К. В. ГАСПАРЯН

ОПЦИОНАЛЬНЫЕ КВАЗИМАРТИНГАЛЫ

Термин «квазимартингал» впервые был введен Фиском [1], который изучал случай с непрерывными траекториями. Далее Орей [2] рассматривал квазимартингалы с непрерывными справа, имеющими пределы слева траекториями, называя их «F-процессами». Дальнейшее изучение квазимартингалов приводится в работах Рао [3], Стрикера [4,5] и других. Несколько иной подход к определению понятия квазимартингала рассматривается в работах Фоллмера [6], Метивье и Пелломайля [7], Куссмаила [8], Стрикера [9]. Однако все перечисленные авторы предполагали, что фильтрация $F=(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$, заданная на исходном вероятностном пространстве, удовлетворяет «обычным» условиям непрерывности справа и пополненности по вероятностной мере. Автором этой статьи вводится понятие опционального квазимартингала для случая, когда на фильтрацию F не накладываются никакие ограничения.

В данной статье приводится характеризация опциональных квазимартингалов и доказывается свойство сохранения семимартингальности относительно редукции исходной фильтрации F.

1. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$—полное вероятностное пространство с произвольной фильтрацией $F=(\mathcal{F}_t)_{t\geq0}$. Положим $F_+=(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq0}$, где $\mathcal{F}_{t+}=\bigcap\limits_{s>t}\mathcal{F}_s$. Будем следовать обозначениям и понятиям, приводимым в работах [10, 11]:

$\mathcal{T}(F)$—множество F—моментов остановки (м. о.); $O(F)$ и $\mathcal{P}^s(F)$—множества F—опциональных и F—сильно предсказуемых процессов; $V(F)$—множество F—согласованных процессов ограниченной вариации; $(A_{loc}\ (F))$ $A(F)$—множество F—согласованных процессов (локально) интегрируемой вариации; $(\mathcal{M}_{loc}\ (F))$ $\mathcal{M}(F)$—множество F—опциональных (локальных) мартингалов; $(S_p(F))$ $S(F)$—множество F—опциональных (специальных) семимартингалов.

Определение 1. Процесс $X=(X_t)_{t\geq0}\in O(F)$ называется квазимартингалом $(X\in Q(F))$, если

$$\operatorname{var}(X, F)=\sup_{(S_n)} E\operatorname{var}(X, F, S_n)<\infty, \tag{1}$$

где $\operatorname{var}(X, F, S_n)=\sum\limits_{i\leq n-1}|E[X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|\mathcal{F}_{t_i}]|+|X_{t_n}|$,

$(S_n)=(0\leq t_1<t_2<\ldots<t_n<\infty)$, $n\geq1$, произвольное конечное разбиение полупрямой $R_+=[0,\infty[$, а супремум в (1) берется по всевозможным конечным разбиениям R_+.

Определение 2. Процесс $X=(X_t)_{t\geqslant 0}\in O(F)$ называется локальным квазимартингалом ($X\in Q_{loc}(F)$), если существует последовательность $(R_n, X^n)_{n\geqslant 1}$ такая, что $(R_n)_{n\geqslant 1}\subseteq\mathcal{T}(F_+)$, $R_n\uparrow\infty$ P—п. н., $(X^n)_{n\geqslant 1}\subseteq Q(F)$ и $X=X^n$ на стохастическом интервале $[0,R_n]$, $n\geqslant 1$.

Замечание 1. Пространство квазимартингалов $Q(F)$ есть линейное пространство. Имеем также $\mathcal{M}(F)\subseteq Q(F)$, т. к. $\mathrm{var}(X, F)=\sup\limits_t E|X_t|<\infty$ для любого $X\in\mathcal{M}(F)$. Кроме того, всякий супермартингал (субмартингал) $X=(X_t)_{t\geqslant 0}$ такой, что $\inf\limits_t E X_t>-\infty$ ($\sup\limits_t E X_t<\infty$) является квазимартингалом. В частности всякий неотрицательный супермартингал является квазимартингалом. Далее имеем $A(F)\subseteq Q(F)$, т. к. $\mathrm{var}(A, F)\leqslant 2E\mathrm{Var}(A)_\infty<\infty$ для любого $A\in A(F)$, где $\mathrm{Var}(A)_\infty=\int\limits_{[0,\infty[} |d A_s|$—полная вариация процесса A на R_+.

