

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ФАЗОВЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

§ 1. Введение

В теории и численных методах оптимального управления особенно сложной и вместе с тем весьма актуальной является проблема учета фазовых ограничений. В этой области основополагающими являются работы В. А. Троицкого, Р. В. Гамкредидзе, А. Я. Дубовицкого, А. А. Милютина, Р. Т. Федоренко, а также А. Е. Брайсона, В. Ф. Денгема, С. Дрейфуса и др. Благодаря этим работам и вокруг них сформировались основные направления в теории и численных методах учета фазовых ограничений.

Как правило, в последнее время путем конечно-разностной аппроксимации задачи оптимального управления с ограничениями на фазовые координаты и управление сводятся к задачам нелинейного программирования (Н. П.). Замена дифференциальных уравнений конечно-разностными и соответствующих интегралов суммами приводит к следующей стандартной постановке задачи.

Требуется минимизировать

$$(1.1) \quad J = \Delta t \sum_{i=0}^{s-1} f^0(x_i, u_i)$$

при ограничениях

$$(1.2) \quad x_{i+1} - x_i = \Delta t f_i(x_i, u_i)$$

$$d_0 = x_0 - a = 0, \quad d_s = x_s - b = 0$$

$$(1.3) \quad q_i(u_i) \leq 0, \quad i = 0, \dots, s-1$$

$$(1.4) \quad g_i(x_i) \leq 0, \quad i = 1, \dots, s-1$$

где $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$ есть n -мерный вектор состояния системы; $u_i = (u_{i1}, \dots, u_{im})$ есть m -мерный вектор управления; q — в общем случае π -мерный вектор, $\pi \leq 2m$; g — скаляр; a, b — n -мерные известные векторы; s — целое число, определяющее продолжительность управляемого процесса; Δt — шаг численного интегрирования, причем предполагается, что на интервале $(i\Delta t, (i+1)\Delta t)$ вектор управления принимает постоянное значение u_i .

Согласно существующим схемам [1], [2], задача (1.1) — (1.4) сводится к следующей задаче н. п.:

$$(1.5) \quad \min \{ f^0(z) | q_i(z) \leq 0, \quad i = 0, \dots, s-1, \\ g_i[x_i(z)] \leq 0, \quad i = 1, \dots, s-1, d_s = 0 \}$$

$$\text{где} \quad f^0(z) = \sum_{i=0}^{s-1} f^0[x_i(z), u_i], \quad z = (u_0, \dots, u_{s-1})$$

$x_i(z)$ — решение системы (1.2) в момент времени t при z с заданным начальным условием $d_0=0$.

Указанная редукция задачи (1.1)—(1.4) к задаче (1.5) является общепринятой и по существу стандартной. Однако при решении задачи (1.5) зачастую возникают затруднения, связанные с тем, что не удается одновременное выполнение $g_i[x_i(z)] \leq 0$ и условий на правом конце траектории (особенно, если ограничения $g_i[x_i(z)] \leq 0$ учитываются обычным методом штрафных функций). Преодолеть эти существенные затруднения можно с помощью ввода «тангенциальных ограничений» [3], [4], которые должны выполняться в моменты выхода фазовой траектории на границу допустимой области. Тем самым существующие схемы решения задач оптимального управления методами штрафных функций и идейно близкими к ним методами нуждаются в дополнении, чему и посвящена настоящая работа. О некоторых других недостатках метода штрафных функций применительно к задачам оптимального управления справедливо отмечено и в [5].

В принципе для задач с ограничением не высоких порядков, не штрафуя явно нарушения условий входа, обеспечить их выполнение можно путем построения траектории с очень тонкой структурой функции $K g[x(z)]$ где K —штрафной коэффициент. Эту процедуру сравнительно легко можно организовать при решении задач, в которых не все компоненты фазового вектора на правом конце зафиксированы. В этой связи заслуживает внимания работа [6], где успешно решается задача четвертого порядка с фазовым ограничением второго порядка с одной фиксированной компонентой фазового вектора на правом конце именно методом штрафных функций.

§2. Решение задачи

Требуется минимизировать (1.1) при ограничениях (1.2)—(1.4). Отметим, что все функции f_i , q_i , g_i —непрерывны и непрерывно—дифференцируемы. Пусть ограничение (1.4) имеет порядок P , причем

$$g_i^{(p)}[x_i(z)] = g_i[x_i(z)], \quad g_i^{(\tau)}[x_i(z)] = \frac{\sigma g_i^{(\tau-1)}[x_i(z)]}{\sigma x_i} - f_i[x_i(z)],$$

