К. В. ГАСПАРЯН

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБ ОПЦИОНАЛЬНЫХ МАРТИНГАЛАХ. ТЕОРЕМА ГИРСАНОВА

Пусть на полном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с неубывающим семейством σ-алгебр $F=(\mathcal{F}_t)$, $t\in[0,T]$, удовлетворяющих „обычным" условиям, т. е. непрерывных справа и пополненных по вероятности P, задан винеровский процесс $(W_t, \mathcal{F}_t)$. Известная теорема И.В. Гирсанова [1] гласит, что если $E\xi_T=1$, где $\xi^t=exd\left(\int\limits_0^t \beta_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int\limits_0^t \beta_s^2 ds\right)$, а $\beta_s(w)$ — измеримая по паре переменных F — согласованная функция такая, что $\int\limits_0^T \beta_s^2\, ds<\infty p$ — п. н., то процесс $(\tilde{W}_t, \mathcal{F}_t)$, где $\tilde{W}_t=W_t-\int\limits_0^t \beta_s\, ds$, является винеровским относительно вероятностной меры $dQ=\xi_T dP$. Р. Ш. Липцером и А. Н. Ширяевым в [2] эта теорема была обобщена. Далее Е. Вонгом [3] результат был распространен для случая непрерывных локальных мартингалов, а затем Я. Ван Шуппеном и Е. Вонгом в [4] — для произвольных локальных мартингалов.

В данной работе доказывается аналог теоремы И. В. Гирсанова для опциональных локальных мартингалов, когда исходное семейство σ-алгебр F не удовлетворяет «обычным» условиям. Приводится также ряд результатов относительно опциональных мартингалов.

1. Вспомогательные обозначения и понятия

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — полное вероятностное пространство и $F=(\mathcal{F}_t)$, $t\in R_+$ — заданное на нем неубывающее семейство σ—алгебр, не удовлетворяющее „обычным" условиям. Введем в рассмотрение семейство σ—алгебр $F_+=(\mathcal{F}_{t+})$, где $\mathcal{F}_{t+}=\bigcap\limits_{s>t} \mathcal{F}_s$ $\forall t\in R_+$.

Примем следующие обозначения (см. [5]):

$O(\mathcal{P})$ — F — опциональная (предсказуемая) σ — алгебра, т. е. σ — алгебра на пространстве $\Omega\times R_+$, порожденная всеми F — согласованными, непрерывными справа (слева) и имеющими пределы слева (справа), процессами. (Условимся в дальнейшем писать $X\in O(\in\mathcal{P})$, если X — $O(\mathcal{P})$ — измеримый процесс). $\mathcal{P}^s$ — множество сильно предсказуемых процессов ($(X_t)\in\mathcal{P}^s$, если $\forall t\in R_+ \exists X_{t+}$, $(X_t)\in\mathcal{P}$ и $(X_{t+})\in O$; $\mathcal{T}(\mathcal{T}_+)$ — множество $F(F_+)$— моментов остановки (м. о.) (случайная величина (с. в.) $T\in\mathcal{T}$ ($\in\mathcal{T}_+$), если $(T\leqslant t)\in\mathcal{F}_t(\in\mathcal{F}_{t+})$ $\forall t\in R_+$); $\mathcal{T}^p$, $\mathcal{T}^i(\mathcal{T}^i_+)$—соответственно множества F—предсказуемых, $F(F_+)$—тотально недостижимых м. о. ($S\in\mathcal{T}^p$, если $S\in\mathcal{T}$ и $\exists (S_n)\subset\mathcal{T}_+$, $n\in N$, что $S_n\uparrow S P$—п. н. и $S_n<S$ P—п. н. на множестве $(S>0)\forall n\in N$; $T\in\mathcal{T}^i(\in\mathcal{T}^i_+)$, если $T\in\mathcal{T}(\in\mathcal{T}_+)$ и $P(S=T<\infty)=0$ $\forall S\in\mathcal{T}^p$); V^+—множество возрастающих процессов ($(A_t)\in V^+$, если $A_t\geqslant 0$, $\forall t\in R_+$ с. в. A_t—$\mathcal{F}_t$—согласованы, траектории $A_t(\omega)$ —не убывают); V—множество процессов ограниченной вариации ($(A_t)\in V$, если $\forall t\in R_+$ с. в. A_t - $\mathcal{F}_t$—согласованы и $|A|_t=\underset{[0,t]}{Var}\ A<\infty$ — P—п. н.); всякий процесс $A=(A_t)\in V$ представляется в виде $A=A^r+A^g$, где $A^r\in V$—регулярный процесс, $A^g_t=\sum\limits_{s<t}\Delta^+A_s$ ($\sum\limits_{s<t}\|\Delta^+A_s\|<\infty$), $\Delta^+A_s=A_{s+}-A_s$. Обозначим через V^d—множество чисто разрывных процессов из V.

Обозначим далее через $A^+(A^+_{loc})$—множество интегрируемых (локально интегрируемых) возрастающих процессов ($(A_t)\in A^+(\in A^+_{loc})$, если $EA_\infty<\infty(\exists (R_n)\subset\mathcal{T}_+$— локализующая последовательность, что $R_n\uparrow\infty P$—п. н. и $EA_{R_n+}<\infty\forall n\in N$)); $A(A_{loc})$—множество процессов интегрируемой (локально интегрируемой) вариации ($(A_t)\in A(\in A_{loc})$, если $E|A|_\infty=E\int\limits_{[0,\infty[}|dA_t|<\infty(\exists (R_n)\subset\mathcal{T}_+$—локализующая последовательность, что $R_n\uparrow\infty P$—п. н. и $AI_{[0,R_n]}\in A$, где $I_{[0,R_n]}$ — индикатор стохастического интервала $[O,R_n]=(\omega,\ t:0\leqslant t\leqslant R_n(\omega))$; $M^1(M^2)$ и $L(M^2_{loc})$— —множества опциональных (квадратично интегрируемых опциональных) мартингалов и локальных мартингалов, соответственно ($(X_t)\in M^1$ ($\in M^2$), если $(X_t)\in O$, $\exists$ с. в. X_∞—$\mathcal{F}_\infty$—измеримая с $E\|X_\infty\|<\infty(E\|X_\infty\|^2<\infty)$, $X_T I_{T<\infty}=E[X_\infty/\mathcal{F}_T]\ I_{T<\infty}$ P—п. н. $\forall T\in\mathcal{T}$, где $\mathcal{F}_\infty=\bigvee\limits_t\mathcal{F}_t$, а $\mathcal{F}_T=\sigma(A\in\mathcal{F}_\infty$: $A\cap(T\leqslant t)\in\mathcal{F}_t\forall t\in R_+)$); $X\in L(\in M^2_{loc})$, если $X\in O$, $\exists (R_n, X^{(n)})$— локализующая последовательность, где $R_n\in\mathcal{T}_+$, $X^n\in M^1$ ($\in M^2)\forall n\in N$, $R_n\uparrow\infty p$—п. н., что $XI_{[0,R_n]}=X^nI_{[0,R_n]}$ и $E\|X_{R_n+}\|<\infty\forall n\in N$), согласно [6] всякий процесс $X\in L(\in M^2_{loc})$ представляется в виде $X=X^r+X^g$, где $X^r=X^c+X^d$, X^c, X^d, $X^g\in L(M^2_{loc})$; X^c—непрерывный процесс, X^d (X^g)—непрерывный справа (слева) процесс, ортогональный любому процессу $Y\in L$, траектории которого односторонне непрерывны и не имеют общих с $X^d(X^g)$ моментов разрывов. (Напомним, что процессы X, $Y\in L$ ортогональны, если $XY\in L$).

