(y)K_2(y)dy}-\lambda\int\limits_a^b K_1(t)dt}, \tag{4.6}$$

($k=1,2,\ldots$), где c_1 определяется из (4.5).

Это и позволяет, имея первое приближение из (4.4). (4.3), легко определить последующие приближения, согласно формуле (4.6).

5. Примеры

Рассмотрим следующее уравнение (из [7]):

$$u(x)=\sqrt{x}+\lambda x\int_0^1 yu(y)dy, \qquad (4.7)$$

которое для любого $\lambda\neq 3$ имеет единственное решение:

$$u^*(x)=\sqrt{x}+\frac{6\lambda}{5(3-\lambda)}\,x.$$

а) При $\lambda=1$, $u^*(x)=\sqrt{x}+3/5x$.

Как известно [7] при $\lambda=1$ метод Ю. Д. Соколова и метод последовательных приближений сходятся. Уравнение (4. 7) будем решать вышеизложенным одномерным проекционно-связным методом. Положим $u_0(x)=1$. Тогда из (4. 4), (4. 3) выполнив несложные вычисления, получим: $\alpha^0=8/9$, в первом приближении имеем

$$u_1(x)=\sqrt{x}+4/9\cdot x.$$

Тогда из (4. 6), коэффициенты при x в последующих приближениях определяются по рекуррентному соотношению: $c_{k+1}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{7+5c_k}\right)$.

В таблице даны значения коэффициентов c_k при $k=\overline{1,4}$ для вышеназванных итерационных (точных) методов:

шаг итерации	проекционно-связный метод	стац. метод Ю. Д. Соколова	метод послед. приближений
1	0,(4)	0,(4)	0,5
2	0,59437	0,6(4)	0,5(6)
3	0,59981	0,60493	0,5(8)
4	0,59999	0,60054	0,59629

Общее начальное приближение: $u_0(x)=1$.

Как видно, в данном примере приближения по проекционно-связному методу дают лучший результат, чем приближения стационарного метода Ю. Д. Соколова и метода последовательных приближений.

б) При $\lambda=6$ точное решение (4.7) равно:

$$u^*(x)=\sqrt{x}-12/5\cdot x.$$

При $\lambda=6$ метод Ю. Д. Соколова и метод последовательных приближений расходятся ($\lambda=6$ не является характеристическим значением). Применим к уравнению (4.7) одномерный проекционно-связный метод, взяв $u_0(x)=x$. Тогда приближенные решения строятся аналогичным образом, как при $\lambda=1$. Согласно вычислительной схеме (4.4), (4.3) $\alpha_0==-4/3$ и в первом приближении получим:

$$u_1(x)=\sqrt{x}-8/3\cdot x.$$

Посредством формулы (4.6), коэффициенты c_k определяются по рекуррентному соотношению:

$$c_{k+1}=-\frac{8}{3}\left(1+\frac{2}{16+5c_k}\right).$$

В первых четырех приближениях имеем:

$$c_1=-2(6), \qquad c_2=-2,(4), \qquad c_3=-2,4086, \qquad c_4=-2,40381.$$

Точность полученного приближения c_4 не превосходит $\varepsilon=0,004$.

Ա. Ա. ԲԱԲԱՋԱՆՅԱՆ, Ա. Ռ. ԱՆԴՐԱՆԻԿՅԱՆ

ՊՐՈՅԵԿՑԻՈՆ-ԿԱՊԱԿՑՎԱԾ ՄԵԹՈԴՆԵՐ ԵՐԿՐՈՐԴ ՍԵՌԻ ԳԾԱՅԻՆ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում կիրառված են պրոյեկցիոն-կապակցված մեթոդները L_2 *տարածության մեջ երկրորդ սեռի գծային ինտեգրալ հավասարումների վրա։*

Ներկայացված է մեթոդների հաշվողական սխեման, քննարկված է մասնավորապես մեկ չափի դեպքը։

Դիտարկված է մեթոդը $K(xy)=K_1(x)\cdot K_2(y)$ *տեսքի վերածվող միջուկով ինտեգրալ հավասարումների համար։*

ЛИТЕРАТУРА

1. *А. А. Бабаджанян.* Об одной итеративной схеме решения операторных уравнений. ДАН АрмССР, т. 77, №4 (1983).

2. *А. А. Бабаджанян.* Методы агрегирования. Препринт ВЦ АН АрмССР, № 82—3, Ереван, 1982.

3. *А. А. Бабаджанян.* Проекционно-связные методы решения операторных уравнений. В кн.: Труды ВЦ АН АрмССР и ЕГУ. Мат. вопр. кибернетики и вычислительной техники, т. 13 (1984).

4. *А. А. Бабаджанян.* Некоторые приложения «конструктивности» в теореме о неподвижной точке.—В кн.: Труды ВЦ АН АрмССР и ЕГУ. Математические вопр. кибернетики и вычислительной техники, т. 15.

5. *М. А. Красносельский, А. Ю. Островский, А. В. Соболев.* О сходимости метода однопараметрического агрегирования.—Автоматика и телемеханика, №9, (1978).

6. *М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко* и др. Приближенное решение операторных уравнений. М., Наука, 1969.

7. *Ю. Д. Соколов.* Метод осреднения функциональных поправок. К., Наукова Думка, 1967.

8. *А. Ю. Лучка.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. К., Наука, 1980.

9. *С. Г. Михлин.* Лекции по линейным интегральным уравнениям. М., 1959, с. 232.