Ю. Г. ГРИГОРЬЯН, А. М. АДОНЦ

ГРУППЫ АРИФМЕТИЧЕСКИХ АВТОМОРФИЗМОВ ГРАФОВ

Алгебраические методы являются основным аппаратом исследования различных дискретных структур, и, в частности, графов. Понятие арифметического графа [1], [5], возникшее на основе определенной интерпретации сокращенных дизъюнктивных нормальных форм [2]—[4], позволило установить геометрическую адекватность между этим формально-математическим определением и его геометрическим аналогом в трехмерном эвклидовом пространстве [6]. Были получены условия для синтеза любых геометрически жестких объектов, построены различные арифметические многогранники (графы) и приведен пример непланарного графа, являющийся несинтезируемым в описанном формализме [6].

Существование синтезируемых и несинтезируемых геометрических объектов естественным образом привела к необходимости рассматривать предложенную геометрию арифметических графов [6], как изучение инвариантов определенных групп преобразований, оставляющих граф арифметическим. Этому вопросу и посвящена данная работа.

Приведем некоторые определения.

Пусть задана подстановка p-ой степени $\alpha \in S_p$ [7]

$$\alpha=\begin{pmatrix}1 & 2 \cdot & \cdot & \cdot p \\ t_1 & t_2 \cdot & \cdot & \cdot t_p\end{pmatrix} \tag{1}$$

и некоторый помеченный (p, q) граф [8] без петель и кратных ребер

$$G(N\{1,2, \cdot \cdot \cdot, p\}, M\{(i_s, j_s)\}) \qquad s=\overline{1,q} \tag{2}$$

с множеством N из p вершин и множеством M из q ребер.

Определение 1. Перенумерованный в соответствии с подстановкой α помеченный граф вида:

$$G'(N\{\alpha(1), \alpha(2), \cdot \cdot \cdot, \alpha(p)\}, M\{(\alpha(i_s), \alpha(j_s))\}), \qquad s=\overline{1,q} \tag{3}$$

называется произведением графа $G(N,M)$ (2) на подстановку α и обозначается $G*\alpha$, т. е.

$$G*\alpha=G'(N\{\alpha(1), \alpha(2), \cdot \cdot \cdot, \alpha(p)\}, M\{(\alpha(i_s), \alpha(j_s))\}), \qquad s=\overline{1,q} \tag{4}$$

Очевидно, что операция $G*\alpha$ обладает следующими свойствами:

а. Для любых подстановок α, β

$$G*\alpha\beta=(G*\beta)*\alpha = G''N\{\alpha(\beta(i))\}, M\{(\alpha(\beta(i_s)),\alpha(\beta(j_s)))\}), \qquad s=\overline{1,q} \tag{5}$$

($\alpha\beta$—означает умножение подстановок)

в. Для любых подстановок α, β, γ

$$G*\alpha(\beta\gamma)=G*(\alpha\beta)\gamma \tag{6}$$

с. Для единичной подстановки e

$$G*\alpha e = G*e\alpha = G*e \qquad (7)$$

d. Для любых взаимно-обратных подстановок α, α^{-1}

$$G*\alpha\alpha^{-1} = G*\alpha^{-1}\alpha = G*e = G \qquad (8)$$

Для удобства изложения приведем некоторые основные понятия из [1] и [5] в несколько иной форме.

Пусть $N\{n_1, n_2, \cdot \cdot \cdot, n_p\}$ и $M\{m_1, m_2, \cdot \cdot \cdot, m_k\}$ два конечных множества целых положительных чисел,

Определение 2. Под арифметическим графом (а. г.) будем понимать пару $G(N, M)$, где N—множество вершин графа, а $(n_i\ n_j)$ $(n_i, n_j \in N)$ —его ребро, если $n_i + n_j \in M$, множество M—порождающее множество, а число $n_i + n_j = m$—вес ребра $(n_i\ n_j)$. Для отличия от обычных графов а. г. обозначим $G(N/M)$. Очевидно, что а. г. является помеченным графом, обратное неверно.

В работе [1] было показано, что понятия а.г. и графа в классическом смысле [8] эквивалентны.

В работе [5] была дана классификация арифметических графов в соответствии с которой а.г. делятся на два класса—натуральные и не натуральные графы.

Определение 3. Граф G называется натуральным арифметическим графом, если он может быть представлен а. г. вида

$$G(N\{1,2, \cdot \cdot \cdot, p\}/M), \quad \text{где} \quad M \subset \mathfrak{M}\{3,4, \cdot \cdot \cdot, 2p-1\} \qquad (9)$$

Графы, не удовлетворяющие условиям определения 3, естественно называть ненатуральными а. г..