Из замечания I следует, что имеет место включение

$$S_p(F)\subseteq Q_{loc}(F). \tag{2}$$

Лемма 1. Процесс $X=(X_t)_{t\geqslant 0}\in Q(F)$ тогда и только тогда, когда существуют неотрицательные супермартингалы X' и X'' такие, что $X=X'-X''$.

Доказательство. Пусть $X=(X_t)_{t\geqslant 0}\in Q(F)$ и $(S_n)=(t=t_1<t_2<\ldots<t_n<\infty)$, $n>1$,—некоторое конечное разбиение $[t, \infty[$, $t\geqslant 0$.

Определим случайные величины (с. в.)

$$X_t^+(S_n)=E[\sum_{i\leqslant n-1}(E[X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|\mathcal{F}_{t_i}])^+ +X_{t_n}^+|\mathcal{F}_t],$$

$$X_t^-(S_n)=E[\sum_{i\leqslant n-1}(E[X_{t_{i+1}}-X_{t_i}|\mathcal{F}_{t_i}])^- +X_{t_n}^-|\mathcal{F}_t]$$

где $(\cdot)^+$ и $(\cdot)^-$—положительная и отрицательная части с. в. $(\cdot)$. Легко видеть, что с. в. $X_t^+(S_n)$ и $X_t^-(S_n)$ возрастают, когда разбиение размельчается при $n\to\infty$. Кроме того, т. к. $EX_t^+(S_n)\leqslant\mathrm{var}(X, F)$ и $EX_t^-(S_n)\leqslant\mathrm{var}(X,F)$ для любого $t\geqslant 0$ и $n>1$, то по теореме Лебега имеем $X_t^+(S_n)\xrightarrow{L^1}X_t^+$ и $X_t^-(S_n)\xrightarrow{L^1}X_t^-$ при $n\to\infty$ когда разбиение бесконечно размельчается. Нетрудно проверить, что при $s\leqslant t$ имеем $E[X_t^+|\mathcal{F}_s]\leqslant X_s^+$, $E[X_t^-|\mathcal{F}_s]\leqslant X_s^-$ и $\lim\limits_{t\to\infty} EX_t^+=\lim\limits_{t\to\infty} EX_t^-=0$, т. е. $X^+=(X_t^+)_{t\geqslant 0}$ и $X^-=(X_t^-)_{t\geqslant 0}$—неотрицательные потенциалы. Пусть теперь X^1—опциональная модификация супермартингала X^+ (см. [12]). Так как $X_t=X_t^+(S_n)-X_t^-(S_n)$ для любого разбиения (S_n), $n>1$ и $t\geqslant 0$, то ясно, что $X_t=X_t^+-X_t^-$. Положим теперь $X''=X'-X$. Очевидно, что X''—некоторая опциональная модификация процесса X^-. Обратное утверждение леммы I следует из замечания I.

Предложение I. Если $X=(X_t)_{t\geqslant 0}\in Q(F)$, то имеет место представление

$$X=M+A,$$

где $M\in M_{loc}(F)$, $A\in\mathcal{A}(F)\cap\mathcal{P}^s(F)$.

Предложение I непосредственно следует из леммы I и разложения Дуба-Мейера (см. [11]) для неотрицательных супермартингалов.

Из предложения 1 видно, что имеет место включение

$$Q(F) \subseteq S_p(F). \tag{3}$$

Наконец из включений (2) и (3) следует

Предложение 2. Имеет место равенство

$$S_p(F) = Q_{loc}(F).$$

Лемма 2 (аналог разложения Крикеберга [13]). Пусть $M \in \mathscr{M}_{loc}(F)$. Тогда существуют неотрицательные процессы M', $M'' \in \mathscr{M}_{loc}(F)$ такие, что $M = M' - M''$.