Множество $D\in\mathcal{F}\times B(R_+)$ называется пренебрежимым, где $B(R_+)$ —σ—алгебра борелевских множеств на R_+, если $P(\pi(D))=0$, где π— проекция пространства $\Omega\times R_+$ на Ω. (Множество $\pi(D)\in\mathcal{F}$, т. к. $\mathcal{F}$—пополненная σ—алгебра (см. [7], гл. I, теорема 32)).

Последовательность $(T_n)\subset\mathcal{T}_+$, $n\in N$, поглощает скачки процесса (X_t), если $\Delta X_T=\Delta^+X_T=0\forall T\in\mathcal{T}_+$ такого, что множество $[T]\cap(\bigcup\limits_n[T_n])$ пренебрежимо, где $[T]=(\omega,t:T(\omega)=t<\infty)$— график м. о. T, $\Delta X_T=X_T-X_{T-}$.

Измеримые процессы (X_t) и (Y_t) называются неотличимыми, если множество $(\omega, t: X_t(\omega) \neq Y_t(\omega))$ пренебрежимое. (Условимся в дальнейшем единственность понимать с точностью до неотличимости).

Пусть $A \in A_{loc}$ — непрерывный справа (слева) процесс. Существует единственный (см. [5], [6]) непрерывный справа (слева) процесс $\tilde{A} \in \mathcal{P} \cap A_{loc}$ $(\in \mathcal{P}^s \cap A_{loc})$ такой, что для любого $X \in \mathcal{P}(\in O)$, $X \geqslant 0$

$$E[X \cdot A_\infty] = E[X \cdot \tilde{A}_\infty]$$

где $X \cdot A = \int\limits_{[0,\infty[} X_s dA_s (= \int\limits_{[0,\infty[} X_s dA_{s+})$, а интегралы понимаются в смысле Лебега-Стильтьеса. В частности отсюда следует, что $A - \tilde{A} \in L$. Процесс $\tilde{A}$ называется дуальной предсказуемой (сильно предсказуемой) проекцией или компенсатором процесса A. (В дальнейшем там, где необходимо отличать вероятностную меру P, будем писать $A_{loc}(P)$, $L(P)$, E_P, $E_P[\cdot|\cdot]$, $\tilde{A}^P$ и т. д.).

Если $X \in M^2_{loc}$, то существует единственный процесс $\langle X, X\rangle \in \mathcal{P}^s \cap A^+_{loc}$ такой, что $X^2 - \langle X, X\rangle \in L$ (ср. [6]). Положим

$$[X, X]_t = \langle X^c, X^c\rangle_t + \sum_{s \leqslant t} (\Delta X_s)^2 + \sum_{s<t} (\Delta^+ X_s)^2 \quad \forall t \in R^+. \qquad (1)$$

Процесс $[X, X] \in A^+_{loc}$. Если $X, Y \in M^2_{loc}$, то существует единственный процесс $\langle X, Y\rangle \in \mathcal{P}^s \cap A_{loc}$ такой, что $XY - \langle X, Y\rangle \in L$ ([6]), причем $\langle X, Y\rangle = \frac{1}{2}\left(\langle X+Y, X+Y\rangle - \langle X, X\rangle - \langle Y, Y\rangle\right)$. Положим теперь $[X, Y] = \frac{1}{2}([X+Y, X+Y] - [X, X] - [Y, Y])$.

Тогда по формуле замены переменных (см. [6]) $XY - [X, Y] \in L$. Согласно (1) имеем

$$[X, Y]_t = \langle X^c, Y^c\rangle_t + \sum_{s \leqslant t} \Delta X_s \Delta Y_s + \sum_{s<t} \Delta^+ X_s \Delta^+ Y_s, \quad t \in R_+. \qquad (2)$$

(В формулах (1) и (2) скачки ΔX_s и $\Delta^+ X_s$ существуют P—п. н. (см. [6])).

Для непрерывного справа (слева) процесса $X \in L$ определяется (см. [5]) стохастический интеграл $H \cdot X_t = \int\limits_{[0,t]} H_s \, d X_{s+} (= \int\limits_{[0,t]} H_s dX_{s+})$ от функции $H \in \mathcal{P}(\in O)$, если $(H^2 \cdot [X, X])^{\frac{1}{2}} \in A_{loc}$, обладающий свойствами: 1) $H \cdot X \in L$; 2) $\Delta H \cdot X = H \Delta X (\Delta^+ H \cdot X = H \Delta^+ X)$; 3) $[H \cdot X, Y] = H \cdot [X, Y]$ для $\forall Y \in L$.

2. Некоторые свойства опциональных мартингалов

Теорема 2. 1. Пусть $X, Y \in L$. Существует самое большее один выходящий из нуля процесс $B \in \mathcal{P}^s \cap V$ такой, что $XY - B \in L$. (Процесс B, при условии его существования, обозначается через $\langle X, Y\rangle$).

Доказательство. Положим $B^i \in \mathcal{P}^s \cap V$, $B^i_0 = 0$, такие процессы, что $XY - B^i \in L$, $i = 1,2$. Тогда процесс $B = B^1 - B^2 \in L \cap \mathcal{P}^s \cap V$.
Пусть $(R_n, B^{(n)})$ — локализующая последовательность для мартингала B.

Имеем
$$E[\Delta+B_T\, I_{T\leqslant R_n}\,|\mathcal{F}_T]=E[\Delta+B_T^{(n)}\, I_{T\leqslant R_n}\,|\,\mathcal{F}_T]=0$$
P—п. н. $\forall T\in\mathcal{T}$, $\forall n\in N$, т. к. множество $(T\leqslant R_n)\in\mathcal{F}_T$. Аналогично
$$E[\Delta B_S\, I_{S\leqslant R_n}\,|\,\mathcal{F}_{S-}]=E[\Delta B_S^{(n)}\, I_{S\leqslant R_n}\,|\mathcal{F}_{S-}]=0$$
P—п. н. $\forall S\in\mathcal{T}^p$, $\forall n\in N$, т. к. множество $(S\leqslant R_n)\in\mathcal{F}_{S-}$, где $\mathcal{F}_{S-}=\sigma(A\cap\cap(t<S):A\in\mathcal{F}_t,\ t\in R_+)\vee\mathcal{F}_0$. Отсюда следует, что
$$\Delta+B_T\, I_{T<\infty}=E[\Delta+B_T\, I_{T<\infty}\,|\,\mathcal{F}_T]=0\quad P\text{—п. н. } \forall T\in\mathcal{T},$$
$$\Delta B_S\, I_{S<\infty}=E[\Delta B_S\, I_{S<\infty}\,|\,\mathcal{F}_{S-}]=0\quad P\text{—п. н. } \forall S\in\mathcal{T}^p.$$
А это означает, что B—непрерывный процесс вне множества P—нулевой меры. Согласно [8] (гл. V. теорема 39) $B=B_0=0$. Теорема доказана.

Для процессов X, $Y\in L$ легко видеть, что процесс $[X,Y]\in V$ ([6]) и $XY-[X,Y]\in L$. Если кроме того предположить, что существует процесс $\langle X,Y\rangle$, то $[X,Y]-\langle X,Y\rangle\in L$. Отсюда, если X и Y процессы, непрерывные справа (слева) и $[X,Y]\in A_{loc}$, то $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]=\langle X,Y\rangle$.