P определяется как первый индекс, при котором функция $g_i^{(\tau)}[x_i(z)]$ (при $\tau=p$) содержит явную зависимость от управления u_i . Для простоты последующего изложения примем, что фазовая траектория один раз выходит на $g[x(z)]=0$ и один раз сходит с нее, соответственно в моменты k и j . Так как воздействие на систему производится только посредством управляющего вектора $u_i=(u_{i1}, \dots, u_{im})$, то для того, чтобы фазовая траектория на интервале $[k, j]$ лежала на границе допустимой области, т. е. на $g_i[x_i(z)]=0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$(2.1) \quad G_k[x_k(z)] = \begin{vmatrix} g_k^{(0)}[x_k(z)] \\ \vdots \\ g_k^{(p-1)}[x_k(z)] \end{vmatrix} = 0$$

$$(2.2) \quad \Phi_{-i} = 0 \quad \text{при } i \in [k, j]$$

$$\text{где } \Phi_{\tau i} = \begin{cases} g_i^{(\tau)}[x_i(z)], & \text{при } \tau \in M = \{0, \dots, p-1\} \\ g_i^{(p)}[x_i(z), u_i], & \text{при } \tau = p \end{cases}$$

Для доказательства этого утверждения рассмотрим систему

$$y_{1(i+1)} - y_{1i} = y_{2i} \Delta t$$

$$y_{2(i+1)} - y_{2i} = y_{3i} \Delta t$$

⋮

$$y_{p(i+1)} - y_{pi} = g_i^{(p)}[x_i(z), u_i] \Delta t, \quad i \in [k, j]$$

Из этой системы следует, что если $y_{\sigma k} = 0$, $\sigma = 1, \dots, p$ и $g_i^{(p)}[x_i(z), u_i] = 0$ на $[k, j]$, тогда $y_{\sigma i} = 0$, $\sigma = 1, \dots, p$, $i \in [k, j]$, причем $y_{1i} = g_i[x_i(z)]$. Из этой же системы также следует, что если $y_{\sigma k} = 0$, $\sigma = 1, \dots, p$ и $y_{\sigma i} = 0$, $i \in [k, j]$, и $\tau \in M^0 = M \cup p$, тогда $y_{\sigma i} = 0$, $\sigma = 1, \dots, p$, $i \in [k, j]$, следовательно и $g_i[x_i(z)] = g_i^{(p)}[x_i(z), u_i] = 0$. В этом легко убедиться непосредственной подстановкой. Что и требовалось доказать.

Тогда задачу (1.1) — (1.4) можно свести к следующей задаче н. п.:

$$(2.3) \quad \min \{f^0(z) \mid q_i(z) \leq 0, \quad i=0, \dots, s-1, \quad \Phi_{\tau i} = 0, \\ i=k, \dots, j, \quad G_k[x_k(z)] = 0, \quad d_s = 0\}$$

В принципе в (2.2) и (2.3) в качестве τ можно взять любой элемент множества M^0 . Однако с точки зрения практической реализации алгоритмов решения задачи (2.3) не безразлично какое τ выбрать. В силу этого в каждом конкретном случае следует провести предварительный сравнительный анализ и выбрать τ таким образом, чтобы обеспечить наиболее эффективную вычислительную процедуру.

Систему (1.2) дополним уравнением

$$x_{(i+1)(n+1)} - x_{i(n+1)} = 1/2 \Delta t \Phi_{\tau i} E(g_i)$$

с граничными условиями

$$x_{0(n+1)} = x_{s(n+1)} = 0$$

где

$$E(g_i) = \begin{cases} 0, & \text{если } g_i[x_i(z)] \leq 0 \\ 1, & \text{если } g_i[x_i(z)] > 0 \end{cases}$$

Для учета ограничения (1.3) можно ввести дополнительную управляющую матрицу V размера $\pi \times s$, с помощью которой (1.3) заменяется равенством

$$(2.4) \quad \Omega_{ei} = q_{ei}(z) + h_{ei} = 0, \quad e=1, \dots, \pi, \quad i=0, \dots, s-1$$

$$\text{где } h_{ei} = \begin{cases} v_{ei}^2, & \text{если } q_{ei}(z) \leq 0 \\ -v_{ei}^2, & \text{если } q_{ei}(z) > 0 \end{cases}$$

q_{ei} — e -я компонента вектора q , записанная в момент i , v_{ei} — i -й элемент матрицы V .

В связи с этим $f^0(y)$ определяется так

$$f^0(y) = \sum_{i=0}^{s-1} f^0_i(z) + K \sum_{e=1}^{\pi} E(q_{ei}) v_{ei}^2$$

а задача (2.3) представляется в виде

$$(2.5) \quad \min \{f^0(y) | \Omega_i(y_i)=0, \quad i=0, \dots, s-1, \\ G_k[x_k(z)]=0, \quad \bar{d}_s=0\}$$

где

$$y=(y_0, \dots, y_{s-1}), \quad y_i=(u_i, v_i), \quad \Omega_i=(\Omega_{i1}, \dots, \Omega_{i\pi}) \\ \bar{d}_s=(d, x_{n+1}); \quad v_i-i\text{-й столбец матрицы } V;$$

$$E(q_{ei}) = \begin{cases} 0, & \text{если } q_{ei}(z) \leq 0 \\ 1, & \text{если } q_{ei}(z) > 0 \end{cases}$$

K —заведомо большое число.