Доказательство. Пусть $M \in \mathscr{M}_{loc}(F)$ с локализующей последовательностью $(R_n, M^n)_{n\geqslant 1}$, где $(R_n)_{n\geqslant 1} \subset \mathscr{T}(F_+)$, $R_n \uparrow \infty$ P—п. н., $(M^n)_{n\geqslant 1} \subset M(F)$ и $M = M^n$ на $[0, R_n]$, $n \geqslant 1$. Пусть далее $M_t^n = E[\bar{M}^n | \mathscr{F}_t]$, где $E|\bar{M}^n| < \infty$. Тогда имеем

$$M_t^n = E[(\bar{M}^n)^+ | \mathscr{F}_t] - E[(\bar{M}^n)^- | \mathscr{F}_t].$$

Положим $(M^n)'$—опциональная модификация мартингала $E[\bar{M}^n | \mathscr{F}_t]$ (см. [14]) и $(M^n)'' = (M^n)' - M^n$. Ясно, что тогда $(M^n)''$ будет некоторой опциональной модификацией мартингала $E[(M^n)^- | \mathscr{F}_t]$. Полагая теперь $M' = (M^n)'$ и $M'' = (M^n)''$ на $[0, R_n]$, $n \geqslant 1$, получим доказательство леммы, т. к. $(M^{n+1})' = (M^n)'$ и $(M^{n+1})'' = (M^n)''$ на $[0, R_n]$.

Следствие. Имеет место включение

$$M_{loc}(F) \subseteq Q(F). \tag{4}$$

В самом деле, если $M \in M_{loc}(F)$, то согласно лемме 2 существуют неотрицательные процессы M', $M'' \in M_{loc}(F)$ такие, что $M = M' - M''$. Но т. к. неотрицательный локальный мартингал является супермартингалом, то включение (4) следует из леммы 1.

2. Рассмотрим теперь важный вопрос: сохраняется ли свойство семимартингальности относительно редукции заданной фильтрации F? Условимся далее, для того чтобы отмечать вероятностную меру P, писать $S(F, P)$, $Q(F, P)$, E_P, $E_P[\cdot | \cdot]$ и т. д.

Пусть на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ кроме фильтрации $F = (\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ задана некоторая его подфильтрация $G = (G_t)_{t\geqslant 0}$ ($G_t \subseteq \mathscr{F}_t$ для любого $t \geqslant 0$), также не удовлетворяющая никаким условиям.

Теорема I (ср. [5]). Пусть $X = (X_t)_{t\geqslant 0} \in Q$ (F) и $X \in O(G)$. Тогда имеем $X \in Q(G)$.

Доказательство. Действительно, для любого конечного разбиения $(S_n) = (0 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \infty)$, $n > 1$, имеем

$$E|E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | G_{t_i}]| = E|E[E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathscr{F}_{t_i}] | G_{t_i}]| \leqslant E|E[X_{t_{i+1}} - X_{t_i} | \mathscr{F}_{t_i}]|.$$

Таким образом $\operatorname{var}(X, G) \leqslant \operatorname{var}(X, F) < \infty$, т. е. $X \in Q(G)$.

Обозначим далее $H^2(F, P) = \{M \in M_{loc}(F, P) : E_P[M, M]_\infty < \infty\}$. Квадратическая вариация $[M, M]$ определяется по формуле

$$[M, M]_t = \langle M^c \rangle_t + \sum (\Delta M_s)^2 + \sum (\Delta^+ M_s)^2,$$

где $\langle M^c \rangle$—квадратическая характеристика непрерывной мартингальной составляющей из представления $M=M^r+M^g$, $M^r=M^c+M^d$, M^d и M^g—чисто разрывные непрерывные справа и слева локальные мартингалы, соответственно, $\Delta M_s=M_s-M_{s-}$, $\Delta^+M_s=M_{s+}-M_s$ ([10]).

Лемма 3. Пусть процесс $Y\in S(F, P)$ с представлением $Y=M+A$, где $M\in H^2(F, P)$, $\mathrm{Var}(A)_\infty<\infty$ P—п. н. Существует тогда вероятностная мера $\tilde P$ эквивалентная P ($\tilde P\sim P$) такая, что $Y\in S(F,\tilde P)$ с представлением $Y=M'+A'$, где $M'\in H^2(F, \tilde P)$, $E_{\tilde P}\,\mathrm{Var}(A')_\infty<\infty$.

