И. Н. КАРАБАН

О ВЛИЯНИИ ПРИБЛИЖЕННОСТИ ФУНКЦИОНАЛА НА РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Многие прикладные задачи линейного программирования связаны с определением оптимального решения в условиях, когда параметры функционала заданы приближенно. К этому классу задач тесно примыкают многокритериальные задачи, где требуется оптимизировать одновременно несколько линейных целевых функций. Поскольку оптимальное проектное решение (т. е. решение, получаемое на стадии проектирования системы, может оставаться неизменным только при ограниченных вариациях параметров целевых функций (это соответствует множеству критериев, которые могут быть оптимизированы одновременно), то возникает задача определения соответствующей области параметров функционала.

Рассмотрим задачу линейного программирования вида

$$\max_{z\{z_i\}} F=\sum_{i=1}^{m} c_i z_i \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} z_i \leqslant u_j, \quad j=\overline{1,n} \tag{2}$$

где $z\{z_i\}$ — искомое решение;

$\bar{c}\{c_i\}$ — приближенные параметры функционала;

a_{ij}, u_j — точные параметры ограничений (2).

Смысл допущения о том, что параметры ограничений заданы, точно сводится к тому, что ошибки, с которыми они заданы, в первом приближении считаются не влияющими на стабильность (неизменность) оптимального проектного решения. Это дает возможность в полной мере учесть специфику рассматриваемой задачи оптимизации и предложить наиболее эффективный численный метод для ее решения.

При проектных значениях исходных данных $\bar{c}^0$ оптимальное решение задачи равно z^0. Истинное значение вектора параметров $\bar{c}_T$ соответствующее реальной ситуации в общем случае не совпадает со значением $\bar{c}^0$ и находится в некоторой области Ω_1:

$$\varphi_k(\bar{c})\leqslant 0, \quad k=\overline{1,N} \tag{3}$$

Эта область может быть такой, что $z^0\neq z_T$, где z_T — оптимальное решение, соответствующее вектору $\bar{c}_T$. Поэтому важно определить такую область Ω значений вектора $\bar{c}$, в которой оптимальное проектное решение остается стабильным. Эта область может быть представлена в виде пересечения двух областей

$$\Omega = \Omega_1 \cap \Omega_2,$$

где Ω_2 —область значений $\bar{c}$, в которой решение z^0 стабильно. При этом Ω_2 определяется без учета достижимой точности задания компонентов вектора $\bar{c}$. В силу этого она как правило является неограниченной.

Наглядное представление области Ω при условии выпуклости областей Ω_1 и Ω_2 может быть выполнено путем вычисления ее проекций в пространстве $m-1$ пар компонентов вектора $\bar{c}$ таких, что одна из них во всех парах является общей. Численная реализация соответствующего алгоритма принципиальных сложностей не вызывает, особенно в случае линейности ограничений вида (3).

Область Ω_2 определяется по следующему алгоритму.

1. Находятся m смежных к точке z^0 вершин

$$z^1\{z_i^1\},\ z^2\{z_i^2\},\ \cdot\ \cdot\ \cdot,\ z^m\{z_i^m\}.$$

2. Формируется предикатное уравнение области Ω_2 в виде

$$(F_0 > F_1) \cap (F_0 > F_2) \cap \cdot\ \cdot\ \cdot \cap (F_0 > F_m) = 1,$$

где F_0 значение целевой функции в точке z^0 при проектных исходных данных $\bar{c}^0$;

$F_1, F_2 \ldots, F_m$—значения целевой функции в m смежных вершинах при любых значениях исходных данных.

Развернутая форма предикатного уравнения имеет вид

$$\left(\sum_{i=1}^{m} c_i^0 z_i^0 \geqslant \sum_{i=1}^{m} c^i z_i^1\right) \wedge \left(\sum_{i=1}^{m} c_i^0 z_i^0 \geqslant \sum_{i=1}^{m} c_i z_i^2\right) \wedge \cdot\ \cdot\ \cdot \wedge \left(\sum_{i=1}^{m} c_i^0 z_i^0 \geqslant \right.$$
$$\left. \geqslant \sum_{i=1}^{m} c_i z_i^m\right) = 1.$$

Таким образом, область Ω_2 представляет собой пересечение полупространств, определяемых гиперплоскостями:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{m} c_i(z_i^0 - z_i^1) \geqslant 0, \\ \sum_{i=1}^{m} c_i(z_i^0 - z_i^2) \geqslant 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sum_{i=1}^{m} c_i(z_i^0 - z_i^m) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Координаты смежных вершин находятся следующим образом [1].