Для решения задачи (2.5) можно предложить различные схемы, основанные на методах н. п. Приведем одну из них, использующую градиентный метод. Итерационная процедура организуется следующим образом:

$$(2.6) \quad y_{i(r+1)} = y_{ir} - \left(\frac{\partial f^0(y)}{\partial y_i} - A_i^T \mu_i \right) \Delta, \quad i=0, \dots, s-1,$$

где r —номер итерации; Δ —градиентный шаг; μ_i —определяется из решения линейной системы

$$(2.7) \quad A_i^T A_i \mu_i = -A_i^T \frac{\partial f^0(y)}{\partial y_i}$$

$A=[\partial \Omega / \partial y]$ —прямоугольная матрица размера $(m+\pi) \times \pi$; T —знак транспонирования;

$$(2.8) \quad \frac{\partial f^0(y)}{\partial y_i} = \left(\frac{\partial f^0(y)}{\partial u_i}, \frac{\partial f^0(y)}{\partial v_i} \right)$$

$$(2.9) \quad \frac{\partial f^0(y)}{\partial v_i} = \left(\frac{\partial f^0(y)}{\partial v_{i1}}, \dots, \frac{\partial f^0(y)}{\partial v_{i\pi}} \right)$$

$$(2.10) \quad \frac{\partial f^0(y)}{\partial v_{ie}} = \begin{cases} 0, & \text{если } q_{ie} \leq 0 \\ Kv_{ie}, & \text{если } q_{ie} > 0 \end{cases}, \quad \frac{\partial \Omega_{ie}}{\partial v_{ie}} = -2v_{ie} \text{sign} q_{ie}$$

$$(2.11) \quad \frac{\partial f^0(y)}{\partial u_i} = \frac{\partial f^0[x_i(z), u_i]}{\partial u_i} - \left(\frac{\partial f^0[x_i(z), u_i]}{\partial u_i} \right)^T \Psi_{i+1} + \mu_i \frac{\partial \Omega_{ie}}{\partial u_i} - \varphi_i$$

В (2.11) сопряженный вектор $\Psi_i=(\Psi_{i1}, \dots, \Psi_{in})$ является решением системы

$$(2.12) \quad \Psi_i - \Psi_{i+1} = \left[\left(\frac{\partial f^0[x_i(z), u_i]}{\partial x_i} \right)^T \Psi_{i+1} - \frac{\partial f^0[x_i(z), u_i]}{\partial x_i} + R_i \right] \cdot \Delta t \\ i=0, \dots, s-1$$

$$(2.13) \quad \Psi_{k-0} = \Psi_{k+0} + \beta \frac{\partial G_k}{\partial x_k}$$

$$(2.14) \quad \Psi_s = -\lambda \frac{\partial d_s}{\partial x_s}$$

где β, λ — p и $n+1$ -мерные векторы-множители, обеспечивающие вы-

полнение условий $G_k=0$ и $\bar{a}_s=0$ соответственно, а φ_i и R_i определяются так

$$\varphi_i = \begin{cases} 0, & \text{при } \tau < p \\ \Psi_{n+1} E(g_i) \Phi_{-i} \frac{\partial \Phi_{-i}}{\partial u_i} & \text{при } \tau = p, \quad R_i = \Psi_{n+1} E(g_i) \Phi_{-i} \frac{\partial \Phi_{-i}}{\partial x_i} \end{cases}$$

Ψ_{n+1} — сопряженная к x_{n+1} переменная, $\Psi_{(i+1)(n+1)} = \Psi_{i(n+1)}$, $i=0, \dots, s-1$.

Отметим, что компоненты вектора μ_i должны быть знакоопределенными, знак которых можно определить, например, с помощью известной теоремы Куна-Таккера [7]. Без этого требования итерационная процедура (2.6), как правило, закикливается.

Изложенная схема вычисления u_i предполагает, что как при начальном приближении, т. е. при u_{i0} так и в ходе итерационного процесса (2.6) условие $\Omega_i(u_i)=0$ выполняется. Определение производных $\sigma f^0(y)/\sigma v_{ie}$ и $\sigma \Omega_{ie}/\sigma v_{ie}$ в форме (2.10) позволяет весьма просто обеспечить условие $\Omega_i(u_i)=0$ и ликвидировать невязки $\Omega_i(u_i)$, связанные с накоплением ошибок, обусловленных нелинейностью задачи и конечностью градиентного шага.

Приведем еще одну схему решения задачи (2.5) без ограничения (2.4), основанную на методе штрафных функций с модификацией, предлагаемой в данной работе. Внешняя штрафная функция будет

$$I^* = \Delta t \sum_{i=0}^{s-1} \{f_i^0[x_i(z), u_i] + \omega_0 E(g_i) W_0(\Phi_{-i})\} + \omega_1 \sum_{i=1}^n W_1(d_{is}) + \omega_2 \sum_{i=1}^{p-1} W_2(g_k^{(i)}) \quad (2.15)$$

где $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ — штрафные коэффициенты;

$$W(D) > 0, \quad d^2 W(D)/dD^2 > 0, \quad \forall D \neq 0$$

$$W(0) = dW(0)/dD \geq 0$$

Здесь ограничение (2.4) не рассматривается лишь только для простоты изложения основного алгоритма учета ограничения (1.4).

