Я. ПАХ

О СТРУКТУРЕ СИСТЕМЫ ЗВЕЗД В ГРАФАХ

1. ВВЕДЕНИЕ. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

В теории эстремальных гиперграфов зачастую возникают задачи следующего типа:

1. Какое максимальное число гиперребер может иметь n-вершинный (возможно r-однородный) гиперграф, если пересечения его гиперребер удовлетворяют некоторому условию C ? Например, пересечение любых h гиперребер непусто [9]; любые два гиперребра пересекаются точно в одной вершине [5, 24]; любые два гиперребра пересекаются не более [16] или не менее чем в k вершинах [14] и т. п.

2. Положим, что G -произвольный неориентированный граф. Обозначим множество его вершин через $V(G)$, а множество его ребер—через $E(G)$. Для $x \in V(G)$ введем обозначение

$$S(x)=\{y \in V(G) \mid xy \in E(G)\}.$$

Множество $S(x)=S_G(x)$ будем называть звездой вершины x.

В данной статье рассматриваются только такие графы, у которых пересечения звезд вершин удовлетворяют некоторым условиям. Заметим также, что *система звезд* графа $G/\{S_G(x) \mid x \in V(G)\}/$ определяет гиперграф на множестве $V(G)$. Таким образом, между рассматриваемыми нами экстремальными задачами теории графов и проблемами типа I. теории гиперграфов существует определенная аналогия. Так, например, **пересекающиеся гиперграфы** (т. е. гиперграфы, любые два ребра которых пересекаются) соответствуют **графам диаметра 2.** В главе 4 работы наглядно показано, что здесь речь идет не только о формальной аналогии: исследование определенных вопросов теории графов закономерно предопределяет необходимость изучения гиперграфов с аналогичной структурой.

Перед тем как перейти к изложению конкретных проблем, дадим несколько необходимых определений.

Определение 1.1. ([10]. Граф G обладает *свойством* j_k, если любые k его вершин имеют общего соседа, причем, $k \geqslant 2$—натуральное число. Другими словами, граф G обладает j_k—свойством, если пересечение звезд любых k его вершин непусто.

Следующее определение дадим менее строже.

Определение 1. 2. ([3], [6], [18]). Граф G обладает *свойством* I_k, если любые k его независимых вершин имеют общих соседей. Вершины графа *независимы,* если они не соединены ребром; $k \geqslant 2$—натуральное число.

Графы, обладающие свойством J_k, коротко будем называть J_k—графами, а графы, обладающие свойством I_k, соответственно I_k—графами.

Определение 1.3. ([15]). Граф G будем называть ***k*- суперуниверсальным,** если для произвольного множества $A \subseteq V(G)$, состоящего из k, элементов и любого его подмножества B, существует $x \in V(G)-A$, для которого $S(x) \cap A=B$; $k \geqslant 2$—натуральное число.

Иначе, граф k-суперуниверсальный, если для любого $A=\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ни одно из множеств

$$\bigcap_{i=1}^{k} S_i \qquad (S_i=S(x_i) \text{ или } V(G)-S(x_i)-\{x_i\})$$

не пусто. Образно говоря, в k-суперуниверсальном графе любые k звезд являются множествами „общего расположения".

Нетрудно доказать, что для фиксированного k почти все графы k-суперуниверсальны (при $n \to \infty$). Далее, очевидно, что любой k-суперуниверсальный граф обладает свойством j_k, а j_k—графы в свою очередь обладают свойством I_k.

Определенные выше три свойства графов наследственны в том смысле, что если граф обладает одним из этих свойств для некоторого k, то он обладает этим же свойством и для любого $l \leqslant k$. Следовательно, в иерархии свойств I_k, j_k и k- суперуниверсальности самым слабым является свойство I_2, которое эквивалентно тому, что граф имеет диаметр 2.