Легко убедиться, что число всевозможных натуральных p-вершинных а. г. равно 2^{2p-3}, где $2p-3$—мощность множества $\mathfrak{M}$.

Так как натуральные а.г. составляют некоторый подкласс помеченных графов, число которых равно $2C_p^2$, то число $L(p)$ помеченных графов, не являющихся представлением а. г., выразится

$$L_{(p)} = 2^{C_p^2} - 2^{2p-3} \qquad (10)$$

Примеры натуральных и ненатуральных а.г. приведены в [5]—[7]. Несмотря на «незначительность» мощности класса натуральных а.г. к ним относятся наиболее важные в приложениях графы и их рассмотрение, на наш взгляд, представляется наиболее интересным.

Как известно, автоморфизмом графа в обычном понимании называется изоморфизм этого графа на себя и каждый автоморфизм графа есть подстановка множества вершин, сохраняющая смежность [8].

Для а. г. понятие изоморфизма и автоморфизма определяются следующим образом.

Определение 4. Натуральный а. г. $G(N/M)$ изоморфен натуральному а. г. $G'(N/M')$, если существует хотя бы одна подстановка α вида (I) такая, что

1. $G(N/M)*\alpha$ является а. г. $G(N/M_\alpha)$ (11)

2. $M_\alpha = M$

Рассмотрим некоторый натуральный а.г. G

Пусть

$$\{G_1(N/M_1),\ G_2(N/M_2), \cdot \cdot \cdot,\ G_i(N/M_i), \cdot \cdot\ G_n(N/M_n)\} \qquad (12)$$

множество всевозможных натуральных представлений графа G, причем $M_i \neq M_j$, $i \neq j$. Очевидно $G_i(N/M_i) \Leftrightarrow G_j(N/M_j)$ для любых i, j.

Определение 5. Подстановка α_s называется арифметическим автоморфизмом натурального а. г. G, если имеет место:

$$G_i(N/M_i) * \alpha_s \Rightarrow G_{i_k}(N/M_{i_k}), \quad i=\overline{1,n}, \; i_k \in \{1,2, \ldots n\} \tag{13}$$

Лемма 1. Если подстановка p-ой степени α_s является арифметическим автоморфизмом натурального а. г. G, то выражение

$$\begin{pmatrix} G_1 & G_2 & \cdot \cdot \cdot & G_n \\ G_1 * \alpha_s & G_2 * \alpha_s & \ldots & G_n * \alpha_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 & G_2 & \cdot \cdot \cdot & G_n \\ G_{i_1} & G_{i_2} & \cdot \cdot \cdot & G_{i_n} \end{pmatrix} \tag{14}$$

образует подстановку n-ой степени.

Доказательство: Допустим, что выражение (14) не образует подстановки n-ой степени, тогда существуют хотя бы два G_u, G_v $u \neq v$ такие, что

$$\begin{aligned} G_u * \alpha_s &= G_l \\ G_v * \alpha_s &= G_l \end{aligned} \tag{15}$$

Умножим правые и левые части (15) на α_s^{-1}, получим

$$\begin{aligned} (G_u * \alpha_s) * \alpha_s^{-1} &= G_l * \alpha_s^{-1} \\ (G_v * \alpha_s) * \alpha_s^{-1} &= G_l * \alpha_s^{-1} \end{aligned} \tag{16}$$

Из (16) в силу (15) и (8) имеем

$$\begin{aligned} G_l * \alpha_s^{-1} &= G_u * (\alpha_s^{-1} \alpha_s) = G_u * e = G_u \\ G_l * \alpha_s^{-1} &= G_v * (\alpha_s^{-1} \alpha_s) = G_v * e = G_v \end{aligned} \tag{17}$$

Из (17) следует $G_u = G_v = G_l * \alpha_s^{-1}$, а это противоречит тому, что $u \neq v$. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Лемма 2. Если α и β являются арифметическими автоморфизмами натурального а. г. G, то $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ также являются арифметическими автоморфизмами этого графа.

Доказательство: Так как α, β—являются арифметическими автоморфизмами графа G, то в силу определения 5, имеем:

$$G_i * \alpha = G_{i_k}, \quad i=\overline{1,n}, \quad i_k \in \{1,2, \cdot \cdot \cdot, n\} \tag{18}$$

$$G_i * \beta = G_{j_k}, \quad i=\overline{1,n}, \quad j_k \in \{1, 2, \cdot \cdot \cdot, n\} \tag{19}$$

Умножим в смысле определения I обе части (18) на β; а (19) на α, получим

$$(G_i * \alpha) * \beta = G_{i_k} * \beta, \quad i=\overline{1,n}, \; i_k \in \{1, 2, \cdot \cdot, n\} \tag{20}$$

$$(G_i * \beta) * \alpha = G_{j_k} * \alpha, \quad i=\overline{1,n}, \; j_k \in \{1,2, \cdot \cdot, n\} \tag{21}$$