В процессе итерации управления u_i и штрафные коэффициенты $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ меняются по выражениям [8]:

$$u_{i(r+1)} = u_{ir} - \alpha_{ir} \left(\frac{dI^*}{du_i} \right)_r \quad (2.16)$$

$$\omega_{0(e+1)} = \omega_{0e} + \alpha_{0e} \sum_{i=0}^{s-1} E(g_i) W_0(\Phi_{-i}) \Delta t \quad (2.17)$$

$$\omega_{1(c+1)} = \omega_{1c} + \alpha_{1c} \left[\sum_{i=1}^n W_1(d_{is}) \right]_c$$

$$\omega_{2(b+1)} = \omega_{2b} + \alpha_{2b} \left[\sum_{i=1}^{p-1} W_2(g_k^{(i)}) \right]_b$$

$\alpha_u, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ — переменные шаги градиентной схемы.

Пользуясь аналогией с (2.11), можно записать

$$\frac{dI^*}{du_i} \left[\frac{\partial F_i}{\partial u_i} - \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_i} \right)^T \psi_{i+1} \right] \Delta t, \quad i=0, \dots, s-1 \quad (2.18)$$

где ψ_i является решением системы

$$(2.19) \quad \begin{aligned} \psi_i &= \psi_{i+1} + \left[\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i} \right)^T \psi_{i+1} - \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right] \Delta t, \quad i=0, \dots, s-1 \\ \psi_s &= \frac{\partial I^k}{\partial x_s}, \quad F_i = f^0[x_i(z), u_i] + \omega_0 E(g_i) W_0(\Phi_{-i}) \\ \psi_{k-0} &= \psi_{k+0} + \omega_2 \sum_{l=0}^{p-1} \frac{\partial W_2(g_k^{(l)})}{\partial x_k} \end{aligned}$$

§3. Вычислительные схемы

Для численного решения задачи (2.5) предлагаются следующие два алгоритма.

АЛГОРИТМ 1. Этот алгоритм основан на реализации первой схемы решения задачи (2.5) методом н. п. Он состоит из двух частей:

а) Вычисление u_i при заданных β и λ .

б) Определение β и λ при известных $u_i, i=0, \dots, s-1$.

Вычислительный процесс строится в такой последовательности.

Шаг 1. Произвольно задается u_{i0} и из условия $\Omega_i(u_{i0})=0$ определяются V_{i0} , следовательно и u_{i0} .

Шаг 2. Решается система (1.2) слева направо, в результате чего находится $x_i, i=1, \dots, s$. Разумеется в общем случае условие $\bar{d}_s=0$ не будет выполняться.

Шаг 3. Справа налево решается система (2.12)—(2.14) при полученном на данном этапе расчете β и λ .

Шаг 4. Для каждого $i=0, \dots, s-1$ определяется $\partial f^0(y) \partial u_i$.

Шаг 5. Вычисляются элементы матрицы A_i и из (2.7) вычисляются $\mu_i, i=0, \dots, s-1$.

Шаг 6. По схеме (2.6) определяется новый u_i и процесс с 1 шага по 6 повторяется до стабилизации I^* . Далее производится минимизация $L = \frac{1}{2} \|B\|^2$ по $\gamma = (\beta, \lambda, \psi_{n+1})$ также по градиентной схеме

$$(3.1) \quad \gamma_{l+1} = \gamma_l - \left(\frac{\partial L}{\partial \gamma} \right)_l \Delta$$

где l —номер итерации; Δ —градиентный шаг; $\|B\|$ —норма β

$$(3.2) \quad \frac{\partial L}{\partial \gamma} = C \cdot B$$

$$C = \left[\frac{\partial \beta}{\partial \gamma} \right], \quad B = (\bar{d}_s, G_k)$$

C —квадратная матрица размера $n+p+1$; B —вектор—столбец размера $n+p+1$.

Шаг 7. Численным дифференцированием определяются элементы матрицы C .

Шаг 8. Имея B (шаги 1—6) и C по (3.1) и (3.2) вычисляется но-

вое γ и изложенный выше процесс повторяется до $L \leq \varepsilon$, где ε — заданное достаточно малое число.

В ходе итерационной процедуры по u_i и при последующем вычислении $x_i, i=1, \dots, s$, наряду с d_s , определяется и $x_{s(n+1)}$. Если $x_{s(n+1)} \neq 0$, тогда, имея x_i , нетрудно установить моменты k и j , т. е. интервал $[k, j]$, на котором $\Phi_{\tau, i} = 0$. Очевидно, что если $[k, j] = \emptyset$, тогда

$$C = \left[\frac{\partial d_s}{\partial \lambda} \right], \quad B = d_s$$

и фазовое ограничение (1.4) не является активным.

АЛГОРИТМ 2. Этот алгоритм реализует схему решения задачи (2.5) без учета ограничения (2.4), основанную на методе штрафных функций с предлагаемой в работе модификацией. Принципиальная вычислительная схема алгоритма 2 такова:

Шаг 1. Задается начальное приближение $u_i, \omega_0, \omega_1, \omega_2$.

Шаг 2. В результате решения системы (1.2) слева направо определяются $x_i, i=1, \dots, s$.