Пусть теперь C—произвольное свойство для графов. Тогда можно сформулировать следующие задачи:

1.4 А. *Проблема степени вершин.* Необходимо определить то максимальное натуральное число $d_c(n)$, для которого в любом n—вершинном графе со свойством C есть вершина со степенью не меньше $d_c(n)$.

В. *Проблема числа ребер.* Необходимо определить то максимальное натуральное число $l_c(n)$, для которого в любом n-вершинном графе со свойством C число ребер меньше $l_c(n)$.

С. *Смешанная задача.* Пусть D натуральное число, причем $d_c(n) \leqslant D < n$. Необходимо определить максимальное натуральное число $l_c(n,D)$, для которого верно, что всякий n-вершинный граф со свойством C, у которого степень ни одной из вершин не превосходит D, имеет по крайней мере $l_c(n, D)$ ребер.

В главах 2. 3 и 4 настоящей работы исследуются задачи A, B и C в связи со свойствами, введенными в определениях 1. 1—1.3.

2. ПРОБЛЕМА СТЕПЕНИ ВЕРШИН

Нижеследующая теорема дает асимптотическое решение проблемы степени вершин для свойств I_k и j_k (см. [55]).

Теорема 1. Пусть $k \geqslant 2$- натуральные число, $n \to \infty$. Тогда

$$d_{I_k}(n)=(1-0(1))\, n^{1-(1/k)};$$

$$d_{J_k}(n)=(1-0(1))n^{1-(1/k)}.$$

Заметим, что для графов со свойством I_2, очевидно, что $d_{I_2}(n) \geq \sqrt{n-1}$. Эта оценка точна только в случаях $n=5,10,50$ (и возможно при $n=3250$), т. е. для так называемых графов Мура (см. [1]). Для остальных значений n имеет место неравенство $d_{I_2}(n) \geq \sqrt{n+1}$ [7], и еще неизвестно, верно ли, что здесь равенство может выполняться только для конечного числа значений n.

Проблема 2.1. Существует ли такая константа c, для которой

$$d_{I_2}(n) \geq \sqrt{n}+c?$$

Эрдёш и Файтлович [6] предложили следующую проблему: как видоизменится проблема степени вершин для I_k-графов, если предположить, что граф не содержит треугольников? В более общем виде она выглядит следующим образом:

Проблема 2.2. Определить то максимальное натуральное число $d(I_k, r, n)$, для которого во всяком n-вершинном I_k- графе, который не содержит K_r (полный граф на r вершинах) в качестве подграфа, существует вершина со степенью, превосходящей $d(I_k, r, n)$.

На этот вопрос точный асимптотический ответ неизвестен даже в случае $k=2$ и $k=3$. С незначительными изменениями конструкция, данная Эрдёшом в [4], дает n-вершинный граф диаметра 2, без треугольников, в котором степень любой вершины не больше $\sqrt{n}\log n$. Следовательно

$$\sqrt{n+1} \leq d_{I_2}(I_2\ 3,\ n) \leq \sqrt{n}\log n.$$

До настоящего времени оценки, лучше вышеприведенных, неизвестны.

Теорема 2.: $(1-0(1))n^{2/3} \leq d(I_3,\ 3,\ n) \leq (1+0(1))n^{0{,}92}$.

Доказательство: Нижняя оценка следует из теоремы I. Чтобы доказать справедливость верхней оценки, определим для всех натуральных m граф G_m на 2^{3m+1} вершинах следующим образом: пусть X— множество, состоящее из $3m+1$ элементов, и $V(G_m)=\{A|A\subseteq X\}$. $AB \in E(G_m)$ тогда и только тогда симметрическая разность A и B содержит по крайней мере $2m+1$ элементов (расстояние Хемминга между A и B не меньше $2m+1$). Можно легко убедиться что G_m не содержит треугольников и обладает I_3—свойством, а максимальная степень его вершин равна $0(|V(G_m)|^{0{,}92})$,

Проблема 2.5. Существуют ли такие $k \geq 4$ и $\varepsilon > 0$, что для любых n имеет место: $d(I_k,\ 3,\ n) \geq \varepsilon n$?