В силу леммы I правые части (20), (21) удовлетворяют условию арифметического автоморфизма т. е.

$$(G_i * 2) * \beta = G_{i_k} * \beta, \quad i=\overline{1,n}, \quad i_k=\overline{i_1, i_n} \tag{22}$$

$$(G_i * \beta) * \alpha = G_{j_k} * \alpha, \quad i=\overline{1,n}, \quad j_k=\overline{j_1, j_n} \tag{23}$$

Поэтому и левые части (22), (23) также удовлетворяют этому условию. Согласно (5) выражения (22), (23) перепишутся

$$G_i * \beta\alpha = G_{i_k} * \beta, \quad i=\overline{1,n}, \quad i_k=\overline{i_1 \, i_n} \tag{24}$$

$$G_i * \alpha \beta = G_{j_k} * \alpha, \quad \overline{i}=1,n, \quad j_k = \overline{j_1, j^n} \tag{25}$$

Ввиду определения 5 соотношения (24), (25) удовлетворяют требованию арифметического автоморфизма натурального а. г., что и доказывает лемму 2, обеспечивающую выполнение условия замкнутости для арифметических автоморфизмов.

Из лемм 1,2 следует основная

Теорема 1. Множество $\{\alpha_s\}$ всевозможных подстановок p-ой степени, являющихся арифметическими автоморфизмами одного и того же натурального а. г. G, образует группу.

Эту группу будем называть группой арифметических автоморфизмов натурального а.г. G и обозначать Γ_G. Так как каждая $\alpha_s \in \Gamma_G$ индуцирует некоторую подстановку $G^{(s)}$ вида (14), то определенный интерес представляет исследование множества этих подстановок, тесно связанных с группой Γ_G, что требует отдельного рассмотрения.

Следствие 1. Для а.г. допускающих единственное натуральное представление, группа Γ_G арифметических автоморфизмов совпадает, с точностью до обозначения, с его обычной вершинной группой Γ_G.

Доказательство: Пусть $G_1(N/M_1)$ единственное натуральное представление арифметического графа G и пусть $\{\alpha_s\}$ множество всевозможных арифметических автоморфизмов этого графа. Тогда согласно определению 5 для каждого α_s при $i=1$ и $i_k=1$ имеем:

$$G_1(N/M_1) * \alpha_s = G_1(N/M_1) \tag{26}$$

т. е. каждая подстановка α_s осуществляет обычное отображение помеченного графа $G_1(N/M_1)$ на себя, а следовательно, совокупность всевозможных таких подстановок $\{\alpha_s\}$, образующая группу согласно теоремы I, совпадает с обычной вершинной группой $\Gamma(G)$ [8] с точностью до обозначения вершин.

К натуральным а. г., допускающим тривиальное, единственное, натуральное представление, относятся все полные графы $G(N/M\{3, 4, \cdots 2p-1\})$, все полные двудольные графы $G(N/M\{3,5,\ldots,2p-1\})$ и их дополнения.

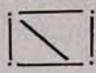
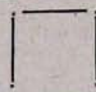
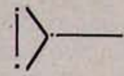
К а. г., допускающим нетривиальное, единственное, натуральное представление, например относятся $G_1(N\{1, 2, 3, 4, 5\}/M\{4, 5, 7, 8\})$ и $G_2(N\{1, 2, \cdots, 7\}/M\{5, 6, 10, 11\})$, представляющие собой соответственно два спаренных в одной вершине треугольника и четырехугольника.

Имеется предположение, что при четном числе вершин p не существует а.г., допускающих нетривиальное, единственное, натуральное представление.

Очевидно, что группа арифметических автоморфизмов Γ_G, так же как и в случае обычных групп автоморфизмов графов, остается одной и той же и для дополнения, т. е. $\Gamma_G = \Gamma_{\overline{G}}$

Из теоремы 1 и следствия 1 следует важный вывод о том, что только для частого случая имеет место совпадение обычных групп автоморфизмов графов с группой арифметических автоморфизмов этого же графа. Другими словами, введенные понятия над натуральными а. г. «высекают» из множества всевозможных подстановок S_p новые подмножества подстановок, образующие группы, вообще говоря, отличные от обычных групп автоморфизмов графов.

Пример. Рассмотрим три натуральных а.г. с множеством вершин $N\{1, 2, 3, 4\}$ со своими всевозможными представлениями порождающих множеств M_i, указанных в каждом столбце табл. 1.