Замечание. Если процессы X, $Y\in M^2_{loc}$—непрерывны слева, то $[X,X]^{\frac{1}{2}}+[Y,Y]^{\frac{1}{2}}\in A^+_{loc}$ ([6], лемма 7.10) и из неравенства Кунита-Ватанабе ([6], теорема 6.2) следует, что $[X,Y]\in A_{loc}$, откуда $[\widetilde{X},\widetilde{Y}]=\langle X,Y\rangle$.

Теорема 2.2. Пусть $A\in V$—непрерывный справа (слева) процесс. Имеет место эквивалентность следующих условий:

1. Существует компенсатор процесса A.
2. Процесс $A\in A_{loc}$.
3. Процесс $(\sum_{s\leqslant t}\Delta A_s)\in A_{loc}((\sum_{s<t}\Delta^+A_s)\in A_{loc})$.

Доказательство. Для непрерывного справа процесса $A\in V$ доказательство проводится также, как и при „обычных" условиях (см. например [9]). Пусть теперь $A\in V$—непрерывный слева процесс. Очевидно, что условия 2 и 3 эквивалентны. Покажем, что из 1 следует 2. Пусть существует единственный процесс $\widetilde{A}\in\mathcal{P}^s\cap A_{loc}$ такой, что $X=A-\widetilde{A}\in L$ и $(X^{(n)}, T_n)$— локализующая последовательность для мартингала X, а последовательность $(S_n)\subset\mathcal{T}$, $S_n\uparrow\infty P$—п. н. такая, что $\sup_t \widetilde{A}_{t\wedge S_n}|\leqslant n$ (см. [5], лемма 1.7). Тогда ясно, что $AI_{[0,R_n]}\in A$, где $R_n=S_n\wedge T_n$, $(R_n)\subset\mathcal{T}_+$, $R_n\uparrow\infty P$—п. н. Наконец импликация $2\Rightarrow1$ следует из [5].

Теорема 2. 3. Пусть $X,Y\in L$. Следующие условия эквивалентны:

1. Существует единственный процесс $\langle X,Y\rangle$.
2. Процесс $[X,Y]\in A_{loc}$.
3. Процессы $(\sum_{s\leqslant t}\Delta X_s\Delta Y_s)$, $(\sum_{s<t}\Delta^+x_s\Delta^+Y_s)\in A_{loc}$.

Теорема 2. 3. является непосредственным следствием теоремы 2. 2., если в качестве процесса A взять сначала процесс $[X^r, Y^r]$, а затем $[X^g, Y^g]$.

Следствие. Пусть $X \in L$. Процесс $\langle X, X\rangle \in \mathscr{P}^s \cap A^+_{loc}$ существует и единственен тогда и только тогда, когда $X \in M^2_{loc}$.

Необходимость. Допустим существует единственный процесс $\langle X, X\rangle \in \mathscr{P}^s \cap A^+_{loc}$. Согласно теореме 2. 3, процесс $\left(\sum_{s\leqslant t}(\Delta X_s)^2+\sum_{s<t}(\Delta^+ X_s)^2\right) \in A_{loc}$. Пусть $(T_n) \subset \mathscr{T}_+$, $T_n \uparrow \infty$ P—п. н. — соответствующая локализующая последовательность. Положим $S_n=\inf(t>0: |X_t| \geqslant n)$, где $S_n \in \mathscr{T}_+$ и $S_n \uparrow \infty$ P—п. н. Пусть $(X_{(n)}, V_n)$—локализующая последовательность для X. Полагая теперь $R_n=T_n \wedge S_n \wedge V_n$, имеем $|X^{(n)}_{R_n}|^2 \leqslant$ $\leqslant 2(|X^{(n)}_{R_n-}|^2+|\Delta X^{(n)}_{R_n}|^2) \leqslant 2(n^2+\sum_{s\leqslant R_n}(\Delta X_s)^2)$, т. е. $X \in M^2_{loc}$.

Достаточность. Пусть $X \in M^2_{loc}$ и $(X^{(n)}, V_n)$—локализующая последовательность для X. Существует единственный процесс $\langle X^{(n)}, X^{(n)}\rangle \in \mathscr{P}^s \cap A$ такой, что $(X^{(n)})^2-\langle X^{(n)}, X^{(n)}\rangle \in M^1$. „Склеивая" теперь процессы $\langle X^{(n)}, X^{(n)}\rangle$, получим процесс $\langle X, X\rangle \in \mathscr{P}^s \cap A^+_{loc}$ $(\langle X, X\rangle I_{[0,V_n]}=\langle X^{(n)}, X^{(n)}\rangle I_{[0,V_n]})$.

Приведем теперь одно достаточное условие существования процесса $\langle X, Y\rangle$, где $X, Y \in L$.

Напомним, что процесс (X_t) называется локально ограниченным, если существует последовательность $(T_n) \subset \mathscr{T}_+$, $T_n \uparrow \infty$ P— п. н. такая, что $X^*_{T_n}=\sup_{t\leqslant T_n}|X_t| \leqslant n \quad \forall n \in N$.

Предложение 2. 1. Пусть процесс $X \in L$ и локально ограничен. Тогда для всякого $Y \in L$ существует процесс $\langle X, Y\rangle$.

Доказательство. Пусть последовательность $(S_n) \subset \mathscr{T}_+$, $S_n \uparrow \infty$ P— п. н. такая, что $X^*_{S_n} \leqslant n \quad \forall n \in N$, а $(T_n) \subset \mathscr{T}_+$, $T_n \uparrow \infty$ P— п. н. такая, что скачки процесса Y на $[0, T_n]$ интегрируемы (см. [6], лемма 4.6) Положим $R_n=S_n \wedge T_n \wedge \inf\left(t>0: \sum_{s\leqslant t}|\Delta X_s \Delta Y_s| \geqslant n\right) \wedge \inf\left(t>0: \sum_{s<t}\right.$ $\left.\Delta^+ X_s \Delta^+ Y_s| > n\right)$. Ясно, что $R_n \in \mathscr{T}_+$ и $R_n \uparrow \infty$ P—п. н. Тогда $\sum_{s\leqslant R_n}$ $|\Delta X_s \Delta Y_s| + \sum_{s<R_n}|\Delta^+ X_s \Delta^+ Y_s| \leqslant 2n(1+|\Delta Y_{R_n}|)$. Отсюда, согласно теореме 2. 3, $\langle X, Y\rangle$ существует.

Замечание. Для $X, Y \in L$ процесс $\langle X, Y\rangle$ может существовать без того, чтобы существовали процессы $\langle X, X\rangle$ и $\langle Y, Y\rangle$. Например, пусть $X \in L$ и такой, что $X \notin M^2_{loc}$. Согласно следствию, процесс $\langle X, X\rangle$ не существует, но процесс $\langle X, Y\rangle$ существует для всякого локально ограниченного процесса $Y \in L$.

Теорема 2. 4. Пусть $X \in M^2(\in M^2_{loc})$. Имеет место единственное разложение (ср. [6], теорема 4. 1. Замечание 4. 2; [10], теорема 4)

$$X=X^c+X^d(X^d=X^{dp}+X^{di}+X^{dq}), \tag{3}$$

где $X^c, X^{dp}, X^{di}, X^{dq} \in M^2(\in M^2_{loc})$; X^c— непрерывный процесс, $X^c_0=0$, процессы $X^{dp}, X^{di}(X^{dq})$ имеют соответственно F—предсказуемые, F (F_+)—тотально недостижимые скачки и ортогональны любому мартингалу $Y \in L$, траектории которого односторонне непрерывны и не имеют общих с X^{dp}, X^{di} (X^{dq}) соответственно, моментов скачков.