1. С помощью симплекс-метода при $c = c^0$ получается таблица вида

$$\begin{array}{|cccc|c|l} r_1 & r_2 & \cdots & r_m & 1 & \\ \hline a'_{11} & a'_{21} & \cdots & a'_{m1} & -u'_1 & = -S'_1 \\ a'_{12} & a'_{22} & \cdots & a'_{m2} & -u'_2 & = -S'_2 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \\ a'_{1n} & a'_{2n} & \cdots & a'_{mn} & -u'_n & = -S'_n \\ \hline c'_1 & c'_2 & \cdots & c'_{mn} & \delta & = F \\ \hline \end{array} \tag{5}$$

соответствующая исходной таблице

$$\begin{array}{|ccccc|c|c}
z_1 & z_2 & \cdot & \cdot & \cdot & z_m & 1 & \\
\hline
a_{11} & a_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{m1} & -u_1 & =-\pi_1 \\
a_{12} & a_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} & -u_2 & =-\pi_2 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\
a_{1n} & a_{2n} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{mn} & -u_n & =-\pi_n \\
\hline
c_1 & c_2 & \cdot & \cdot & \cdot & c_m & 0 & F
\end{array}$$

Последняя таблица содержит $m+n+1$ неизвестных $z_1, z_2, \cdot \cdot \cdot z_m$ $\pi_1, \pi_2, \cdot \cdot \cdot, \pi_n, F$, (где π_i—свободные переменные).

В таблице (5) $n+1$ переменных выражены через переменные r_1 $r_2, \cdot \cdot \cdot r_m$. При этом имеют место условия

$$-u_i' < 0, \quad i=\overline{1,n}; \quad c_i' < 0, \quad i=\overline{1,m}$$

Оптимальное проектное решение, как известно, находится так

$$z_i^0 = \begin{cases} S_j' = u_j', & \text{если } z_i \text{ является базисной переменной} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В приведенной записи S_j—обозначение переменной z_i в соответствии с таблицей (5).

Известно, что две базисные точки называются смежными, если они представляют различные точки в пространстве и их множества базисных переменных различаются не более, чем одним элементом. Поэтому получение множества точек смежных к z осуществляется путем последовательного введения в базис одной из m небазисных переменных. При этом используется следующий алгоритм выбора ведущего элемента в таблице (5) обеспечивающий переход в одну из смежных к оптимальной точек.

1. Полагаем $i=1$.
2. Определяем

$$J=\max_j \left(-\frac{u_j'}{a_{ij}}\right).$$

3. Если $j=\xi$—номер строки, в которой находится ведущий элемент $a_{i\xi}$, то преобразование таблицы (5) осуществляется с помощью известной диаграммы [1]:

$$\begin{vmatrix} a_{i\xi} & q \\ r & S \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_{i\xi}} & \dfrac{q}{a_{i\xi}} \\ -\dfrac{r}{a_{i\xi}} & S-\dfrac{q^r}{a_{i\xi}} \end{vmatrix}$$

где q—любой элемент ведущей строки $(q \neq a_{i\xi})$;

r—любой элемент ведущего столбца $(r \neq a_{i\xi})$:

S—элемент из строки соответствующей r, и столбца, соответствующего q.

4. Выводятся на печать координаты искомой смежной вершины, совпадающие со значениями правого столбца (с противополож-

ными знаками), таблицы полученной из (5) в результате преобразования по п. 3.

5. Если $i=m$, то переходим к п. 8.
6. Полагаем $i=i+1$.
7. Переходим к п. 2.
8. Конец.

Рассмотренная выше задача построения области Ω дополняет известные результаты [2] по исследованию стабильности экономико-математических моделей оптимизации. Отличие рассмотренной задачи от известной [2] состоит в том, что во втором случае область изменения вектора параметров $\bar{c}$ считается заданной. Далее проверяется, остается ли оптимальное решение z^0 неизменным при значениях параметров в пределах указанной области. Если решение может измениться, то находится предельное множество решений, соответствующее заданной области параметров. В отличие от этого в рассмотренной задаче находится такая область параметров, которая в общем случае у́же заданной области и в которой всегда имеет место стабильность оптимального решения. Это имеет определенное прикладное значение, так как позволяет сформировать необходимые требования к точности задания исходных данных c_i

Описанный выше алгоритм определения сложных вершин позволяет весьма эффективно решать ранее рассмотренную в работе [2] задачу оценки предельного множества решений, когда точность задания параметров c_i не может быть повышена в такой степени, чтобы имела место стабильность оптимального решения. Действительно, имея множество смежных вершин, одна из которых может оказаться точкой оптимума после соответствующего изменения исходных данных, можно определить

$$R=\max_j\|z^0-z^j\|,\quad j=\overline{1,m},$$

где m —число смежных точек;

$\|\cdot\|$—подходящая норма, например евклидова.

Если оптимальное решение может перейти не далее, чем в одну из смежных вершин, то число R характеризует предельную погрешность в определении оптимального решения из-за неоднозначности исходных данных.

Если область параметров настолько широка, что оптимальное решение может «уйти» дальше одной из смежных точек, то соответствующая величина R должна определяться с учетом этого обстоятельства.

Обобщая изложенное, можно предложить следующую схему анализа стабильности оптимального решения.