G			
M_i	$M_1\{4, 5, 6, 7\}$ $M_2\{3, 5, 6, 7\}$ $M_3\{3, 4, 5, 7\}$ $M_4\{3, 4, 5, 6\}$	$M_1\{5, 7\}$, $M_5\{3, 4, 6\}$ $M_2\{5, 6\}$, $M_6\{3, 4, 7\}$ $M_3\{3, 5\}$, $M_7\{4, 6, 7\}$ $M_4\{4, 5\}$, $M_8\{3, 6, 7\}$	$M_1\{3, 5, 6\}$ $M_2\{4, 5, 7\}$ $M_3\{5, 6, 7\}$ $M_4\{3, 4, 5\}$

Заметим, что в этом примере фактически рассматриваются пять натуральных а. г., так как дополнения к этим трем графам дают еще два других неизоморфных графа, для которых, как было указано выше, группа арифметических автоморфизмов $\Gamma_G=\Gamma_{\bar{G}}$.

Для указанных трех графов, приведенных в табл. 1, группа арифметических автоморфизмов Γ_G имеет порядок восемь и состоит из следующих подстановок:

$$a=(14),\quad b=(23),\quad c=(13)(24),\quad d=(14)(23),\quad g=(1243),\quad f=(1342),$$
$$k=(12)(34),\quad e=(1)(2)(3)(4) \tag{27}$$

образующих известную группу симметрий квадрата (группа диэдра D_4) с четырьмя нормальными делителями

$$H=\{a,\ b,\ d,\ e\},\quad H'=\{k,\ c,\ d,\ e\},\quad H''=\{g,\ f,\ d,\ e\},\quad H'''\{d,\ e\} \tag{28}$$

Аналогичным образом для графов откаэдра и треугольной призмы, рассмотренных в [6], с помощью ЭВМ были построены группы арифметических автоморфизмов, порядки которых оказались равными 36, в то время как обычные вершинные группы симметрий этих графов имеют порядки соответственно равные 8 и 12.

Из приведенного примера видно, что группа Γ_G арифметических автоморфизмов «мощнее» группы обычных автоморфизмов графов и отражает более общие симметрии не одного, а семейства неизоморфных графов, представленных в определенной системе кодирования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорьян Ю. Г., Маноян Г. К.* Некоторые вопросы арифметической интерпретации неориентированных графов, Киев, Кибернетика, 1977, № 3, с. 129—131.
2. *Григорьян Ю. Г.* Арифметический метод минимизации булевых функций—Материалы научных семинаров по теоретическим и прикладным вопросам кибернетики. В сб. Теория автоматов, Киев, 1964, с. 23.
3. *Григорьян Ю. Г.* Вариационная задача функций алгебры, логики и метод ее реализации на ЭВМ, Киев, Кибернетика, 1967, № 1, с. 26—30.
4. *Григорьян Ю. Г.* Отображение сокращенных дизъюнктивных нормальных форм на графы. Кибернетика, 1979, № 3, с. 105—107.
5. *Григорьян Ю. Г.* Классификация и статистические свойства арифметических графов. Киев, Кибернетика, 1979, № 6, с. 9—12.
6. *Григорьян Ю. Г.* Геометрия арифметических графов. Киев, Кибернетика, 1982, № 4, с. 1—4.
7. *Григорьян Ю. Г.* Задача существования и вопросы представления натуральных арифметических графов. Журнал вычислительной математики и математической физики АН СССР, 1984, № 11.

8 *Курош А. Г.* Теория групп, М., Наука, 1967, с. 636.
9 *Харари Ф.* Теория графов. М., Мир, 1973, с. 300.

Յու. Գ. ԳՐԻԳՈՐՅԱՆ, Ա. Մ. ԱԴՈՆՑ

ԳՐԱՖՆԵՐԻ ԹՎԱԲԱՆԱԿԱՆ ԱՎՏՈՄՈՐՖԻԶՄԻ ԽՄԲԵՐ

Ամփոփում

Աշխատանքում մի շարք հասկացությունների հիման վրա սահմանվում է բնական, թվաբանական գրաֆի ավտոմորֆիզմը, որը արտապատկերում է գրաֆը ինքն իր վրա պահպանելով նրա թվաբանական լինելը։ Ցույց է տրվում, որ այդպիսի ձևափոխությունների բազմությունը, ներկայացված համապատասխան տեղադրությունների սիստեմով, կազմում է խումբը, որը տարբեր է գրաֆների ավտոմորֆիզմի սովորական խմբից։ Ստացված է պայման, որի դեպքում գրաֆի թվաբանական ավտոմորֆիզմի խումբը ճշտությամբ համընկնում է նույն գրաֆի սովորական ավտոմորֆիզմի խմբի հետ։

Շարադրվածը պարզաբանվում է օրինակներով։

Նախատեսված են այդ ուղղությամբ հետազոտությունների հետագա զարգացման որոշ ուղիներ։