Утверждение нижеследующей теоремы является менее строгим.

Теорема 3. Существует такая величина $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon=1/3$), что для любого n имеет место $d(I_{]\log n[},\ 3,\ n) \geq \varepsilon n$

Определение 2. 4. Граф G обладает I-свойством, если G обладает I_k—свойством для всех $k \geq 2$.

Теорема 3 вытекает из следующих двух утверждений:

Лемма 2.5. ([11]). Пусть G n—вершинный граф, не содержащий треугольников. Если G обладает свойством $I_{]\log n[}$, то он обладает также и I—свойством.

Теорема 4. $d(I, 3, n) \geqslant \frac{n+1}{3}$ для любого n.

Этот результат точен в том смысле, что для любого натурального числа $n = -1 \pmod 3$ существует однозначно определенный n—вершинный граф без треугольников, который обладает I—свойством, а максимальная степень его вершин равна $(n+1)/3$. Доказательство теоремы 4 основано на том, что удается полностью охарактеризовать графы с I—свойством, не содержащие треугольников (см. [20]).

Проблема 2.6. Существует ли такая величина $\varepsilon > 0$, что неравенство $d(I, 4, n) \geqslant \varepsilon n$ имеет место для любого n?

Подходя к проблеме с другой стороны и, применяя соответствующий метод из теории вероятностей [11], можно получить нижеследующие результаты:

Теорема 5. Пусть $w(n)$—произвольная функция, стремящаяся к бесконечности ($n \to \infty$). Тогда

$$d(I, w(n)\log n, n) \leqslant (2+O(1)) \frac{n\log\log w(n)}{\log w(n)} = O(n).$$

Теорема 6. $d_I(n) = d(I,n,n) = (1+O(1)) \frac{n\log\log n}{\log n}, \quad n \to \infty.$

3. ПРОБЛЕМА ЧИСЛА РЕБЕР

Проблема числа ребер для I_k—свойства тривиальна, поскольку всякий связный граф на n вершинах содержит по крайней мере $n-1$ ребро, и в тоже время n—вершинный граф-звезда (с $n-1$ ребром) обладает свойство I_k для любого k.

Проблему числа ребер для j_k—свойства решили Эрдёш и Мозер [10]. Они доказали (в обозначениях 1. 4) нижеследующую теорему:

Теорема 7. ([10]). Для любых натуральных чисел $n > k \geqslant 2$

$$l_{J_k}(n) = (k-1)n + 1 \left[\frac{n-k}{2}\right] \cdot \binom{k}{2} + 1.$$

Обозначим через $l_{k-sup}(n)$—минимальное число ребер в n-вершинах k-суперуниверсальных графах.

Теорема 8. (23). Для достаточно больших n

$$l_{2-sup}(n) = 3n - 9.$$

Теорема 9. [(8], [19]). Для всех достаточно больших n, и при $k \geqslant 3$ имеет место:

$$2^{k-5} n \log_2(n) \leqslant l_{k-sup}(n) < k 2^{k-1} n \log_2 n.$$

4. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА

Смешанную задачу для графов диаметра 2 (I_2-графов) сформулировали Реньи и Эрдёш [12]. Реньи, Т. Шош, Эрдёш [13] и Знам [25] по существу определили значение $l_{I_2}(n,D)$ в случае $D \geqslant [(n+1)/2]$.

Для случая, когда $D<[(n+1)/2]$ Боллобаш [2], Пах и Шураньи [21] достигли некоторых результатов, а асимптотическое решение проблемы дано в [22].

Определение 4.1. Пусть $k\geqslant 2$ и n-натуральные числа. Граф G обладает $j_{k,m}(I_{k,m})$—свойством, если соответственно любые k его вершин (любые k его независимых вершин) имеют по крайней мере m общих соседей.

