Э. А. ДАНИЕЛЯН, С. Г. САРДАРЯН

СРЕДНИЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ВРЕМЕНА ОЖИДАНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ.

1^0. За последние годы значительное внимание уделяется анализу параметрических дисциплин в следующей модели $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$. В одноканальную систему массового обслуживания с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, $\cdots$, k-вызовов с параметрами $a_1, \cdots, a_r$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и для к-вызовов ($k=\overline{1,r}$ имеют функцию распределения (ФР) $B_k(t)$.

Опишем линейную параметрическую дисциплину в рамках модели $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$.

Прерывания обслуживания не допускаются. k-вызов $(k=\overline{1,r})$, поступая в модель в момент времени τ, в момент времени t $(t\geqslant\tau)$ приобретает приоритет $q_k(t)=a_k+b_k(t-\tau)$, где a_k и b_k—положительные константы. После завершения очередного обслуживания из присутствующих в очереди вызовов на прибор выбирается вызов с наибольшим приоритетом.

Линейная параметрическая дисциплина относится к классу консервативных дисциплин, для которых в модели $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ условие $R<1$, где $R=R_r$, $R_k=\rho_1+\cdots+\rho_k$ $(k=\overline{1,r})$, $\rho_k=a_k\beta_{k1}$, β_{k1} — средняя длительность обслуживания к-вызова, служит условием существования стационарных ФР основных характеристик дисциплины[1]. К числу основных характеристик линейной параметрической дисциплины относится w_k $(k=\overline{1,r})$— стационарное время ожидания k—вызова и, следовательно, $Mw_k=W_k$—стационарное среднее время ожидания k—вызова. Здесь M—знак математического ожидания.

В классе консервативных дисциплин без прерывания обслуживания в модели $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ имеет место следующий закон сохранения Л. Клейнрока[2] при $R<1$:

$$\sum_{k=1}^{r}\rho_k W_k=\frac{RW_0}{1-R}, \tag{1}$$

где W_0—среднее стационарное остаточное время обслуживания находящегося на приборе вызова

$$W_0=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{r} a_k\,\beta_{k2},\qquad \beta_{k2}=\int_0^{\infty} t^2\,dB_k(t)\qquad (k=\overline{1,r}).$$

В частности, закон сохранения (1) выполнен и для линейной параметрической дисциплины.

Обсуждение линейной параметрической дисциплины произведено в монографии [3], где упомянуты неудачные попытки ее анализа. К настоящему времени по линейной параметрической дисциплине в научной литературе опубликован лишь один результат в рамках модели $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ в частном случае $\alpha_1=\cdots=\alpha_r=0$ (см. [2]). Получена следующая треугольная система линейных уравнений для нахождения $W_k (k=\overline{1,r},\ b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_r>0)$:

$$W_k\left\{1-\sum_{i=1}^{k-1}\rho_i\left[1-\left(b_k/b_i\right)\right]\right\}=\frac{W_0}{1-R}+\sum_{i=k+1}^{r}\rho_i\,W_i\left[1-\left(b_i/b_k\right)\right], \qquad (2)$$

Частные случаи $b_k/b_{k+1}\to\infty$ $(k=\overline{1,r})$, или $b_1=\cdots=b_r=0$ сводятся к дисциплине относительных приоритетов.

Цель настоящей работы: найти W_1 и W_2 в модели $\vec{M}_2|\vec{G}_2|1|\infty$ при всех возможных расположениях величин α_1, α_2 и b_1, b_2.

2°. Для решения задачи достаточно предположить $R<1$, $W_0<+\infty$ (т. е. конечность первых двух моментов длительностей обслуживания вызовов)

Итак, рассматривается линейная параметрическая дисциплина в модели $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ при вышеупомянутых ограничениях.

Зафиксируем k-вызов $(k=\overline{1,r})$, момент поступления которого в модель на временной оси примем за начало координат, и введем обозначения. N_{ik} $(i,\ k=\overline{1,r})$ — среднее число i-вызовов, находящихся в очереди в момент 0 и обслуженных раньше фиксированного k-вызова. M_{ik} $(i,\ k=\overline{1,r})$ — среднее число i-вызовов, поступающих в модель после момента 0 и обслуженных раньше фиксированного k-вызова.

В классе консервативных дисциплин без прерывания обслуживания модели $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ имеют место формулы

$$W_k=W_0+\sum_{i=1}^{r}\left(N_{ik}+M_{ik}\right)\beta_{i1}\qquad (k=\overline{1,r}). \qquad (3)$$

Используя методику подсчета (2) с помощью (3), в нашем случае удается найти выражения для $N_{ik} (i,k=\overline{1,r})$:

$$a_i\frac{b_i}{b_k}W_i-a_i\frac{b_i}{b_k}\int_0^{c_{ik}}P\{w_i\geqslant t\}\,dt,\ \text{если}\ \alpha_i\leqslant\alpha_k,\ b_i<b_k,$$

$$a_i\frac{b_i}{b_k}W_i+a_i\left(1-\frac{b_i}{b_k}\right)\int_0^{d_{ik}}P\{w_i\geqslant t\}\,dt,\ \text{если}\ \alpha_i\geqslant\alpha_k,\ b_i<b_k,$$

$$a_i W_i,\ \text{если}\ \alpha_i\geqslant\alpha_k,\ b_i\geqslant b_k \qquad (4)$$

$$a_l W_l - a_l \int_0^{c_{lk}} \{w_l \geqslant t,\ w_k(t) < d_{lk} + \frac{b_l}{b_k - b_l} t\} dt, \text{ если } \alpha_l \leqslant \alpha_k,\ b_l > b_k$$

$$a_l W_l - a_l \int_0^{c_{lk}} P\{w_l \geqslant t\} dt, \text{ если } \alpha_l < \alpha_k,\ b_l = b_k.$$

Здесь обозначено

$$\partial_{lk} = \frac{\alpha_l - \alpha_k}{b_k - b_1},\quad c_{lk} = \frac{\alpha_k - \alpha_l}{b_l},$$

а $w_i(t)$ $(i=\overline{1,r})$ есть стационарное время ожидания i—вызова, отсчитываемого с учетом введения выше начала координат с момента t.

Подсчитываются также выражения для M_{lk} $(l,k=\overline{1,r})$. Вместо того, чтобы их выписывать, можно воспользоваться утверждением: при всех l и k, во всех возможных случаях выполнены равенства

$$W_l = (N_{lk}/a_l) + (M_{lk}/a_k) \text{ (не зависит от } k). \tag{5}$$

Следовательно, в системе уравнений (3), с учетом (5) и закона сохранения (1), можно избавиться от величин M_{lk} $(l,k=\overline{1,r})$.
Именно $(k=\overline{1,r})$:

$$W_k = \frac{W_0}{1-R} + \frac{1}{1-R} \sum_{l=1}^{r} \rho_l\, a_{1k}, \tag{6}$$

где $$a_{lk} = -a_{kl} = (N_{lk}/a_l) - (N_{kl}/a_k). \tag{7}$$

3°. Равенства (4), (6), (7) позволяют для величин $W_k(k=\overline{1,r})$ линейной параметрической дисциплины в модели $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$ в важных частных случаях выписать предварительные формулы.

Лемма 1. Рассматривается линейная параметрическая дисциплина модели $\vec{M}_r|\vec{G}_r|1|\infty$. Если $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_r$ и, или $b_1 > \cdots > b_r$, или $b_1 = \cdots = b_r$, то $(k=\overline{1,r})$:

$$\left\{1 - \sum_{l=1}^{k-1} \rho_l [1 - (b_k/b_l)]\right\} W \frac{W_0}{1-R} - \sum_{l=k+1}^{r} \rho_l [1 - (b_l/b_k)]\, W_l + \sum_{l=1}^{k-1} \rho_l g_{lk} - \sum_{l=k+1}^{r} \rho_l\, g_{lk}, \tag{8}$$

где $$g_{lk} = \frac{b_l}{b_k} \int_0^{c_{lk}} P\{w_l \geqslant t\} dt \qquad (l > k). \tag{9}$$

Если $\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_r$, $b_1 < \cdots < b_r$ то $(k=\overline{1,r})$:

$$\left\{1 - \sum_{l=k+1}^{r} \rho_l \left[1 - (b_k/b_l)\right]\right\} W_k = \frac{W_0}{1-R} - \sum_{l=1}^{k-1} \rho_l (1 - (b_l/b_k =)] W_l + \sum_{l=1}^{k-1} \rho_l T_{lk} - \sum_{l=k+1}^{r} \rho_l T_{kl},$$

где $T_{lk}=[1-(b_l/b_k)]\int_0^{d_{lk}} P\{w_l\geq t\}dt+\int_0^{c_{kl}} P\{w_k\geq t;\ w_l(t)<\frac{b_k}{b_l-b_k}t+$
$+d_{lk}\}dt.$

Заметим, что в случае дисциплины относительного приоритета $\alpha_1>\cdots>\alpha_r$, $b_1=\cdots=b_r=0$ и из системы уравнений (8), (9) получаем систему уравнений

$$W_k=\frac{W_0}{(1-R_{k-1}(1-R_k)}\left(\sum_{l=k+1}^{r}\rho_l W_l\right)/(1-R_{k-1})\qquad(k=\overline{1,r})\qquad(10)$$

Решением системы уравнений (10) служат

$$W_k=W_0/(1-R_{k-1})(1-R_k)\qquad(k=\overline{1,r}).$$

Далее, из утверждения леммы 1 следуют также результаты для случаев $\alpha_1\leqslant\cdots\leqslant\alpha_r$, $b_1\leqslant\cdots\leqslant b_r$ и $\alpha_1\leqslant\cdots\leqslant\alpha_r$, $b_1\geqslant\cdots\geqslant b_r$, что достигается перенумерацией потоков.