Шаг 3. Вычисляются значения сопряженных векторов $\psi_i, i=0, \dots, s-1$ из решения системы (2.19) справа налево.

Шаг 4. Определяются новые значения $u_i, i=0, \dots, s-1$, а также штрафных коэффициентов $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ по выражениям (2.16) и (2.17).

Шаг 5. Вычислительный процесс с шага 2 по 4 повторяется до стабилизации I^* с заданной точностью, где I^* вычисляется по (2.15).

Как отмечалось во введении, изложенные алгоритмы испытывались неоднократно на конкретных задачах (в основном энергетических). Ниже приводятся результаты решения одной задачи обычным методом штрафных функций и с помощью алгоритма 2. Так как выше изложены только принципиальные моменты алгоритма 2, поэтому в рассматриваемом примере он представлен более подробно.

§ 4. Экспериментальные исследования

Результаты экспериментальных исследований приводятся для следующей дискретной задачи оптимизации: требуется минимизировать функционал

$$(4.1) \quad I = \frac{\Delta t}{2} \sum_{i=0}^{s-1} u_i^2$$

по $u_i, i=0, \dots, s-1$, при ограничениях

$$(4.2) \quad x_{(i+1)1} - x_{i1} = \frac{\Delta t}{2} (x_{(i+1)2} + x_{i2})$$

$$x_{(i+1)2} - x_{i2} = \Delta t u_i, \quad i=0, \dots, s-1$$

$$x_{01} = 0, \quad x_{02} = 1$$

$$(4.3) \quad g_i(x_{i1}) = x_{i1} - l \leq 0, \quad i=1, \dots, s-1$$

$$(4.4) \quad d_{s1} = x_{s1} = 0, \quad d_{s2} = x_{s2} + 1 = 0$$

Этот пример хотя и простой, но он интересен тем, что на нем довольно четко обнаруживаются те недостатки обычного метода штрафных функций, о которых шла речь выше. Непрерывный аналог задачи (4.1) — (4.4), предложенный Брэквеллом, рассмотрен в [4].

Приведем решение задачи (4.1) — (4.4) обычным методом штрафных функций, используя вычислительные схемы н. п. Составим штрафную функцию в виде

$$V^* = \Delta t \sum_{i=0}^{s-1} \left[\frac{1}{2} u_i^2 + \omega_0 (x_{i1} - l)^2 E(g_i) \right] + \omega_1 [x_{s1}^2 + (x_{s2} + 1)^2]$$

Задача (4.1) — (4.4) решалась в следующей последовательности при $s=20$, $l=1/6$, $0,135$, $0,08$, $0,05$, $\Delta t=0,05$.

Шаг 1. задается начальное приближение $\omega_{00}=100$, $\omega_{10}=100$.

Таблица 1

1	0-5	0-7	8-11	12-13	14-19
u_{10}	-3,5	-3,0	3,0	-3,0	-3,5

Шаг 2. Слева направо решается система (4.2)

Шаг 3. Справа налево решается система

$$\psi_{i1} = \psi_{(i+1)1} - \omega_0 (x_{i1} - l) E(g_i) \Delta t$$

$$\psi_{i2} = \psi_{(i+1)2} + \psi_{(i+1)1} \cdot \Delta t$$

$$\psi_{(20)1} = -\omega_1 x_{(20)1}, \quad \psi_{(20)2} = -\omega_1 (x_{(20)2} + 1)$$

Шаг 4. По выражению

$$(4.5) \quad u_{i(r+1)} = u_{ir} - \left(\frac{dI^*}{du_i} \right)_r \alpha_{ur}$$

Определяется новое u_i и процесс с шага 2 по 4 повторяется до выполнения условия

$$|I_{r+1}^* - I_r^*| \leq \varepsilon = 0,01$$

где
$$\frac{dI^*}{du_i} = (u_i - \psi_{(i+1)2}) \Delta t$$

r — номер итерации по u_i ; α_{ur} — переменный шаг, который регулируется по ходу итерационного цикла (принималось $\alpha_{u0}=0,2$).

Шаг 5. Вычисляется новое ω_0 по формуле

$$(4.6) \quad \omega_{0(e+1)} = \omega_{0e} + \left(\frac{dI^*}{d\omega_0} \right)_e \alpha_{0e}$$

где
$$\frac{dI^*}{d\omega_0} = \Delta t \sum_{i=0}^{19} (x_{i1} - l)^2 E(g_i)$$

α_{0e} — градиентный шаг. В нулевом приближении принималось $\alpha_{00}=10000$ с последующим изменением в зависимости от процесса изменения I^* . Шаги с 2 по 5 повторяются при новом $\omega_{0(e+1)}$ до выполнения условия $|I_{e+1}^* - I_e^*| \leq \varepsilon$.

Шаг 6. Определяется новое ω_1 по выражению

$$(4.7) \quad \omega_{1(c+1)} = \omega_{1c} + \left(\frac{dI^*}{d\omega_1} \right)_c \alpha_{1c}$$

и организуется переход к шагу 2, где

$$\frac{dI^*}{d\omega_1} := (x_{(20)2} + 1)^2 + x_{(20)1}^2$$

α_{1c} —градиентный шаг, который в начальном приближении принимался равным 1000, а в ходе итерационного процесса регулировался.