Проблема 4.2. Пусть $T\geqslant 1$—действительное число. Следует определить пределы

$$\lim_{n\to\infty} l_{jk,m}\left(n,\frac{n}{T}\right)/n \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} l_{jk,m}\left(n,\frac{n}{T}\right)/n.$$

Будем пользоваться следующими хорошо известными понятиями. Пусть H-произвольный гиперграф, множество вершин которого обозначим через $V(H)$, а множество гиперребер—через $E(H)$. Функция $W: E(H)\to R$ называется *дробной упаковкой ребер* гиперграфа H, если: $W(E)\geqslant 0$, для любого $E\in E(H)$;

$$\sum_{x\in E} W(E)\leqslant 1, \text{ для любого } x\in V(H).$$

Число $\sum_{E\in E} W(E)$ будем называть *весом* W. Обозначим через $\nu^*(H)$ *максимальный вес* дробных упаковок ребер гиперграфа H.

Определение 4.3. Пусть $k\geqslant 2$ и m—натуральные числа. Гиперграф H будем называть (k,m)—*пересекающимися*, если пересечение любых k его гиперребер содержит по крайней мере m элементов.

Пусть H—произвольный (k,m)—пересекающийся гиперграф с гиперребрами $E_1, E_2, \ldots, E_r$, а W—дробная упаковка H с весом $T(1<T<\nu^*(H))$. Для любого достаточно большого $n(n\geqslant|V(H)|)$ определим n-вершинный граф G^n со свойством $j_{k,m}$. Выберем попарно непересекающиеся множества $V_0, V_1, \ldots, V_r$, дизъюнктные от $V(H)$, для которых имеет место:

$$|V_i|=\left\lfloor \frac{W(E_i)}{T}\Big(n-|V(H)|\Big)\right\rfloor, \quad |V_0|=n-|V(H)|-\sum_{i=1}^{r}|V_i|,$$
$$(i=1,2,\ldots, T).$$

Тогда множеством вершин будут $V(H)\cup V_0\cup V_1\cup\ldots\cup V_r$, $B V(H)\cup V_0$. Проведем все ребра и каждую вершину $x\in V_i$ соединим со всеми элементами $E_i(i=1,2,\ldots, r)$. Первоначальный гиперграф H будем называть *ядром* полученного графа G^n. Из полученной конструкции вытекает, что

$$l_{j,km}\left(n,\frac{n}{T}+|V(H)|+|E(H)|\right)\leqslant\frac{n}{T}\sum_{E\in E(H)} W(E)|E|+\Big(|V(H)|+|E(H)|\Big)^2. \tag{1}$$

Следовательно, если при фиксированном $T>1$, хотим получить хорошую верхнюю оценку для $l_{jk,m}\left(n,\frac{n}{T}+0(1)\right.$, то в этом случае целесообразнее минимизировать число $\sum W(E)|E|$. Этим мотивируется следующее определение.

Определение 4.4. Пусть $T>1$ — фиксированное действительное число, а H-гиперграф, для которого $\nu^*(H)\geqslant T$. Пусть далее

$$a(H,\ T)=\min_{W}\sum_{E\in E(H)} W(E)|E|,$$

где W пробегает все дробные упаковки ребер гиперграфа H с весом T, и

$$A_{k,m}(T)=\inf\{a(H,T)|H\text{—}(k,m)\text{—пересекающийся, } \nu^*(H)\geqslant T\}.$$

Лемма 4.5. $A_{k,m}(T)\leqslant m(2T)^k$ для любого $T<1$.

Лемма 4.6. Пусть $H=(k,m)$—пересекающийся гиперграф $\nu^*(H)\geqslant T\geqslant1$. Тогда существует такой (k,m)—пересекающийся гиперграф H', у которого не более $2m^2(2T)^k$ вершин, и для которого $\nu^*(H')\geqslant T$, а $(H,T)\leqslant a(H,T)$. Исходя из этого $A_{k,m}(T)$ можно записать в следующем виде:

$$A_{k,m}(T)\min\{a(H,T)| \quad \left.\begin{matrix} H\text{—}(k,m)\text{—пересекающийся,} \\ |V(H)|\leqslant 2m^2(2T)^k,\quad \nu^*(H)\geqslant T \end{matrix}\right\},\qquad (2)$$

Отсюда вытекает, что для фиксированного T значение $A_{k,m}(T)$ можно вычислить с помощью конечного алгоритма, т. е. путем решения конечного числа задач линейного программирования.