4⁰. Перейдем к рассмотрению случая двух входящих потоков, т. е. рассмотрению линейной параметрической дисциплины в модели $\vec{M}_2|\vec{G}_2|1|\infty$.

В классе консервативных дисциплин этой модели стационарная накопленная и невыполненная работа w инвариантна. В модели $M|G|1|\infty$ с интенсивностью поступления a_1 и с ФР $B_1(t)$ длительностей обслуживания вызовов при дисциплине $FIFO$ введем обозначения: $\pi(u)$ $(u\geqslant0)$ — период занятости с задержкой u; $v(u)$ — виртуальное время ожидания вызова в момент времени u.

Следующие вероятности в научной литературе хорошо изучены (см. например, [1]).

$$P\{w<x\}\quad\text{и}\quad P\{\pi(w)\geqslant u,\ \ v(u)<x\}.$$

Линейная параметрическая дисциплина в модели $\vec{M}_2|\vec{G}_2|1|\infty$ полностью задается набором параметров: $\alpha=\alpha_1-\alpha_2$, b_1 и b_2. При этом, поскольку (см. лемму 1) достаточно задавать b_1 и b_2/b_1 вместо b_1 и b_2, то, без ограничения общности полагая $b_2=1$, $b_1=b$, дисциплина характеризуется двумя параметрами α и b.

Лемма 2. Для линейной параметрической дисциплины в модели $\vec{M}_2|\vec{G}_2|1|\infty$ имеют место равенства при $\alpha\geqslant1$, $b<1$:

$$(1-b)\int_0^{\alpha/(1-b)}\{w_1\geqslant u\}\,du=\int_0^{\alpha}P\{(1-b)w\geqslant u\}du$$

$$\int_0^{\alpha}P\{w_2\geqslant u,\ w_1(u)<(1-b)^{-1}(\alpha-u)\}du=\int_0^{\alpha}P\{\pi(w)\geqslant u,\ (1-b)v(u)<\alpha-u\}du.$$

Основываясь на утверждениях лемм 1 и 2, мы в состоянии при всех возможных значениях α и b вычислить W_1 и W_2.

Теорема. Рассматривается линейная параметрическая дисциплина модели $\vec{M}_2|\vec{G}_2|1|\infty$.

1. Если $\alpha\geqslant0$, $b\geqslant1$, то

$$\{1-\rho_1(1-b^{-1})\}\, W_1=\frac{W_0}{1-R}\{1-R(1-b^{-1})-(\rho_2/b)\int_0^{\alpha} P\{\pi(w)\geqslant u\}\mathrm{du},$$

$$\{1-\rho_1(1-b^{-1})\}W_2=\frac{W_0}{1-R}+\frac{\rho_1}{b}\int_0^{\alpha} P\{\pi(w)\geqslant u\}\mathrm{du}.$$

2. Если $\alpha\geqslant 0$, $b<1$, то

$$\{1-\rho_2(1-b)\}\, W_1=\frac{W_0}{1-R}-\rho_2 T$$

$$\{1-\rho_2(1-b)\}W_2=\frac{W_0}{1-R}\{1-R(1-b)\}+\rho_1 T,$$

где

$$T=\int_0^{\alpha} P\{(1-b)w\geqslant u\}\,\mathrm{du}+\int_0^{\alpha} P\{\pi(w)\geqslant u,\ (1-b)v(u)<\alpha-u\}\mathrm{du}$$

Напоследок заметим, что случаи $\alpha<0$ приводят к результатам теоремы при перенумерации потоков.

Представлена 30.VIII. 1983 г.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Даниелян Э. А.* Математическая теория приоритетных моделей $\vec{M}|_r\vec{G}_r|1|\infty$ —М.: Докт. дисс., 1981, 257 с.

2 *Клейнрок Л.* Вычислительные системы с очередями. М., Мир, 1979, с. 600.

3 *Клейнрок Л.* Коммуникационные сети. М., Наука, 1970, с. 256.

Է. Ա. ԴԱՆԻԵԼՅԱՆ, Մ. Հ. ՍԱՐԴԱՐՅԱՆ

ՄԻՋԻՆ ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ՍՊԱՍՄԱՆ ԺԱՄԱՆԱԿՆԵՐԸ ԳԾԱՅԻՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԻԿ ՄՈԴԵԼՈՒՄ

Ամփոփում

Դիտարկվում է գծային պարամետրիկ հերթակարգը զանգվածային սպասարկման մոդելում, երբ գերադասության ֆունկցիան ունի սկզբնական ոչ-զրոյական լիցք։

Գտնված են դեպքում ստացիոնար սպասման ժամանակները։ Քննարկված է նաև ընդհանուր դեպքը։