Проверяется условие

$$|I_{c+1}^* - I_c^*| \begin{cases} \leq \varepsilon & \text{переход к шагу 5} \\ > \varepsilon & \text{повторяется шаг 6} \end{cases}$$

На шаге 5, если $|\omega_{0(c+1)} - \omega_{0c}| \leq \delta = 0,1$, тогда процесс завершен.

По этой вычислительной схеме и была решена задача (4.1)—(4.4) при всех указанных выше значениях l . Причем, приведенные в табл. 1 начальное приближение для u_i принималось одинаковым при всех рассмотренных l . Ниже приводятся результаты расчета только для $l=0,03$, поскольку результаты решения задачи при остальных l качественно новой информации не дают.

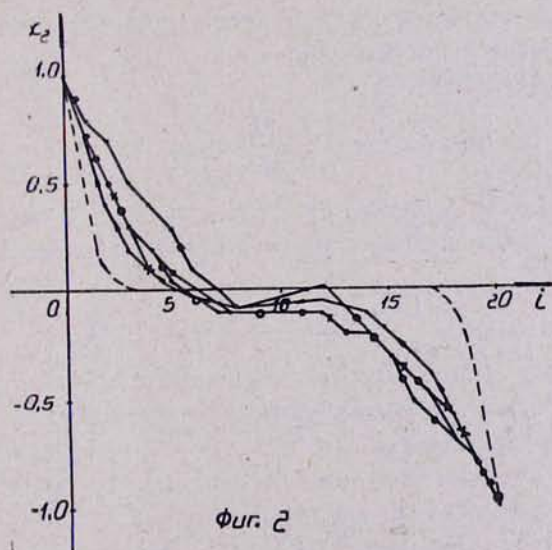
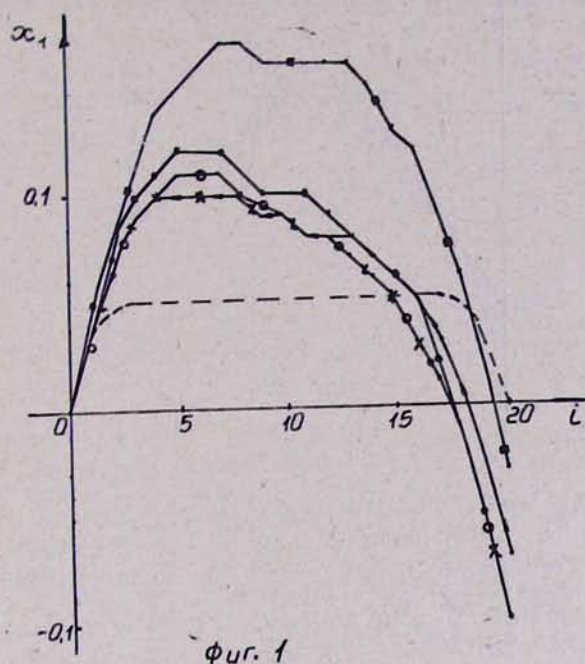
В нулевом приближении, т. е. при u_{i0} $I^*=6,723$. По схеме (4.5) значение I^* уменьшается до $I^*=3,656$. Последующее изменение I^* идет по ω_0 , согласно схеме (4.6), приводящее к увеличению I^* . Это увеличение связано с увеличением ω_0 . После каждой итерации по ω_0 работает опять схема (4.5), проделывая 8—10 итераций по u_i на начальных итерациях по ω_0 и 2—3—на последних. После прекращения работы схемы (4.6) происходит изменение ω_1 , по схеме (4.7), затем опять работают схемы (4.6) и (4.5) и т. д. В табл. 2 дан ход изменения ω_0 , ω_1 , I^* и I по итерациям

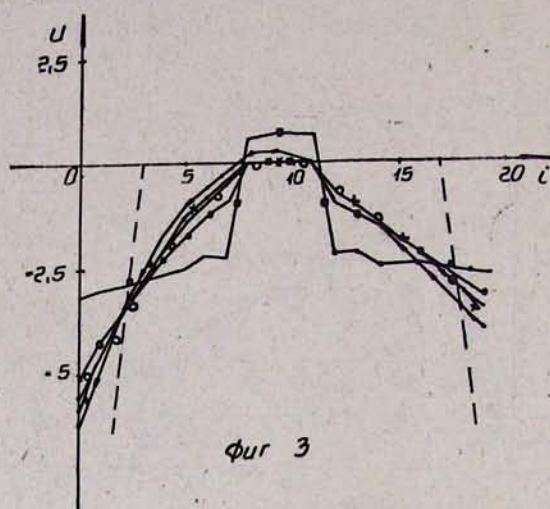
Таблица 2

Номер итерации	ω_0	ω_1	I^*	I
1	100	100	3,656	2,798
15	732,94	100	5,673	2,412
30	1067,07	100	5,883	2,883
45	1304,53	100	5,955	3,074
60	1496,85	100	6,045	3,161
79	1703,59	100	6,075	3,288
80	1703,59	112,17	6,210	3,292
85	1731,31	123,74	6,317	3,317
96	1839,77	194,05	6,556	3,575