Пусть $T\geqslant1$ фиксировано, и предположим, что H_0 такой гиперграф, для которого выполняются условия (2) и, кроме того, $A_{k,m}(T)=$ $=a(H_0,\ T)$. Тогда

$$A_{k,m}(T)=a(H_0,T)=\sum_{E\in E(H_0)} W_0(E)|E \qquad \text{и}$$

$$|V(H_0)|+|E(H_0)|\leqslant 2m^2(2T)^k+2^{2m^2(2T)^k}<5^{m^2(2T)^k}.$$

С учетом (1) окончательно имеем:

$$l_{I_{k,m}}\left(n,\frac{n}{T}+c\right)\leqslant l_{J_{k,m}}\left(n,\frac{n}{T}+c\right)<\frac{A_{k,m}(T)}{T}n+c^2,$$

где $c=c(k,m,T)=5^{m^2(2T)^k}$—константа, не зависящая от n.

Один из наших главных результатов состоит в том, что эта оценка асимптотически точна, т. е. верна.

Теорема 10. Пусть $k\geqslant2$ и m—натуральные числа, а $T\geqslant1$. Тогда $l_{I_{k,m}}\left(n,\frac{n}{T}+5^{m^2(2T)^k}\right)=\frac{A_{k,m}(T)}{T}n+0(n)$, и $A_{k,m}(T)$ можно вычислить с помощью алгоритма с ограниченным числом шагов.

Легко убедиться, что существует такая стремящаяся к бесконечности последовательность значений T_i, $1=T_1<T_2<T_3<\ldots$, для которой функция $A_{k,m}(T)$ непрерывна и кусочно-линейна на каждом отрезке $(T_i,\ T_{i+1})$, и кроме того, $T_i=\nu^*(H_i)$ для подходящего (k,m)—пересекающегося гиперграфа $H_i(i=1,2,\ldots)$. Общеизвестно, что $\nu^*(H)$ рационально для любого гиперграфа H (см., например, у Ловаса [17]). Следовательно, рационально и каждое T.

Следствие 4.7. Пусть $k\geqslant2$ и m—натуральные числа, а $T\geqslant1$. Предположим, что функция $A_{k,m}(X)$ непрерывна в точке T (например, T—иррационально). Тогда

$$\lim_{n\to\infty} l_{Jk,m}\left(n, \frac{n}{T}\right)/n=\lim_{n\to\infty} l_{jk,m}\left(n, \frac{n}{T}\right)/n=\frac{A_{k,m}(T)}{T}.$$

Перейдем к описанию структуры экстремальных графов.

Определение 4.8. Пусть $k\geqslant 2$ и m—натуральные числа, а $T\geqslant 1$.

1. n—вершинный *граф* G^n со свойством $j_{k,m}$ (или $I_{k,m}$) будем называть *T—экстремальным,* если максимальная степень его вершин не превосходит $n/T+5^{m^2(2T)^k}$, а число его ребер минимально, т. е.

$$|E(G^n)|=l_{Jk,m}\left(n, \frac{n}{T}+5^{m^2(2T)^k}\right),$$

$$\text{или}\quad |E(G^n)|=l_{jk,m}\left(n, \frac{n}{T}+5^{m^2(2T)^k}\right).$$

2. *Гиперграф* H будем называть *T—экстремальным,* если $\nu^*(H)\geqslant T$ и $\alpha(H,T)$ минимально, т. е. $\alpha(H,T)=A_{k,m}(T)$.