Доказательство. Пусть $Z_\infty>0$—ограниченная с. в. такая, что $E_P Z_\infty=1$ и $E_P[Z_\infty \mathrm{Var}(A)_\infty]<\infty$. (В качестве Z_∞ можно взять, например, $Z_\infty=\dfrac{\xi}{E_P\,\xi}$, где $\xi=\dfrac{1}{1+\mathrm{Var}(A)_\infty}$). Пусть далее $Z=(Z_t)_{t\geqslant 0}$—опциональная модификация мартингала $E_P[Z_\infty\,|\,\mathcal{F}_t]$. Определим на пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ новую вероятностную меру $d\tilde P=Z_\infty dP$. Меры $\tilde P$ и P эквивалентны ($\tilde P\sim P$), т. к. $0<Z_\infty<\dfrac{1}{E_P\xi}$. Согласно теореме Гирсанова (см. [15]) имеем $M'=M-B\in M_{loc}(F, \tilde P)$, где $B=Z^{-1}\cdot[M^r, Z^r]+Z_+^{-1}\cdot[M^g, Z^g]$, $M=M^r+M^g$, $Z=Z^r+Z^g$—разложения мартингалов M и Z ([10]), $Z_+=(Z_{t+})_{t\geqslant 0}$. Положим теперь $A'=A+B$. Так как $M, Z\in H^2(F, P)$, то из неравенства Куниты-Ватанабе ([10]) и Коши-Буняковского, имеем

$$E_P\,\mathrm{Var}([M, Z])_\infty\leqslant(E_P[M, M]_\infty)^{\frac{1}{2}}(E_P[Z, Z]_\infty)^{\frac{1}{2}}<\infty.$$

Таким образом получим

$$E_P[Z(Z^{-1}\cdot\mathrm{Var}([M^r, Z^r])_\infty+Z_+^{-1}\cdot\mathrm{Var}([M^g, Z^g])_\infty)]=E_P\mathrm{Var}([M,Z])_\infty<$$
$$<\infty.$$

Отсюда следует, что $E_{\tilde P}\mathrm{Var}(B)_\infty<\infty$ и т. к. $E_P[Z_\infty\mathrm{Var}(A)_\infty]<\infty$, то имеем $E_{\tilde P}\mathrm{Var}(A')_\infty<\infty$.

С другой стороны имеем

$$E_{\tilde P}(\sup_t|M'_t|)\leqslant E_{\tilde P}(\sup_t|M_t|)+E_{\tilde P}\,\mathrm{Var}(B)_\infty \tag{5}$$

и т. к.

$$E_{\tilde P}(\sup_t|M_t|) = E_P(Z_\infty\ \sup_t|M_t|)\leqslant\frac{1}{E_P\xi}\cdot E_P(\sup_t|M_t|)<\infty,$$

то из (5) и неравенства Буркхольдера-Ганди следует, что $M'\in H^2(F, \tilde P)$.

Пусть теперь $X=(X_t)_{t\geqslant 0}\in S(F, P)$. Положим в дальнейшем что выполняется следующее

условие (A): $F_+^X\subseteq G\subseteq F$,

где $F_+^X=(\mathcal{F}_{t+}^X)_{t\geqslant 0}$, $\mathcal{F}_{t+}^X=\bigcap\limits_{s>t}[\sigma\{X_u, 0\leqslant u\leqslant s\}\vee N(P)]$,

$N(P)=\{A\in\mathcal{F} : P(A)=0\}$.

Обозначим через $V_t=\sum\limits_{s<t}\Delta X_s I_{|\Delta X_s|\geqslant 1}+\sum\limits_{s<t}\Delta^+X_s I_{|\Delta^+X_s|\geqslant 1}$.

Ясно, что $V=(V_t)_{t\geq 0}\in V(F)$ и т. к. процесс $V-F_+^X$—согласован, то $V\in S(F_+^X, P)$ и $V\in S(G, P)$. Положим $Y=X-V$. Так как $|\Delta Y|\leq 1$ и $|\Delta^+Y|\leq 1$, то $Y\in S_P(F, P)$ с представлением

$$Y=M+A, \tag{6}$$

где $M\in M_{loc}(F, P)$, $A\in A_{loc}(F, P)\cap \mathcal{P}^s(F)$.