На фиг. 1—3 приведены графики изменения фазовых траекторий x_1 , x_2 и управления u во времени в наиболее характерных итерациях по ω_0 и ω_1 и при точном решении задачи (4.1)—(4.4). Из этих графиков видно, что с увеличением ω_0 максимальное значение x_1 с 0,168 на первой итерации уменьшается до 0,104 на 80-й итерации, а правый конец x_1 , если на первой итерации был равен -0,024, то 80-й он

стал равным—0,098. Иначе говоря, с увеличением ω_0 траектория x_1 приближается к 0,05, а правый конец удаляется от нуля. Увеличение ω_1 приводит к уменьшению расхождения $x_{(20)1}$ от нуля, увеличивая нарушение ограничения (4.3). Изменение $x_{(20)2}$ связанное с увеличением ω_0 и ω_1 в ходе итерационного цикла сравнительно не существенно





фиг 3

Анализ хода изменения траекторий и управления показал (это видно и на рис. 1—3, что начиная с 60-й итерации особых улучшений в обеспечении условий (4.3) и (4.4) не наблюдается. Кроме того, начиная с 98-й итерации процесс начал расходиться и по существу лучше, чем результаты на 96-й итерации получить не удалось.

При решении этой задачи с введением ограничений (2.1) составлялась штрафная функция вида (2.15). Начальное приближение для u^i , $i=0, \dots, 19$ бралось то же, что и в предыдущем случае. По изложенной выше вычислительной схеме с необходимым дополнением был построен итерационный процесс, принимая $\tau=0$. Схема дополняется следующей процедурой.

Шаг 7. По выражению

$$(4.8) \quad \omega_{2(i+1)} = \omega_{2i} + \left(\frac{dI^*}{d\omega_2} \right)_0 \alpha_{2i}$$

вычисляется новое ω_2 и осуществляется переход к шагу 2, где α_{2i} — регулируемый в ходе итерационного процесса градиентный шаг;

$$\frac{dI^*}{d\omega_2} (x_{k1} - l)^2 + x_{k2}^2$$

Здесь k , а также j выбираются в окрестности точек, для которых имеет место $g_l(x_{l1})=0$. Пусть такими точками будут k' и j' , тогда, например, можно принимать $k=k' \pm 1$, $j=j' \pm 1$ (численное значение k' и j' определяются по результатам шага 2). На шаге 3 справа налево решается сопряженная система, причем для $i \leq k$ она должна быть решена при $\psi_{k1} = \psi_{(k+0)1} + \omega_2(x_{k1} - l)$ $\psi_{k2} = \psi_{(k+0)2} + \omega_2 x_{k2}$, согласно (2.13).

Шаг 8. Проверяется условие

$$|I_{i+1}^* - I_i^*| \begin{cases} \leq \varepsilon, & \text{переход к шагу 5} \\ > \varepsilon, & \text{переход к шагу 7} \end{cases}$$

и организуется соответствующий переход. При этом если изменение ω_0 и ω_1 меньше δ , тогда выбирается новое k и весь процесс с шага 3 по 8 повторяется до стабилизации I^* . В начальном приближении принималось $\omega_{20}=100$, $z_{20}=1000$, $k=3$.

Результаты решения задачи (4.1)—(4.4) по предлагаемому алгоритму приведены в табл. 3 и на рис. 4—6.

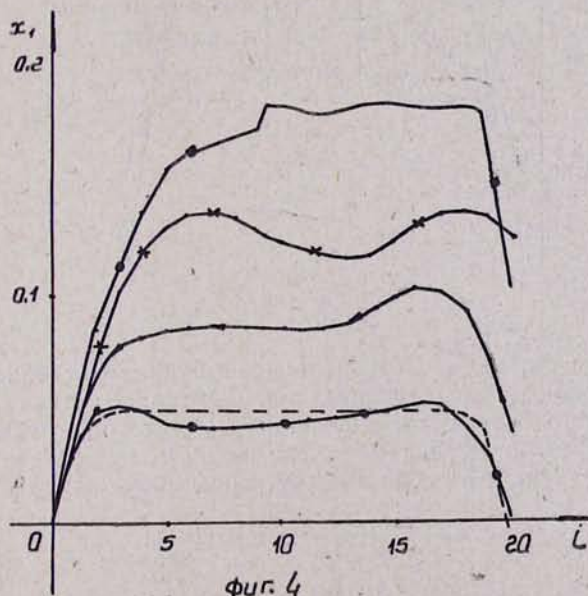
Таблица 3

Номер итерации	ω_0	ω_1	ω_2	I^*	I
10	235,34	100	100	4,637	2,517
25	356,19	186,37	167,52	5,829	3,635
32	473,27	297,14	249,26	6,317	4,928
47	787,93	383,46	354,17	9,783	9,564