Доказательство теоремы 2. 4 проводится по той же схеме, что и в [6].

$$X_t^{dp}=(X_t^{dp})^g+(X_t^{dp})^r=\sum_n [\Delta^+X_{S_n} I_{S_n<t}+\Delta X_{S_n} I_{S_n\leq t}], \quad (4)$$

$$X_t^{di}=(X_t^{di})^g+(X_t^{di})^r=\sum_n [\Delta^+ X_{T_n} I_{T_n<t}+(\Delta X_{T_n} I_{T_n\leq t}-A_t^n)], \quad (5)$$

$$X_t^{dq}=(X_t^{dq})^g=\sum_n [\Delta^+ X_{U_n} I_{U_n<t}-B_t^n]$$

где ряды сходятся в смысле L^2; $(S_n)\subset\mathcal{T}^p$, $(T_n)\subset\mathcal{T}^i$, $(U_n)\subset\mathcal{T}_+^i$ – последовательности м. о., поглощающие скачки процесса X ([6], теорема 1. 14), (A_t^n), (B_t^n) --единственные процессы из $\mathcal{P}^s\cap A(\mathcal{P}^s\cap A_{loc})$ такие, что $(\Delta X_{T_n} I_{T_n\leq t} - A_t^n)\in M^2$, $(\Delta^+X_{U_n}I_{U_n<t}-B_t^n)\in M^2$ $\forall n\in N$, более того A^n, B^n— непрерывны.

Теорема 2. 5. Для любого процесса $X\in L$ имеет место единственное представление (ср. [6], теорема 4. 10; [10], теорема 7)

$$X=X^c+X^d(X^d=X^{dp}+X^{di}+X^{dq}), \quad (6)$$

где процессы X^c, X^{dp}, X^{di}, $X^{dq}\in L$ и обладают теми же свойствами, что и в теореме 2. 4.

Доказательство. Согласно [6] (лемма 4. 9), процеес X разлагается в виде $X=\tilde{X}+\tilde{\tilde{X}}$, где $\tilde{X}\in M_{loc}^2$, $\tilde{\tilde{X}}\in L\cap A_{loc}$, $\tilde{\tilde{X}}=\tilde{P}+\tilde{Y}+\tilde{Z}+\tilde{V}+\tilde{W}$,

$$\tilde{P}_t=\sum_n[\Delta X_{S_n} I_{|\Delta X_{S_n}|>1}-\hat{p}_n] I_{S_n\leq t}, \quad \tilde{Y}_t=\sum_n[\Delta^+X_{S_n}I_{|\Delta^+X_{S_n}|>1}-\hat{y}_n] I_{S_n<t},$$

$$\tilde{Z}_t=\sum_n [\Delta^+ X_{T_n} I_{|\Delta^+X_{T_n}|>1} - \hat{z}_n] I_{T_n<t}, \quad \tilde{V}_t=\sum_n\Delta X_{T_n} I_{|\Delta X_{T_n}|>1} I_{T_n\leq t}-A_t,$$

$$\tilde{W}_t=\sum_n \Delta^+X_{U_n} I_{|\Delta^+X_{U_n}|>1} I_{U_n<t}-B_t, \quad \hat{p}_n=E[\Delta X_{S_n} I_{|\Delta X_{S_n}|>1} \mid \mathcal{F}_{S_n-}],$$

$$\hat{y}_n = E[\Delta^+X_{S_n} I_{|\Delta^+X_{S_n}|>1} \mid \mathcal{F}_{S_n}], \quad \hat{z}_n=E[\Delta^+X_{T_n} I_{|\Delta^+X_{T_n}|>1}\mid \mathcal{F}_{T_n}],$$

(A_t), (B_t)—единственные процессы из $\mathcal{P}^s\cap A_{loc}$ такие, что $\tilde{V}$, $\tilde{W}\in L$ (более того A и B—непрерывны).

Так как $\tilde{X}\in M_{loc}^2$, то в силу теоремы 2. 4, имеем $\tilde{X}=\tilde{X}^c+\tilde{X}^{dp}+\tilde{X}^{di}+\tilde{X}^{dq}$. Положим $X^c=\tilde{X}^c$, $X^{dp}=\tilde{X}^{dp}+\tilde{\tilde{X}}^{dp}$, $X^{di}=\tilde{X}^{di}+\tilde{\tilde{X}}^{di}$, $X^{dq}=\tilde{X}^{dq}+\tilde{\tilde{X}}^{dq}$, где $\tilde{\tilde{X}}^{dp}=\tilde{P}+\tilde{Y}$, $\tilde{\tilde{X}}^{di}=\tilde{Z}+\tilde{V}$, $\tilde{\tilde{X}}^{dq}=\tilde{W}$. Нетрудно видеть, что

$$\tilde{X}_t^{dp}=\sum_n \{[\Delta^+ X_{S_n} I_{|\Delta^+X_{S_n}|\leq 1}+\hat{y}_n] I_{S_n<t} +[\Delta X_{S_n} I_{|\Delta X_{S_n}|\leq 1} + \hat{p}_n] I_{S_n\leq t} \},$$

$$\tilde{X}_t^{di}=\sum_n \{[\Delta^+X_{T_n} I_{|\Delta^+X_{T_n}|\leq 1}+\hat{z}_n] I_{T_n<t}+[\Delta X_{T_n} I_{|\Delta X_{T_n}|\leq 1} I_{T_n\leq t} -A_t^n]\},$$

$$\tilde{X}_t^{dq}=\sum_n [\Delta^+X_{U_n} I_{|\Delta^+X_{U_n}|\leq 1} I_{U_n<t} -B_t^n].$$

Таким образом, окончательно имеем

$$X_t^{dp}=(X_t^{dp})^g+(X_t^{dp})^r=\sum_n [\Delta^+X_{S_n} I_{S_n<t} +\Delta X_{S_{n\leq t}} I_{S_n\leq t}], \quad I_{S_n}=t] \quad (7)$$

$$X_t^{di}=(X_t^{di})^g+(X_t^{di})^r=\sum_n \Delta^+ X_{T_n} I_{T_n<t} +\{\sum_n [\Delta X_{T_n} I_{T_n\leq t}-A_t^n]-A_t\} \quad (8)$$

$$X_t^{dq}=(X_t^{dq})^g=\sum_n [\Delta^+ X_{U_n} I_{U_n<t}-B_t^n]-B_t.$$

Обозначим через $M^2_{dp}(L_{dp})$ и $M^{2,g}_{di}(L^g_{di})$—подпространства $M^2(L)$, определяемые разложениями (4) ((7)) и (5) ((8)), соответственно. Далее обозначим через $M^2_d(L_d)$ — подпространство $M^2(L)$, определяемое разложением (3) ((6)).

Лемма 2. 1. (1). Если $(X_t)\in M^2_d$ и P—п. н. $\forall t\in R_+$ имеем

$$\sum_{s\leq t}|\Delta X_s|+\sum_{s<t}|\Delta^+X_s|<\infty, \text{ то } X\in V.$$

(2). Если $(X_t)\in M^2_{dp}\oplus M^{2,g}_{di}$ и P—п. н. $\forall t\in R_+$ имеем

$$\sum_{s\leq t}|\Delta X_s|+\sum_{s<t}|\Delta^+X_s|<\infty, \text{ то } X\in V^d \text{ и } X_t=\sum_{s\leq t}\Delta X_s+\sum_{s<t}\Delta^+X_s.$$

Доказательство. (1) Из теоремы 2. 4 следует, что

$$X_t^d=\sum_n \Delta X_{S_n} I_{S_n\leq t}+\sum_n \Delta^+X_{S_n} I_{S_n<t}+\sum_n \Delta^+ X_{T_n} I_{T_n<t}+\sum_n [\Delta X_{T_n} I_{T_n\leq t}-$$
$$-A_t^n]+\sum_n [\Delta^+X_{U_n} I_{U_n<t}-B_t^n], \tag{9}$$

где ряды сходятся в смысле $L^2\forall t\in R_+$. Полагая $R_n=\inf(t>0: \sum_{s\leq t}|\Delta X_s|\geq n$ или $\sum_{s<t}|\Delta^+X_s|\geq n)$, имеем $R_n\in\mathcal{T}_+$, $R_n\uparrow\infty$ P—п. н. Далее $\sum_{s\leq R_n}|\Delta X_s|\leq n+|\Delta X_{R_n}|$ и $\sum_{s<R_n}|\Delta^+X_s|\leq n$, но т. к. $(X_t)\in M^2_d$, то $E|\Delta X_{R_n}|^2<\infty$. Отсюда следует, что $E[\sum_{s\leq R_n}|\Delta X_s|]^2<\infty$ и $E[\sum_{s<R_n}|\Delta^+X_s|]^2<\infty$. С точностью до остановок можно считать, что $\sum_{s\leq t}|\Delta X_s|\in L^2$ и $\sum_{s<t}|\Delta X_s|\in L^2$. Тогда ряды $\sum_n[|\Delta X_{S_n}| I_{S_n\leq t}+|\Delta X_{T_n}| I_{T_n\leq t}]$ и $\sum_n [|\Delta^+ X_{S_n}| I_{S_n<t}+ |\Delta^+ X_{T_n}| I_{T_n<t}+|\Delta^+ X_{U_n}|I_{U_n<t}]$ сходятся P—п. н. и в смысле L^2 к одним и тем же пределам $\sum_{s\leq t}|\Delta X_s|$ и $\sum_{s<t}|\Delta^+ X_s|$, соответственно. Значит соответствующие ряды без модулей сходятся P—п. н. и в смысле L^2 к процессам $(\sum_{s\leq t}\Delta X_s)\in V$ и $(\sum_{s<t}\Delta^+ X_s)\in V$, соответственно. Отсюда ясно, что ряд $\sum_n(A_t^n+B_t^n)$ сходится в смысле L^2 и (9) можно записать в виде: $X_t^d=\sum_{s\leq t}\Delta X_s+\sum_{s<t}\Delta^+ X_s-\sum_n(A_t^n+B_t^n)$. Покажем теперь, что ряд $\sum_n(A_t^n+B_t^n)$ сходится также P—п. н. к элементу из V.

Напомним, что из двух процессов A и $B\in V^+$ говорят, что B мажорирует A в строгом смысле $(A\ll B)$, если процесс $(B-A)\in V^+$ ([7]). (Обозначим далее через f^+ и f^- положительную и отрицательную части функции f).

Для любого $n\in N$ имеем $\sum_{k=1}^{n}(\Delta X_{T_k})^+ I_{T_k\leq t}\ll\sum_{k=1}^{\infty}|\Delta X_{T_k}| I_{T_k\leq t}\ll$

$$\ll\sum_{s\leq t}|\Delta X_s|\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\overline{[(\Delta X_{T_k})^+\sim I_{T_k\leq t}]}\ll\overline{\sum_{s\leq t}|\Delta\sim X_s|}\ ([8]).$$

Последовательность $\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{[\cdot]}\right) < V^{+}$ — является возрастающей в строгом смысле, т. е. $E\sum_{k=1}^{n}\overline{[(\Delta X_{T_k})^{+} I_{T_k \leq t}]} \leq E\overline{[\sum_{s \leq t}|\Delta X_s|]}$. Отсюда следует, что процесс $\left(\sum_{k=1}^{\infty}\overline{[\cdot]}\right) \in V^{+}$ (см. [7], гл. VII, 9(в)). Аналогично можно показать, что и процесс $\overline{\left(\sum_{n=1}^{\infty}[(\Delta X_{T_n})^{-} I_{T_n \leq t}]\right)} \in V^{+}$. Таким образом ряд $\sum_{n} A_t^n = \sum_{n}\overline{[(\Delta X_{T_n}) I_{T_n \leq t}]}$ сходится P—п. н. к элементу из V. Также показывается, что и ряд $\sum_{n} B_t^n = \sum_{n}\overline{[(\Delta^{+} X_{U_n}) I_{U_n < t}]}$ сходится P —п. н. к элементу из V. Отсюда выводим, что $X = X^d \in V$.

2. Пусть $(S_n) \subset \mathcal{T}^p$, $(T_n) \subset \mathcal{T}^t$ — последовательности м. о., поглощающие скачки процесса $X \in M^2_{dp} \oplus M^{2,g}_{di}$. Тогда имеем

$$X_t = \sum_{n}[\Delta X_{S_n} I_{S_n \leq t} + \Delta^{+} X_{S_n} I_{S_n < t} + \Delta^{+} X_{T_n} I_{T_n < t}], \tag{10}$$

где ряд сходится в смысле L^2. По условию ряд в правой части (10) сходится P—п. н. и в смысле L^2 к одному и тому же пределу $\sum_{s \leq t}(\Delta X_s) + \sum_{s < t}(\Delta^{+} X_s) \in V^d$. Отсюда $X_t = \sum_{s \leq t}(\Delta X_s) + \sum_{s < t}(\Delta^{+} X_s)$.

Лемма 2.2. Имеют место следующие включения:

1. $L \cap V \subset L_d$.
2. Если P—п. н. $\forall t \in R_{+}$ $\sum_{s \leq t}|\Delta X_s| + \sum_{s \leq t}|\Delta^{+} X_s| < \infty$, то

а) $L_d \subset V$.

б) $L_{dp} + L^g_{di} \subset V^d$ и $\forall_t X \in L_{dp} \oplus L^g_{di} \Rightarrow X_t = \sum_{s \leq t}\Delta X_s + \sum_{s < t}\Delta^{+} X_s$.

Доказательство. 1. Пусть $X \in L \cap V$. Тогда с одной стороны $X = X^c + X^d$ (теорема 6), с другой стороны $X = \tilde{X} + \tilde{\tilde{X}}$, где $\tilde{X} \in M^2_{loc}$, $\tilde{\tilde{X}} \in M^2_{loc} \cap V$ (см. [6]). Так как $X \in V$, то $\tilde{X} \in M^2_{loc} \cap V$ и $X^c = \tilde{X}^c = 0$ (см. [8], гл. V, теорема 39), т. е. $X = X^d \in L_d$.

2. Пусть $X \in L_d$. Результат непосредственно следует из разложения $X = \tilde{X} + \tilde{\tilde{X}}$, где $\tilde{X} \in M^2_{loc}$, $\tilde{\tilde{X}} \in L \cap A_{loc}$ и леммы 2. 1.

3. Пусть $X \in L_{dp} \oplus L^g_{di}$. Имеет место разложение $X = \tilde{X} + \tilde{\tilde{X}}$, где $\tilde{X} \in M^2_{loc}$, $\tilde{\tilde{X}} \in L \cap A_{loc}$. Из леммы 2.1. следует, что $\tilde{X} \in V^d$ и $\tilde{X}_t = \sum_{s \leq t}\Delta\tilde{X}_s + \sum_{s < t}\Delta\tilde{X}_s$. С другой стороны $\tilde{\tilde{X}} \in L \subset A_{loc} \subset L_d$, т. е. $\tilde{\tilde{X}} = \tilde{\tilde{X}}^d$. По условию ряд $\sum_{n}\Delta\tilde{\tilde{X}}_{S_n} I_{S_n \leq t} + \Delta^{+}\tilde{\tilde{X}}_{S_n} I_{S_n <} + \Delta^{+}\tilde{\tilde{X}}_{T_r} I_{T_n < t}]$ $(= \tilde{\tilde{X}}^d)$, сходится P—п. н. к пределу $\sum_{s \leq t}\Delta\tilde{\tilde{X}}_s + \sum_{s < t}\Delta^{+}\tilde{\tilde{X}}_s$. Таким образом $X = X^d = \sum_{s \leq t}\Delta X_s + \sum_{s < t}\Delta^{+} X_s \in V^d$.

Предложение 2. 2. Пусть $X = (X_t) \in L_{dp} \oplus L^g_{di}$ и процесс $H = (H_t) \in$

$\in\mathscr{P}$ ($\in O$) такой, что $(H^2\cdot[X^r, X^r])^{\frac{1}{2}}\in A_{loc}((H^2\cdot[X^g, X^g])^{\frac{1}{2}}\in A_{loc})$. Если ряд $\sum_{s\leq t}|H_s||\Delta X_s|<\infty(\sum_{s<t}|H_s||\Delta^+ X_s|<\infty)$ P— п. н. $\forall t\in R_+$, то стохастический интеграл $H\cdot X_t^r(H\cdot X_t^g)$ неотличим от процесса $(\sum_{s\leq t} H_s\Delta X_s)\in\boldsymbol{V}((\sum_{s<t} H_s\Delta^+ X_s)\in\boldsymbol{V})$.

Доказательство непосредственно следует из леммы 2.2. и устойчивости пространств L_{dp} и L_{di}^g относительно стохастического интегрирования.

Напомним, что процесс X называется (опциональным) семимартингалом, если он представим в виде $X=M+A$, где $M_0=0$, $M\in L$, $A\in\boldsymbol{V}$. Это представление не обязательно единственное, однако непрерывная компонента M^c мартингала M не зависит от представления. Действительно, если $X=M'+A'$, $M_0'=0$, $M'\in L$, $A'\in\boldsymbol{V}$— другое представление, то имеем $M-M'=A'-A\in L\cap\boldsymbol{V}\subset L_d$ (лемма 2), т. е $(M-M')^c=M^c-(M')^c=0$.
Поэтому можно определить процесс

$$[X, X]_t=\langle X^c, X^c\rangle_t+\sum_{s\leq t}(\Delta X_s)^2+\sum_{s<t}(\Delta^+ X_s)^2\quad(X^c\equiv M^c).$$

Так как $[X, X]\leq 2([M, M]+[A, A])$, где $[M, M]\in\boldsymbol{V}^+$ и $[A, A]\in\boldsymbol{V}^+$ (см. [6]), то процесс $[X, X]\in\boldsymbol{V}^+$. Процесс $[X, Y]$, где $[X$, и $Y]$,—семимартингалы, определяется также как и ранее для мартингалов, т. е. $[X, Y]\in\boldsymbol{V}$.

Лемма 2. 3. (ср. [9], лемма (2—3)). Пусть $A\in\mathscr{P}^s\cap\boldsymbol{V}$ и $X\in L$. Тогда $[X, A]\in L$.

Доказательство. 1. По определению $[X, A]_t=\sum_{s\leq t}\Delta X_s\,\Delta A_s+\sum_{s<t}\Delta^+ X_s\,\Delta^+ A_s$. Процесс $(\Delta A^t)=(A_t-A_{t-})\in\mathscr{P}$, где (A_t) и A_{t-}—локально ограничены (см. [6], лемма 1.7). Отсюда следует, что стохастический интеграл $(\Delta A)\cdot(X^{dp})^r$ существует и, согласно предложению 2. 2, $(\Delta A)\cdot(X^{dp})_t^r=\sum_{s\leq t}\Delta A_s\,\Delta X_s$. (Заметим, что $([(X^{dp})^r, (X^{dp})^r]_t)^{\frac{1}{2}}=[\sum_n(\Delta X_{S_n})^2 I_{S_n\leq t}]^{\frac{1}{2}}\in A_{loc}$, что следует из того, что процесс $(\sum_n(\Delta X_{S_n})^2 I_{S_n\leq t})\in\boldsymbol{V}^+\cap\mathscr{P}$ и непрерывен справа (см. [11.]). Определим теперь $R_n=\inf(t>0:\sum_{s<t}|\Delta^+ A_s|>n)$. Ясно, что $R_n\in\mathscr{T}$ (ср. [6], лемма 4. 7), $R_n\uparrow\infty$ P—п. н. и $|\Delta^+ A_{R_n}|\leq\sum_{s<R_{n+1}}|\Delta^+ A_s|\leq n+1$, т. е. процесс $(\Delta^+ A_t)\in O$—локально ограничен. Значит существует стохастический интеграл $(\Delta^+ A)\cdot(X^{dp}+X^{di})^g$. Тогда, согласно предложению 2. 2, $(\Delta^+ A)\cdot(X^{dp}+X^{di})_t^g=\sum_{s<t}\Delta^+ A_s\,\Delta^+ X_s$. (Заметим, что $[(X^{dp}+X^{di})^g, (X^{dp}+X^{di})^g]^{\frac{1}{2}}\in A_{loc}$ (см. [6], лемма 7. 10)). Теорема доказана.

Доказательство 2. Пусть $(S_n)\subset\mathscr{T}^p$, $(T_n)\subset\mathscr{T}^i$—последовательности моментов общих скачков процессов X и A. Тогда имеем

$$[X, A]=\sum_k[\Delta X_{S_k}\,\Delta A_{S_k} I_{S_k\leq t}+\Delta^+ X_{S_k}\Delta^+ A_{S_k} I_{S_k<t}+\Delta^+ X_{T_k}\,\Delta^+ A_{T_k} I_{T_k<t}].$$

Пусть (X^n, R_n)—локализующая последовательность для $X \in L$, а $(V_n) \subseteq \mathcal{T}_+$—последовательность м. о. $V_n \uparrow \infty P$—п. н. такая, что $\forall n \in N$ скачки X на $[0, V_n]$ интегрируемы (см. [6], лемма 4. 6). Допустим далее, что $(U_n) \subseteq \mathcal{T}$—последовательность м. о. такая, что $\sup_t |\Delta A_{t \wedge U_n}| \leqslant n$, т. е. процесс (ΔA_t)—локально ограничен (см. [5], лемма 1. 7) и $(U'_n) \subseteq \mathcal{T}$—последовательность м. о. такая, что $|\Delta^+ A_{U'_n}| \leqslant n+1$ (см. доказательство 1). Положим теперь $Q_n = \inf(t > 0 : |Y_t| \geqslant n$ или $|Z_t| \geqslant n$ или $|W_t| \geqslant n) \wedge R_n \wedge V_n \wedge U_n \wedge U'_n$, где $Y_t = \sum_k \Delta X_{S_k} \Delta A_{S_k} I_{S_k < t}$, $Z_t = \sum_k \Delta^+ X_{S_k} \Delta^+ A_{S_k} I_{S_k < t}$, $W_t = \sum_k \Delta^+ X_{T_k} \Delta^+ A_{T_k} I_{T_k < t}$.

Последовательность $(Q_n) \subseteq \mathcal{T}_+$, $Q_n \uparrow \infty$ P—п. н. Легко видеть, что с. в. Y_{Q_n}, Z_{Q_n}, W_{Q_n} интегрируемы $\forall n \in N$. Возмем теперь в качестве Y^n, Z^n, W^n—опциональные модификации мартингалов $E[Y_{Q_n} | \mathcal{F}_t]$, $E[Z_{Q_n} | \mathcal{F}_t]$, $E[W_{Q_n} | \mathcal{F}_t]$, соответственно (см. [12]). Тогда для любого, $S \in \mathcal{T}_+$, $S \leqslant Q_n$ имеем $EY^n_S = EY_{Q_n} = \sum_k E[\Delta X_{S_k} \Delta A_{S_k} I_{S_k \leqslant S}] + \sum_k E[\Delta X_{S_k} \Delta A_{S_k} I_{S < S_k \leqslant Q_n}] = E Y_S$.

Поскольку множество $(S < S_k \leqslant Q_n) \in \mathcal{F}_{S_k -}$, а $E[\Delta X_{S_k} | \mathcal{F}_{S_k -}] = 0$ то вторая сумма в вышеприведенном выражении равна нулю. Таким образом $EY^n_S = EY^s_n$ $\forall S \leqslant Q_n$, т. е. $Y \in L$ с локализующей последовательностью (Y^n, Q_n). Аналогично показывается, что и Z, $W \in L$ с локализующими последовательностями (Z^n, Q_n) и (W^n, Q_n), соответственно. (Используется тот факт, что $E[\Delta^+ X_T | \mathcal{F}_T] = 0$ $\forall T \in \mathcal{T}$).

3. Аналог теоремы Гирсанова

Л. И. Гальчуком в [5] доказана следующая теорема, являющаяся аналогом соответствующей теоремы К. Долеан-Дейд [13] для опциональных семимартингалов.

Теорема 3. 1. Пусть $X = (X_t)$—семимартингал. Существует единственный семимартингал $L = (L_t)$ такой, что

$$L_t = L_0 + L_- \cdot X^r_t + L \cdot X^g_t \tag{11}$$

и процесс L задается формулой

$$L_t = L_0 \exp\{X_t - \frac{1}{2} \langle X^c, X^c \rangle_t\} \prod_{0 < s \leqslant t} (1 + \Delta X_s) e^{-\Delta X_s} \prod_{0 \leqslant s < t} (1 + \Delta^+ X_s) e^{-\Delta X_s}. \tag{12}$$

Из (11) ясно, что если $X \in L$, то $L - L_0 \in L$. Однако из условия $X \in M^1$ не следует, что $L - L_0 \in M^1$. Из (12) ясно, что для того, чтобы процесс L был P—п. н. строго положительным, необходимо и достаточно потребовать, чтобы $\Delta X_t > -1$ и $\Delta^+ X_t > -1$ P—п. н. $\forall t \in R_+$ и $L_0 > 0$.

Пусть $L \in M^1$, $L > 0$ и $EL_0 = 1$. Известно (см. [6]), что для любого $L \in M^1$ существует предел в L^1 $\lim_{t \to \infty} L_t = L_\infty$. Определим теперь вероятностную меру $dQ=L_\infty\, dP$. (Отметим, что, если $L_\infty>0$ P—п. н. то меры P и Q будут эквивалентны).

Теорема 3.2. (Аналог теоремы Гирсанова для опциональных мартингалов).

Пусть процесс $M\in L(P)$ и такой, что решение уравнения

$$L_t=L_0+L_-\cdot M_t^r+L\cdot M_t^g$$

является положительным опциональным мартингалом относительно меры P. Если $X\in L(P)$ и существует процесс $<X, M>$, то $Z_t=X_t-<X, M>_t\in L(Q)$, где $dQ=L_\infty dP$.

Лемма 3. 1. Пусть (Z_t)—$(\mathcal{F}_t)$—согласованный процесс. Процесс $(Z_t)\in M^1(Q)$ тогда и только тогда, когда $ZL\in M^1(P)$.

Доказательство. Утверждение леммы непосредственно следует из следующего очевидного равенства

$$E_Q[Z_\infty\,|\,\mathcal{F}_T]\; I_{T<\infty}=E_P[Z_\infty\; L_\infty\,|\,\mathcal{F}_T]\; L_T^{-1}\; I_{T<\infty}.$$

Замечание. Для случая локальных мартингалов достаточное условие леммы остается справедливым, но оно не будет более необходимым, т. к. из того, что последовательность $(R_n)\subset\mathcal{T}_+$, $R_n\uparrow\infty Q$—п. н., е следует, что $R_n\uparrow\infty$ P—п. н.

Доказательство теоремы 3.2. По формуле замены переменных (см. [6]) имеем

$$L_t\, Z_t=L_-\cdot Z_t^r+Z_-\cdot L_t^r+L\cdot Z_t^g+Z\cdot L_t^g+[L, Z]_t=(L_-\cdot X_t^r-L_-\cdot<X^r, M^r>)_t+(L\cdot X_t^g-L\cdot<X^g, M^g>_t)+Z_-\cdot L_t^r+Z\cdot L_t^g+(L_-\cdot[X^r, M^r]_t-L_-\cdot[<X^r, M^r>, M^r]_t)+(L\cdot[X^g, M^g]_t-L\cdot[<X^g, M^g>, M^g]_t)=L_-\cdot X_t^r+L\cdot X_t^g+L_-\cdot([X^r, M^r]-<X^r, M^r>)_t+L\cdot([X^g, M^g]-<X^g, M^g>)_t+Z_-\cdot L_t^r+Z\cdot L_t^g-(L_-\cdot[<X^r, M^r>, M^r]_t+L\cdot[<X^g, M^g>, M^g]_t).$$

Ясно, что первые шесть членов последнего выражения принадлежат $L(P)$. Таковыми являются и последние два выражения, согласно лемме 2.3, что и доказывает теорему 3.2 (см. лемму 3.1).

Замечание. В частности, если $X=W$—винеровский процесс относительно $(P, (\mathcal{F}_t))$, где $(\mathcal{F}_t)$—удовлетворяет „обычным" условиям, то $<W, W>_t=t$ и если $M=\beta\cdot W$—существует, то $Z_t=W_t-\int\limits_{[0,t]}\beta_s\, ds$— непрерывный локальный мартингал относительно $(Q, (\mathcal{F}_t))$, где $dQ=L_\infty dP$, $EL_\infty=1$ и L удовлетворяет уравнению

$$L_t=1+(L\beta)\cdot W_t.$$

Но т. к. $[Z, Z]_t=[W, W]_t=t$, то Z—винеровский процесс относительно меры Q. То есть получили теорему Гирсанова [1].

Теорема 3. 3. 1. Пусть $X\in L(P)$, тогда

$$\overline{X}=X-\left(\frac{1}{L}\cdot[X^r, L^r]+\frac{1}{L_+}\cdot[X^g, L^g]\right)\in L(Q).$$

2. Если $A\in A_{loc}(P)$, то

$$\overline{\left(\frac{1}{L}\cdot A^r\right)}^Q=\frac{1}{L_-}\cdot\overline{\left(A^r\right)}^P,\quad \overline{\left(\frac{1}{L_+}\cdot A^g\right)}^Q=\frac{1}{L}\cdot\left(\tilde{A}^g\right)^P$$

Доказательство. 1. Согласно лемме 3.1 достаточно показать, что $L_t X_t \in L(P)$. По формуле замены переменных ([6]), имеем

$$L_t X_t = \overline{X}_- \cdot L^r_t + L_- \cdot X^r_t - \left(\frac{L_-}{L}\right) \cdot [X^r, L^r]_t + \overline{X} \cdot L^g_t + L \cdot X^g_t - \left(\frac{L}{L_+}\right) \cdot$$
$$\cdot [X^g, L^g]_t + [L, \overline{X}]_t,$$

где $\left(\frac{L_-}{L}\right) \cdot [X^r, L^r]_t = [X^r, L^r]_t - [L, \frac{1}{L} \cdot [X^r, L^r]]_t$, $\left(\frac{L}{L_+}\right) \cdot [X^g, L^g]_t =$

$= [X^g, L^g]_t - [L, \frac{1}{L_+} \cdot [X^g, L^g]]_t$.

Откуда $[L, \overline{X}]_t = \left(\frac{L_-}{L}\right) \cdot [X^r, L^r]_t - \left(\frac{L}{L_+}\right) \cdot [X^g, L^g]_t = [L, X]_t -$

$- [X^r, L^r]_t - [X^g, L^g]_t = 0$.

То есть $L_t X_t = \overline{X}_- \cdot L^r_t + L_- \cdot X^r_t + \overline{X} \cdot L^g_t + L \cdot X^g_t \in L(P)$

2. а) С точностью до остановок предположим, что $E_P |\mathrm{A}^r|_\infty < \infty$.

Тогда $E_Q \left[\frac{1}{L} \cdot |\mathrm{A}^r|_\infty\right] = E_P [L_\infty \left(\frac{1}{L} \cdot |\mathrm{A}^r|\right)_\infty) = E_P \left]\frac{L}{L} \cdot |\mathrm{A}^r|_\infty\right] =$
$E_P |\mathrm{A}^r|_\infty < \infty$.

Пусть теперь $H \in \mathscr{P}$ — ограниченный процесс, тогда

$$E_Q \left[\frac{H}{L} \cdot \mathrm{A}^r_\infty\right] = E_P [L_\infty \left(\frac{H}{L} \cdot \mathrm{A}^r\right)_\infty \Big[= E_P [H \cdot \mathrm{A}^r_\infty] = E_P [H \cdot (\widetilde{\mathrm{A}^r})^p_\infty] =$$

$$= E_P \left[L_\infty \left(\frac{H}{L_-} \cdot (\widetilde{\mathrm{A}}^r)^p\right)_\infty\right] = E_Q \left[\frac{H}{L_-} \cdot (\widetilde{\mathrm{A}}^r)^p_\infty\right].$$

Отсюда $\overline{\left(\frac{1}{L} \cdot \mathrm{A}^r\right)}^Q = \frac{1}{L_-} \cdot \overline{(\mathrm{A}^r}^P$.

б) С точностью до остановок предположим, что $E_P |\mathrm{A}^g|_\infty < \infty$. Тогда $E_Q \left[\frac{1}{L_+} \cdot |\mathrm{A}^g|_\infty\right] = E_P \left[L_\infty \left(\frac{1}{L_+} \cdot |\mathrm{A}^g|\right)_\infty\right] = E_P \left[\frac{L_+}{L_+} \cdot |\mathrm{A}^g|_\infty\right] =$
$= E_P |\mathrm{A}^g|_\infty < \infty$.

Пусть $G \in O$ — ограниченный процесс, тогда

$$E_Q \left[\frac{G}{L_+} \cdot \mathrm{A}^g_\infty\right] = E_P [L_\infty \left(\frac{G}{L_+} \cdot \mathrm{A}^g\right)_\infty \Big] = E_P [G \cdot \mathrm{A}^g_\infty] = E_P [G \cdot (\widetilde{\mathrm{A}^g})^p_\infty] =$$

$$= E_P [L_\infty \left(\frac{H}{L} \cdot \overline{(\mathrm{A}^g})^P\right)_\infty] = E_Q \Big)\frac{H}{L} \cdot (\widetilde{\mathrm{A}}^g)^p_\infty \Big| .$$

Отсюда $\overline{\left(\frac{1}{L_+} \cdot \mathrm{A}^g\right)}^Q = \frac{1}{L} \cdot (\widetilde{\mathrm{A}}^g)^p$.

Теорема 3.4 (Вариант теоремы Гирсанова). Пусть процесс $X \in L(P)$ такой, что $[X, L] \in \mathrm{A}_{loc}(P)$, тогда существует процесс $\langle X, L \rangle$ (относительно P) и

$$X' = X - \left[\frac{1}{L_-} \cdot \langle X^r, L^r \rangle + \frac{1}{L} \cdot \langle X^g, L^g \rangle\right] \in L(Q).$$

Доказательство. Теорема непосредственно следует из предыдущей теоремы и из того, что

$$\overline{[X^r, L^r]}^P = \langle X^r, L^r \rangle, \quad \overline{[X^g, L^g]}^P = \langle X^g, L^g \rangle.$$

С другой стороны теорему легко можно получить из теоремы 3.2.

Представлена 30. VIII. 83 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. *И. В. Гирсанов.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно-непрерывной замены меры. Теория вероятн. и ее примен., т. V, 1960, № 3.
2. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Статистика случайных процессов. М., Наука, 1974.
3. *E. Wong.* Recent progress in stochastic process-a survey. IEEE Trans. Information Theory, IT-19, 1973, 262—275.
4. *J. H. Van Schuppen, E. Wong.* Transformation of local martingales under a change of law. Ann. Probab., 1974, v. 2, № 5, 879—888.
5. *Гальчук Л. И.* Стохастические интегралы по опциональным семимартингалам и случайным мерам. Теория вероятн. и ее примен., т. XXIX, 1984, № 1.
6. *Гальчук Л. И.* Опциональные мартингалы. Матем. сб., 112 (154), 1980, № 4(8).
7. *Мейер П. А.* Вероятность и потенциалы. М., Мир, 1973.
8. *Деллашери К.* Емкости и случайные процессы. М., Мир, 1975.
9. *C. Yoeurp.* Decompositions des ma؛tingales locales et formulés exponentielles. Lect. Notes Math., 1976, v. 511, 432—480.
10. *C. Doléans-Dade. P. A. Meyer.* Integrales stochastiques par rapport aux martingales locales. Lect. Notes Math., Springer, 1970, v. 124
11. *J. Jacod.* Multivariate point processes: predictable projection, Radon-Nikodym derivatives, representation of martingales. Z. W-theorie, 1975, v. 31, 235—25ӟ.
12. *Гальчук Л. И.* О существовании опциональных модификаций для мартингалов. Теори» вероятн. и ее примен., т. XXII, 1977, № 3.
13. *C. Doléans-Dade.* Quelques applications de la formule de changement de variables pour les semimartingales. Z. W-theorie, 1970, v. 16, 181—194.

Կ. Վ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

ՈՐՈՇ ԱՐԴՅՈՒՆՔՆԵՐ ՕՊՑԻՈՆԱԼ ՄԱՐՏԻՆԳԱԼՆԵՐԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ: ԳԻՐՍԱՆՈՎԻ ԹԵՈՐԵՄ

Ամփոփում

Հոդվածում չի ենթադրված, որ լրիվ հավանականային տարածության վրա տրված σ-հանրահաշիվների ոչ նվազող ընտանիքը բավարարում է այսպես կոչված «սովորական» պայմաններին, այսինքն՝ աջից անընդհատ է և լրացված։

Բերվում են որոշ արդյունքներ օպցիոնալ մարտինգալների վերաբերյալ և ապացուցվում է Ի. Վ. Գիրսանովի հայտնի թեորեմի նմանակը հավանականային չափի բացարձակ անընդհատ փոխարինման մասին օպցիոնալ լոկալ մարտինգալների համար։