Лемма 4. Пусть $M=(M_t)_{t\geq 0}\in M_{loc}(F, P)$—процесс из представления (6). Существует тогда последовательность $(R_n)_{n\geq 1}\subset \mathcal{T}(G)$ такая, что $T_n\uparrow\infty$ P—п. н. и $M^{R_n}\in H^2(F, P)$, $n\geq 1$.

Доказательство. По определению квадратической вариации процесса Y и в силу того, что $\langle X^c\rangle=\langle Y^c\rangle$, имеем

$$[Y, Y]=\langle X^c\rangle+\sum_s (\Delta X_s)^2 I_{|\Delta X_s|\leq 1}+\sum_s(\Delta^+X_s)^2 I_{|\Delta^+X_s|\leq 1}. \tag{7}$$

Однако, т. к. квадратическая характеристика $\langle X^c\rangle-F_+^X$—согласована, из (7) имеем, что процесс $[Y, Y]$ также F_+^X— согласован. Положим теперь $R_n=\inf(t:[Y, Y]_t\geq n)\wedge n$, $n\geq 1$.
Ясно, что $(R_n)_{n\geq 1}\subset\mathcal{T}(F_+^X)\subset\mathcal{T}(G)$ и т. к. $[Y, Y]$—возрастающий процесс, то $R_n\uparrow\infty$ P—п. н. Пусть теперь $(S_n)_{n\geq 1}$ и $(T_n)_{n\geq 1}$—последовательности предсказуемых и тотально недостижимых м. о., поглощающие скачки процесса $A\in A_{loc}(F, P)\cap\mathcal{P}^s(F)$ из представления (6). Замечая теперь, что скачки процесса A имеют вид ΔA_{S_n}, $\Delta^+A_{S_n}$ и $\Delta^+A_{T_n}$, имеем

$$\Delta A_{S_n}=E[\Delta Y_{S_n}|\mathcal{F}_{S_n-}],\quad \Delta^+A_{S_n}=E[\Delta^+Y_{S_n}|\mathcal{F}_{S_n}],$$
$$\Delta^+A_{T_n}=E[\Delta^+Y_{T_n}|\mathcal{F}_{T_n}]. \tag{8}$$

Таким образом из (8) получаем

$$E(\Delta A_{S_n})^2\leq E(\Delta Y_{S_n})^2,\quad E(\Delta^+A_{S_n})^2\leq E(\Delta^+Y_{S_n})^2,$$
$$E(\Delta^+A_{T_n})^2\leq E(\Delta^+Y_{T_n})^2.$$

Значит для любого $n\geq 1$ имеем

$$E[A, A]_{R_n}=E[\sum_k[(\Delta A_{S_k})^2 I_{S_k\leq R_n}+(\Delta^+A_{S_k})^2 I_{S_k<R_n}+(\Delta^+A_{T_k})^2 I_{T_k<R_n}]]\leq$$
$$\leq E[Y, Y]_{R_n}. \tag{9}$$

Далее с учетом (9) получим

$$E[M, M]_{R_n}=E[\langle X^c\rangle_{R_n}+\sum_{s\leq R_n}(\Delta Y_s-\Delta A_s)^2+\sum_{s<R_n}(\Delta^+Y_s-\Delta^+A_s)^2]\leq$$
$$\leq 4E[Y, Y]_{R_n}. \tag{10}$$

Однако, т. к. $|\Delta Y|\leq 1$, то $[Y, Y]_{R_n}\leq n+1$, и из (10) имеем $M^{R_n}\in H^2(F, P)$.

Теорема 2 (ср. [5]). Пусть $X=(X_t)_{t\geq 0}\in S(F)$ и $X\in O(G)$. Тогда имеем $X\in S(G)$.