1. При заданной области параметров Ω_1 в форме (3) проверяется стабильность оптимального решения. Критерий стабильности имеет вид

$$\Omega_1\cap\Omega_2=\Omega_1.$$

2. Если же имеет место нестабильность решения, т. е.

$$\Omega_1\cap\Omega_2\subset\Omega_1,$$

то определяется перечень смежных к оптимальной точке вершин, в которых может находиться оптимальное решение. Эти вершины соответствуют ограничениям (4), которые могут быть нарушены при соблюдении (3). Определить такие ограничения можно, решив m задач вида

$$\min_{\bar{c}} I_k\ (\bar{c}=\sum_{i=1}^{m} c_i(z_i^0-z_i^k),\quad k=\overline{1,m} \tag{6}$$

при ограничениях (5).

Если для некоторого $k(1 \leq k \leq m)$ имеет место $I_k(\bar{c}_{опт}) < 0$ ($\bar{c}$—оптимум(6)), то оптимальное решение может находиться в к-й смежной вершине. В противном случае это невозможно.

Обозначим через $M \leq m$ число смежных вершин, в которых может быть оптимальное решение. Ясно, что в силу широты области параметров (3) или в силу плохой обусловленности задачи оптимальное решение может «уходить» из части вершин $M \leq M$. Вершины, смежные к указанным M_1 вершинам, могут быть легко определены описанным выше способом. Далее решаются задачи вида

$$\min_{\bar{c}} I_{pq}(\bar{c}) = \sum_{i=1}^{m} c_i(z_i^p - z_i^q)$$

$$p = \overline{1, M}, \qquad q = \overline{1, m}$$

при ограничениях (3), а также с учетом условия

$$\sum_{i=1}^{m} c_i(z_i^q - z_i^p) \leq 0.$$

где z_i^p — i—я координата p-й вершины ($i = \overline{1, M}$); z_i^q — i—я координата q-й вершины смежной к z^p.

Последним условием учитывается нарушение соответствующего ограничения (4). Нестабильность оптимального решения в одной из M_1 вершин как и выше, идентифицируется по знаку величины I_{pq} ($\bar{c}_{опт}$) где $C_{опт}$ оптимальное значение вектора параметров в сформулированной выше задаче.

Процесс поиска возможных точек оптимума продолжается до тех пор, пока все минимальные значения функционалов I_k ($\bar{c}$), I_{pq} ($\bar{c}$) и т. д. станут неотрицательными. Геометрическая иллюстрация описанного алгоритма в двумерном случае показана на рис. 1,2.

Построение области Ω_2 рассмотрим на примере задачи

$$\max_z F = 4z_1 + 2z_2,$$

$$2z_1 + 3z_2 \leq 18, \quad -z_1 + 3z_2 \leq 9, \quad 2z_1 - z_2 \leq 10,$$

$$z_1 \geq 0, \quad z_2 \geq 0.$$

Точка оптимума $z_1^{опт} = 6$, $z_2^{опт} = 2$ определяется симплекс-методом. При этом симплекс-таблица (5) имеет вид

π_3	π_1	1	
$-1/4$	$1/4$	-2	$= -z_2$
$9/8^*$	$-5/8$	-9	$= -\pi_2$
$3/8$	$1/8$	-6	$= -z_1$
-1	-1	28	$= F$

Вводя в базис переменную π_3 находим первую смежную вершину. Ведущий элемент соответствующего преобразования обозначен знаком*.

Выполняя преобразование, имеем

π_2	π_1	1	
$2/9$	$1/9$	-4	$=-z_2$
$8/9$	$-5/9$	-8	$=-\pi_3$
$-1/3$	$1/3$	-3	$=-z_1$
$8/9$	$-14/9$	20	$=F$

Таким образом, координаты первой смежной вершины будут $z_1=3$, $z_2=4$. Далее в таблице (7) в базис вводится свободная переменная π_1. Ведущий элемент находится в первой строке (он равен $1/4$). В результате преобразования получаем следующий симплекс-таблицу

π_3	z_2	1	
-1	4	-8	$=-\pi_1$
$1/2$	$5/2$	-14	$=-\pi_2$
$1/2$	$-1/2$	-5	$=-z_1$
-2	4	20	$=F$

Координаты второй смежной вершины равны $z_1=5$, $z_2=0$.

Система ограничений (4) в данной задаче имеет вид

$$3c_1-2c_2\geqslant 0, \quad c_1+2c_2\geqslant 0,$$

Область Ω_2 изображена на рис. 3.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Оуэн Г.* Теория игр. М., Мир, 1971.

2 *Минаев Ю. Н.* Стабильность экономико-математических моделей оптимизации. М., «Статистика», 1980.

Ի. Ն. ԿԱՐԱԲԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՖՈՒՆԿՑԻՈՆԱԼԻ ՄՈՏԱՎՈՐՈՒԹՅԱՆ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում են ֆունկցիոնալի պարամետրերի տիրույթի սինթեզման ալգորիթմները, որտեղ օպտիմալ լուծումը կայուն է։ Առաջարկվում է օպտիմալ լուծման սահմանային արժեքների գնահատման էֆեկտիվ մեթոդը։