Теорема 11. Пусть $k\geqslant 2$ и m—натуральные числа, а $T\geqslant 1$—фиксировано. Тогда для любого T—экстремального графа можно найти T—экстремальный гиперграф $H=\{E_1, E_2, \ldots, E_r\}$, множество $P\subset V(G^n)$ с числом элементов $O(n)$ и разбиение $V_1\cup V_2\cup\ldots\cup V_r$ множества $V(G^n)-P$ такие, что для любого i имеют место:

1. $V(H)\subset V(G^n)$, $\quad |V(H)|\leqslant 2^{m^2(2T)^k}\ m^2(2T)^k)^m$,
2. $x\in E_i,\ \ y\in V_i\rightarrow xy\in E(G^n)$.

Таким образом, любой T—экстремальный граф, по существу, можно получить из T-экстремального гиперграфа с не более чем $2^{m\,(2T)k}$ $(m^2(2T)^k)$ вершинами способом, описанным в начале данной главы. Другими словами, для сколь угодно большого n, звезды вершин экстремальных графов скучиваются в ядро с размерами, не зависящими от n (зависят только от k, m и T). Это явление мы назовем *коллапсом звезд.* Легко видеть, что с возрастанием T ядро H (и средний размер звезд) увеличивается. Это можно сформулировать несколько иначе: *звездная система* (галактика) экстремальных графов расширяется.

Результаты, полученные выше, в некоторых случаях дают возможность точно вычислить асимптотическое значение $l_{jk,m}\left(n, \frac{n}{T}\right)$ (или $l_{Jk,m}\left(n, \frac{n}{T}\right)$. К примеру, с помощью следующих двух лемм легко можно доказать следствие 4. 11.

Лемма 4.9. Пусть H—произвольный гиперграф. Тогда для любого $T\in[0,\nu^*(H)]$ имеет место $\frac{\alpha H,T}{T}\leqslant\frac{|V(H)|}{\nu^*(H)}$.

Лемма 4.10. Пусть $H(k,m)$—пересекающийся гиперграф, и предположим, что у H нет такой вершины, которая содержится во всех гиперребрах. Тогда пересечение любых i гиперребер H имеет по крайней мере $(k-i+m)$ элементов $(1\leqslant i\leqslant k)$.

Следствие 4.11. Пусть $k \geqslant 2$ и m-фиксированные натуральные числа, $1 < T < (k+m)(k+m-1)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{l_{jk,m}\left(n, \frac{n}{T}\right)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{l_{Ik,m}\left(n, \frac{n}{T}\right)}{n} = k+m-1.$$

Доказательство: На основании следствия 4.7 достаточно показать, что $A_{k,m}(T)/T = k+m-1$ для всех T из заданного интервала. Построим (k,m)—пересекающийся гиперграф H следующим образом: пусть множество вершин H есть множество с числом элементов $k+m$, а H состоит из всевозможных подмножеств $V(H)$ с числом элементов $k+m-1$. Очевидно, что $\nu^*(H) = (k+m)(k+m-1)$. Таким образом, из леммы 4.9 следует, что $A_{k,m}(T)/T \leqslant k+m-1$. Неравенство в противоположном направлении следует из леммы 4.10 в случае $i=1$.

Вышеописанная схема доказательств с успехом может быть применена ко многим другим смешанным задачам теории графов. Она позволяет свести экстремальные задачи теории графов к ограниченным задачам теории гиперграфов, которые в свою очередь можно решать с помощью методов линейного программирования.

Во введении мы указывали, что между определенными свойствами графов и гиперграфов существует *формальная* аналогия. Заметим, однако, что в рассмотренных выше проблемах эта аналогия *по существу* выразилась в следующем: гиперграфы—ядра экстремальных графов с данным свойством обладают соответствующим свойством для гиперграфов.

ЛИТЕРАТУРА

1 *N. L. Biggs*, Algebraic Graph Theory, Cambridge University Press, 1974.

2 *B. Bollobás*, Graphs with given diameter and maximal valency and with a minimal number of edges, in: Combinatorial Mathematics and its Applications /D. J. Walsh, ed./, Academic Press, 1971, pp. 25—37.

3 *B. Bollobás*—S. Eldridge, On graphs with diameter 2, J. Combinatorial Th. B 21 /1976/, 201—205.

4 *P. Erdös*, Graph theory and probability 11, Canadian J. Math. 13/1961/, 346—352.

5 *P. Erdös*—N. G. de Bruijn, A color problem for infinite graphs, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. 13/1951/, 371—373.

6 *P. Erdös*—S. Fajtlowicz, Domination in graphs of diameter 2, preprint.

7 *P. Erdos*—S. Fajtlowicz—A. J. Hoffman, Maximum degree in graphs of diameter 2, 2, Networks 10/1980/, 54—63.

8 *P. Erdos*—S Hechler—P. Kainen, on finite superuniversal graphs, Discrete Math. 24/1978/, 235—250.

9 *P. Erdos*—Ch. Ko—R. Rado, Intersection theorems for systems of finite sets, Quarterly J. Math. Oxford Ser. 2, 12 (1961) 313—320.

10 *P. Erdos*—L. Moser, An extremal problem in graph theory, J. Australian Math. Soc. 11/1970/, 42—47.

11 *P. Erdos*—J. Pach, Stars and independent sets, in: Aspects of Topology /I. M. James, E. H. Kronheimer, eds./, Cambridge University Press, 1985.

12 *P. Erdos*—A. Rényi, On a problem in the theory of graphs. Publ. Math. Inst Hung. Acad. Sci. 7A/1962/, 623—641.

13 *P. Erdos*—A. Rényi—V. T. Sós, On a problem of graph theory, Studia Sci. Math. Hung. 1/1966/, 215—235.

14 *H.—D. Gronau*, on Sperner families in which no k sets have an empty intersection, J. Combinatorial Th. A 28/1980/, 54—63.

15 *S. H. Hechler*, Large super-universal metric spaces, Israel J. Math 14/1973/, 115—148.

16 *G. O. H. Katona*, Intersection theorems for systems of finite sets, Acta Math Acad. Sci. Hung. 15/1964/, 329—337.

17 *L. Lovasz*, On minimax theorems of combinatorics, Mat. Lapok 26/1975/, 209—264.

18 *U. S. R. Murty*—K. Vijayan, on accessibility in graphs, Sankhya Ser. A 26/1965/, 279—302.

19 *J. Pach*, On super-universal graphs, Studia Sci. Math. Hung. 12/1977/, 19—27.

20 *J. Pach*, Graphs whose every independent set has a common neighbour, Discrete Math. 37/1981/, 217—228.

21 *J. Pach*—L. Surányi, On graphs of diameter 2, Ars Combinatoria 11/1981/, 61—78.

22 *J. Pach*—L. Surányi, Graphs of diameter 2 and linear programming, in: Algebraic Methods in Graph Theory, Proc. Coll. Math. Soc. J. Bolyai 25/1978/, 599—629.

23 *J. Pach*—L. Surányi, 2—super—universal graphs, in: Proc. Fifth International Graph Th. Conf. Kalamazoo, 1984.

24 *H. Ryser*, An extension of a theorem of de Bruijn and Erdos, on combinatorial designs, J. Algebra 10/1968/, 246—261.

25 *S. Znam*, On graphs of diameter 2, Studia Sci. Math. Hung. 18/1983/.

Յ. ՊԱԽ

ԳՐԱՖՆԵՐՈՒՄ ԱՍՏՂԱՅԻՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԿԱՌՈՒՑՎԱԾՔԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում բերված է ապացույցների սխեման, որը հնարավորություն է տալիս գրաֆների տեսության էքստրեմալ խնդիրները վերածել հիպերգրաֆների տեսության սահմանափակ խնդիրների, որոնք իրենց հերթին կարելի է լուծել գծային ծրագրավորման մեթոդներով։