Доказательство. Пусть $(R_n)_{n\geq 1}\subset\mathcal{T}(G)$—последовательность м. о. из лемы 4. Применим теперь лемму 3 к процессу $Y^{R_n}=M^{R_n}+A^{R_n}$, замечая, что $\mathrm{Var}(A)_{R_n}\leq\mathrm{Var}(A)_n<\infty$, т. е. $\mathrm{Var}(A^{R_n})_\infty<\infty$.

Существует, следовательн`, вероятностная мера $\tilde{P}_n$ эквивалентная P $(\tilde{P}_n \sim P)$ так, что $Y^{R_n} \in S(F, \tilde{P}_n)$ с представлением $Y^{R_n} = (M^{P_n})' + (A^{R_n})'$, где $(M^{R_n})' \in H^2(F, \tilde{P}_n)$, $E_{\tilde{P}_n} \operatorname{Var}(A^{R_n})' < \infty$. Согласно следствия из леммы 2 и замечания 1, имеем $(M^{P_n})'$, $(A^{R_n})' \in Q(F, \tilde{P}_n)$, т. е. $Y^{P_n} \in Q(F, \tilde{P}^n)$, $n \geqslant 1$. Однако, т. к. $Y \in O(G)$ и $(R_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{T}(G)$, то согласно теореме 1, процесс $Y^{R_n} \in Q(G, \tilde{P}^n)$, т. е. $Y^{P_n} \in S_p(G, \tilde{P}_n)$, $n \geq 1$. Далее, ввиду того, что $P \sim \tilde{P}_n$, имеем $Y^{P_n} \in S(G, P)$ $n \geq 1$ и, т. к. $(R_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{T}(G)$, то $Y \in S(G, P)$.

Теорема доказана.

Представлена 30.VIII:1983

Կ. Վ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

ՕՊՑԻՈՆԱԼ ԿՎԱԶԻՄԱՐՏԻՆԳԱԼՆԵՐ

Ամփոփում

Հոդվածում բնութագրվում են օպցիոնալ կվազիմարտինգալները և ապացուցվում է սեմիմարտինգալության հատկության պահպանումը տվյալ ֆիլտրացիայի ռեդուկցիայի դեպքում, եթե ֆիլտրացիան չի բավարարում ոչ մի պայմանների։

ЛИТЕРАТУРА

1 *D. L. Fisk*. Quasi-martingales. Trans. Amer. Math. Soc. 120, 1965.

2 *S. Orey*. F-processes. Proc. Fifth. Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. II, p. 1, 1967.

3 *K. M. Rao*. Quasi-martingales. Math. Scand. 24, 1969.

4 *C. Stricker*. Une caractérisation des quasimartingales. Sem. Prob. IX, Lect. Notes Math. 465, Springer, 1975.

5 *C. Stricker*. Quasimartingales, martingales locales, semimartingales et filtration naturelle. Z. Wahrsch. theorie verw. Geb. 39, 1977.

6 *H. Föllmer*. The exit measure of a supermartingale. Z. Wahrsch. theorie verw. Geb 21, 1972.

7 *M. Métivier, J. Pellaumail*. On Doléans-Föllmer's measure for quasimartingales. J. Math. 77, 1975.

8 *A. U. Kussmaul*. Stochastic integration and generalized martingales. Pitman: Londres, 1977.

9 *C. Stricker*. Measure de Follmer en thèorie de quasimartingales. Sem. Prob. IX, Lect. Notes Math. 465, Springer, 1975.

10 *Л. И. Гальчук*. Опциональные мартингалы. Матем. сб., 112(154), №4(8), 1980.

11 *Л. И. Гальчук*. Разложение опциональных супермартингалов. Матем. сб., 115 (157), № 2(6), 1981.

12 *C. Dellacherie*. Sur la régularisation des surmartingales. Sem. Prob. XI, Lect. Notes Math. 581, Springer, 1977.

13 *N. Kazamaki*. Krickeberg's decomposition for local martingales. Sem. Prob. VI. Lect. Notes. Math. 258, Springer, 1972.

14 *Л. И. Гальчук*. О существовании опциональных модификаций для мартингалов. Теория вероятн. и ее примен., т. XXII, №3, 1977.

15 *К. В. Гаспарян*. Некоторые результаты об опциональных мартингалах. Теорема Гирсанова.—В настоящем сборнике.