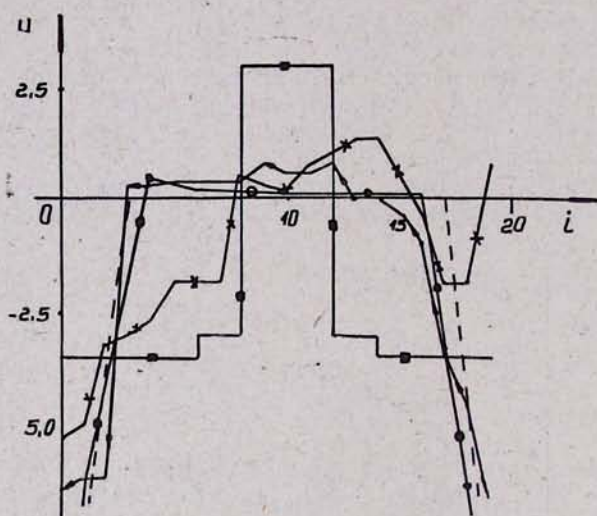
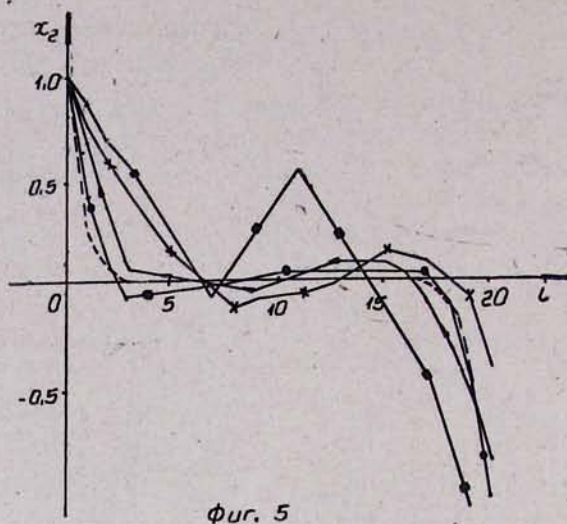
Полученные на 45—49 итерациях результаты оказались довольно близкими к точному решению (фиг. 4—6). На последующих итерациях изменение I^* становится меньше ε , что приводит к завершению процесса. В ходе итерации k изменился с 3 до 5, причем замена $k=4$ на $k=5$ особых улучшений не дала.

Эксперименты, как на рассматриваемом примере, так и на других, показали целесообразность работы алгоритма на начальных итерациях без шага 7 и при $\omega_2=0$ до завершения процесса, т. е. до шага 7, после чего алгоритм работает в целом.

В силу изложенного можно отметить, что обеспечить одновременное выполнение ограничений (1.4) $d_s=0$ при решении задачи



фиг. 4



(1.1)—(1.4) обычным методом штрафных функций, крайне затруднено. Поэтому предлагается следующая схема решения задачи. На начальных итерациях работает алгоритм обычного метода штрафных функций, предварительно определяя и моменты k и j затем алгоритм с предложенным в работе дополнением, связанным с включением (2.1).

- 1 Полак Э. Численные методы оптимизации. М., Мир., 1974.
- 2 Левитин Е. С., Полак Б. Т. Методы минимизации при наличии ограничений.—Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 5, с. 787—823.
- 3 Семенов А. С., Троицкий В. А. О задачах оптимизации с ограничениями на фазовые координаты.—Прикл. матем. и механ. 1970, т. 34, вып. 1, с. 127—131.
- 4 Брайсон А., Хо Ю-ши. Прикладная теория оптимального управления. М., Мир, 1972.
- 5 Федоренко Р. П. Приближенное решение задач оптимального управления. М., Наука, 1978.
- 6 Величенко В. В. К задаче о минимуме максимальной перегрузки. Космические исследования. 1972, т. X, вып. 5, с. 700—710.
- 7 Хедли Дж. Нелинейное и динамическое программирование. М., Мир, 1967.
- 8 Евтушенко Ю. Г. Численные методы решения задач нелинейного программирования.—Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 2, с. 307—324.

Ս. Վ. ՇԱՀԱԲԵՐԳՅԱՆ, Ա. Կ. ԱՐՐԱՀԱՄՅԱՆ

ՅԱԶԱՅԻՆ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՈՒՄՆԵՐՈՎ ՕՊՏԻՄԱԼ ԿԱՌԱՎԱՐՄԱՆ ԹՎԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴՆԵՐ

Ա. մ փ ո փ ու մ

Առաջարկում են բարձր կարգի ֆազային սահմանափակումներով օպտիմալ կառավարման խնդիրների մոտավոր լուծման մեթոդներ: Ցույց է տրված, որ սովորական տուգանային ֆունկցիաների մեթոդներով կազմված խտերացիոն պրոցեսը ընդհանուր դեպքում չի զուգամիտում:

Բերվում են օպտիմալ կառավարման խնդիրների լուծման նոր ալգորիթմներ, որոնք թույլ են տալիս լրացուցիչ պայմանների ներմուծման միջոցով ապահովել ֆազային փոփոխականների վրա դրված սահմանափակումները:

Ներկայացվում են փորձնական հետազոտությունների արդյունքները կատարված աշխատանքում առաջարկված մեթոդով և սովորական տուգանային ֆունկցիաների եղանակով: