С. Т. ХАЧАТРЯН

О РАВНОМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО СИСТЕМОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

1. Рассматривается задача о равномерной устойчивости процесса на заданном интервале времени в постановке К. А. Абгаряна [3].

Определение. Невозмущенный процесс называется устойчивым, если в заданном классе K_Δ^ω существует такая матрица $G(t)$, что при достаточно малом $\rho>0$ любое возмущение $x(t)$ процесса, начальное значение $x(t_0)=x_0$ которого удовлетворяет условию

$$G^{-1}(t_0)\, x_0,\ G^{-1}(t_0)x_0) \leqslant \rho^2 \tag{1.1}$$

на конечном интервале $t_0 \leqslant t < T$ удовлетворяет условию

$$(G^{-1}(t)\, x(t),\ G^{-}(t)\, x(t)) \leqslant \rho^2 \tag{1.2}$$

Под классом K_Δ^ω подразумевается совокупность $n\times n$—матриц $G(t)=(G_1(t), \ldots, G_n(t)$ над полем комплексных чисел, удовлетворяющих на $[t_0, T)$ условиям: $|\det G(t)|\neq 0$, эрмитова норма столбцов $G_1(t), \ldots, G_n(t)$ совпадает с заданной положительной функцией $\omega(t)$, т. е. $\|G_j(t)\|=\omega(t)$, $(j=1,2,\ldots n)$

Ниже приводится исследование устойчивости на заданном конечном интервале времени, по отношению к области предельных отклонений, заданной посредством матрицы класса K_Δ^ω, выбор которой связан с формальным преобразованием системы дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимися параметрами, приводящими исследуемую систему к виду, близкому к диагональному, в смысле приведенного определения, где, следуя [5], устойчивость невозмущенного процесса по отношению к области (1.2), заданной на интервале $[t_0, T)$ назовем равномерной на этом интервале, если невозмущенный процесс устойчив в смысле определения на любом отрезке $[t_*, T)$, где $t_* \in [t_0, T)$.

2. Решение многих научно-технических задач сводится, как известно, к исследованию дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами вида

$$L(t)\frac{d^2q}{dt^2}+R(t)\frac{dq}{dt}+N(t)q=h(t,\ q,\ \dot q) \tag{2.1}$$

где $L(t)$, $R(t)$, $N(t)$—квадратные матрицы порядка m, а $h(t,q,\dot q)$—непрерывная вектор-функция.

Будем предполагать, что задача об устойчивости процесса приведена к исследованию на заданном интервале времени $[t_0, T)$ решений системы уравнений возмущенного процесса, представленных в более общем виде

$$L(\tau)\frac{d^2q}{dt^2}+\varepsilon R(\tau)\frac{dq}{dt}+N(\tau),q,=h(\tau,q,\dot q) \tag{2.2}$$

где $\tau=\varepsilon t$—так называемое „медленное время", элементы матрицы $h(\tau,q,\dot q)$ —нелинейные функции отклонений q_j, $\dot q_j$ $(j=1,2,\ldots,m)$—регулярны относительно ε в окрестности точки $\varepsilon=0$ и равномерно по τ на сегменте, соответствующем для τ интервалу времени $[t_0, T)$, имеет место

$$\lim_{q,\dot q\to 0}\frac{h(\tau,q,\dot q)}{\sqrt{\|q\|^2+\|\dot q\|^2}}=0 \tag{2.3}$$

Поскольку система (2.2) при $\varepsilon=1$ совпадает с системой (2.1), то все возможные преобразования системы (2.2), тождественные по ε, могут быть перенесены на систему (2.1), если придать параметру ε значение 1.

На построение формального решения (2.1) присутствие множителя ε при $R(\tau)$ в (2.2) никак не отражается при любой матрице $R(\tau)$. Однако, при построении приближенного решения по формальному решению, погрешность приближений будет тем меньшей, чем «меньше» матрица $R(\tau)$. Следовательно, при изложении метода приближенного исследования системы (2.2), заведомо будем предполагать «малость» по модулю элементов матрицы $R(\tau)$.

Предположим также, что на сегменте, соответствующем для τ интервалу времени $[t_0, T)$ матрицы $L(\tau)$, $R(\tau)$ и $N(\tau)$ имеют нужное число производных по τ, а $L(\tau)$, кроме того, является невырожденной матрицей. Тогда (2.2) можно представить в нормальном виде

$$\frac{dx}{dt}=[U_0(\tau)+\varepsilon\, U_1(\tau)]x+H(\tau,x) \tag{2.4}$$

где

$$U_0(\tau)=\begin{pmatrix}0; & -L^{-1}(\tau)N(\tau)\\ E_m; & 0\end{pmatrix};\quad U_1(\tau)=\begin{pmatrix}-L^{-1}(\tau)\,R(\tau); & 0\\ 0; & 0\end{pmatrix}$$

$$x=\begin{pmatrix}\dfrac{dq}{dt}\\ q\end{pmatrix};\quad H(\tau,x)=\begin{pmatrix}L^{-1}(\tau)h\,(\tau,\,q,\,\dot q)\\ 0\end{pmatrix};$$

а E_m—единичная матрица порядка m.

В работе [6], посвященной построению асимптотического решения системы дифференциальных уравнений типа (2.4), содержащих параметр ε, основываясь на фундаментальные результаты, полученные Н. Н. Боголюбовым [4], в предположении, что $H(\tau,x)$ есть вектор-функция одного частного вида, показано существование преобразований, приводящих к асимптотическому расщеплению системы типа (2.4) на независимые подсистемы меньшего порядка и указаны соответствующие способы построения формального процесса для такого расщепления.

В работах [1], [2] доказана возможность и дан алгоритм асимптотического расщепления системы типа (2.4) в общем случае, когда $H(\tau,x)$—произвольная непрерывная вектор-функция, регулярная относительно ε в окрестности точки $\varepsilon=0$.

Следуя алгоритму, приведенному в [1] можно построить такое невырожденное преобразование

$$x = K^{(r)}(\tau, \varepsilon) y, \tag{2.5}$$

приводящее уравнение (2.4) к виду

$$\frac{dy}{dt} \Lambda^{(r)}(\tau,\varepsilon) y - M^{(r)}(\tau,\varepsilon)\ T^{(r)}(\tau,\varepsilon) y + M^{(r)}(\tau,\varepsilon)\ H(\tau,\ K^{(r)} y) \tag{2.6}$$

где $M^{(r)}(\tau, \varepsilon) = K^{(r)-1}(\tau,\varepsilon)$;

$$T^{(r)}(\tau, \varepsilon) = \varepsilon \frac{dK^{(r)}(\tau,\varepsilon)}{d\tau} - [U_0(\tau) + \varepsilon\ U_1(\tau)] K^{(r)}(\tau,\varepsilon) + K^{(r)}(\tau,\varepsilon)$$

$$\Lambda^{(r)}(\tau,\varepsilon); \tag{2.7}$$

что матрица $\Lambda^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ будет иметь диагональную или, по крайней мере, квазидиагональную структуру, а матрица $T^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ будет удовлетворять условию

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{T^{(r)}(\tau,\varepsilon)}{\varepsilon^r} = 0. \tag{2.8}$$

Пусть на заданном для τ сегменте матрица $L^{-1}(\tau)\ N(\tau)$ имеет простую структуру и не имеет нулевого собственного значения. При этом матрицы $K^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ и $\Lambda^{(r)}\tau,\varepsilon)$ можно построить в форме конечных сумм

$$K^{(r)}(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k\ K^{[k]}(\tau), \tag{2.9}$$

где $K^{[k]}(\tau) = (K_1^{[k]}(\tau), \cdot \cdot \cdot \cdot , K_n^{[k]}(\tau))$;

$$\Lambda^{(r)}(\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k \Lambda^{[k]}(\tau) \tag{2.10}$$

где $\Lambda^{[k]}(\tau) = \text{cliag}\ \{\lambda_1^{[k]}(\tau), \cdot \cdot \cdot \cdot , \lambda_n^{[k]}(\tau)\}$; $n = 2m$.

Подставляя выражения $K_\sigma^{(r)}(\tau,\varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{r} K_\sigma^{[k]}(\tau)$ и $\lambda_\sigma^{(r)}(\tau, \varepsilon) = \sum\limits_{k=0}^{r} \varepsilon^k$ $\lambda_\sigma^{[k]}(\tau)$ в (2.7), получим $T_\sigma^{(r)}(\tau,\varepsilon) = K_\sigma^{[0]}(\tau)\ \lambda_\sigma^{[0]}(\tau) - U_0(\tau)\ K^{[0]}\sigma(\tau) + \sum\limits_{k=1}^{r} \varepsilon^k$

$$[K^{[k]}\sigma(\tau)\ \lambda_\sigma^{[0]}(\tau) + K_\sigma^{[0]}(\tau)\ \lambda_\sigma^{[k]}(\tau) + \frac{dK_\sigma^{[k-1]}(\tau)}{d\tau} - U_0(\tau)\ K_\sigma^{[k]}(\tau) - U_1(\tau)\ K_\sigma^{[k-1]}$$

$$(\tau) + \sum_{\alpha=1}^{k-1} {}_\sigma^{[z-\alpha]}(\tau)\ \lambda_\sigma^{[\alpha]}(\tau)\Big] + \varepsilon^{r+1}\Big[\frac{dK_\sigma^{[r]}(\tau)}{d\tau}\ U_1(\tau)\ K_\sigma^{[r]}(\tau) + \sum_{\nu=1}^{r} \sum_{\beta=\nu}^{r} \varepsilon^{\nu-1}$$

$$K_\sigma^{[r-\beta+\nu]}(\tau)\ \lambda_\sigma^{[\beta]}(\tau)\Big] \quad \cdot \cdot \cdot \cdot \tag{2.11}$$

Следуя алгоритму, приведенному в [1], построим $K_\sigma^{[k]}(\tau)$ и $\lambda_\sigma^{[k]}(\tau)$ ($k = 0,1, \ldots , r$), удовлетворяющими соотношениям

$$U_0(\tau)\ K_\sigma^{[0]}(\tau) = K_\sigma^{[0]}(\tau) \lambda_\sigma^{[0]}(\tau); \tag{2.12}$$

$$U_0(\tau)\ K_\sigma^{[k]}(\tau) = K_\sigma^{[k]}(\tau)\ \lambda_\sigma^{[0]}(\tau) + K_\sigma^{[0]}(\tau)\ \lambda_\sigma^{[z]}(\tau) + D_\sigma^{[k-1]}$$

где

$$D_\sigma^{[k-1]}=\sum_{\alpha=1}^{k-1} K_\sigma^{[k-\alpha]}(\tau)\,\lambda_\sigma^{[\alpha]}(\tau)+\frac{dK_\sigma^{[k-1]}}{d\tau}-U_1(\tau)\,K_\sigma^{[k-1]}(\tau) \quad \cdots \tag{2.13}$$

При этом первое равенство (2.12) будет выполняться тождественно, если принять

$$K_\sigma^{[0]}(\tau)\equiv K_\sigma(\tau);\ \lambda_\sigma^{[0]}(\tau)\equiv\lambda_\sigma(\tau) \tag{2.14}$$

Пусть $K_\sigma(\tau)$—собственный вектор матрицы $U_0(\tau)$, отвечающий собственному значению $\lambda_\sigma(\tau)$ $(\sigma=1, \cdots, n)$

Обозначим через $\gamma_1(\tau), \cdots, \gamma_m(\tau)$— собственные значения, а через $\text{æ}_1(\tau), \cdots, \text{æ}_m(\tau)$— соответствующие собственные векторы матрицы $L^{-1}(\tau)\ N(\tau)$.

Обозначим $\mu(\tau)=\text{æ}^{-1}(\tau)$ и представим $\text{æ}(\tau)$ и $\mu(\tau)$ в виде блочных матриц

$$\varkappa=(\varkappa_1, \cdots, \varkappa_m); \qquad \mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \mu_m\end{pmatrix}$$

Тогда из [3] соотношения между собственными векторами и собственными значениями матриц $L^{-1}(\tau)\ N(\tau)$ и $U_0(\tau)$ можно представить следующими формулами

$$\lambda_\sigma=i\sqrt{|\gamma_j|}\left(\cos\frac{\arg\gamma_j}{2}+i\sin\frac{\arg\gamma_j}{2}\right);$$

$$\gamma_s=i\sqrt{|\gamma_j|}\left(\cos\frac{\arg\gamma_j+2\pi}{2}+i\sin\frac{\arg\gamma_j+2\pi}{2}\right);$$

$$K_\sigma=\begin{pmatrix}\lambda_\sigma & \varkappa_j\\ & \varkappa_j\end{pmatrix};$$

где

$$j=\begin{cases}\sigma \text{ при } \sigma\leqslant m\\ \sigma-m \text{ при } \sigma>m\end{cases};$$

$j=1 \cdots, m;\ \gamma_j\neq0,\ i=\sqrt{-1}$ и, если через Ω_σ и Ω_s обозначить соответственно области определения σ и s, то $\Omega_\sigma, \Omega_s\subset\{1, \cdots, n\}$, $\Omega_\sigma\cap\Omega_s=\varnothing$. Приведенные соотношения позволяют утверждать, что среди каждой пары собственных значений матрицы $U_0(\tau)$, соответствующей одному собственному значению матрицы $L^{-1}(\tau)N(\tau)$, собственные значения матрицы $U_0(\tau)$ отличаются только знаком. Следовательно, если матрицу $\Lambda(\tau)$ представить в блочном виде

$$\Lambda(\tau)=\begin{pmatrix}\Lambda_1(\tau); & 0\\ 0; & \Lambda_2(\tau)\end{pmatrix}$$

где $\Lambda_1(\tau)$ и $\Lambda_2(\tau)$—диагональные матрицы порядка m, то можно выбрать такое размещение собственных значений матрицы $U_0(\tau)$ в диагональной матрице $\Lambda(\tau)$, при котором выполняется равенство

$$\Lambda_1(\tau)=-\Lambda_2(\tau). \tag{2.15}$$

Отсюда имеем

$$K^{[0]}(\tau)=K(\tau)=\begin{pmatrix} \varkappa(\tau)\,\Lambda_1(\tau); & \varkappa(\tau)\,\Lambda_2(\tau) \\ \varkappa(\tau); & \varkappa(\tau) \end{pmatrix} \qquad (2.16)$$

Пусть $K_\sigma^{[0]}(\tau)$, $\lambda_\sigma^{[0]}(\tau)$, $\cdot\cdot\cdot\cdot$, $K_\sigma^{[k-1]}(\tau)$, $\lambda_\sigma^{[k-1]}(\tau)$ уже найдены. При этом $D_\sigma^{[k-1]}(\tau)$ будет известной матрицей. Определим $K_\sigma^{[k]}(\tau)$ и $\lambda_\sigma^{[k]}(\tau)$ Умножим $k+1$-ое равенство (2. 12) слева на $M(\tau)=k^{-1}(\tau)$

$$\Lambda(\tau)\;M(\tau)\;K_\sigma^{[k]}(\tau)=M(\tau)K_\sigma^{[k]}(\tau)\;\lambda_\sigma^{[0]}(\tau)+M(\tau)\;K_\sigma^{[0]}(\tau)\;\lambda_\sigma^{[k]}(\tau)+M(\tau)\;D_\sigma^{[k-1]}(\tau)$$

Введем обозначение

$$Q_\sigma^{[k]}(\tau)=M(\tau)\;K_\sigma^{[k]}(\tau) \qquad (2.18)$$

Матрицу $Q_\sigma^{[k]}(\tau)$, представляющую собой столбец из n элементов, запишем в виде

$$Q_{n\sigma}^{[k]}(\tau)=\begin{vmatrix} q_{1\sigma}^{[k]}(\tau) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{n\sigma}^{[k]}(\tau) \end{vmatrix};$$

где $q_{\delta\sigma}^{[k]}(\tau)=M_\sigma^{[k]}(\tau)\;K_\sigma^{[k]}(\tau)$; $\quad \delta=1,\;\cdot\cdot\cdot\cdot,\;n.$

Так как $\Lambda(\tau)$ имеет диагональную структуру, равенство (2.17) распадается на n независимых алгебраических уравнений

$$\lambda_\delta(\tau)\;q_{\delta\sigma}^{[k]}(\tau)=q_{\delta\sigma}^{[k]}(\tau)\;\lambda_\sigma(\tau)+M_\delta(\tau)\,K_\sigma(\tau)\;\lambda_\sigma^{[k]}(\tau)+M_\delta(\tau)\;D_\sigma^{[k-1]}(\tau);$$
$$(\delta=1,\;\cdot\cdot\cdot\cdot,\;n) \qquad (2.\ 19)$$

Представим столбец $Q_\sigma^{[k]}(\tau)$ в виде

$$Q_\sigma^{[k]}(\tau)=\begin{pmatrix} Q_{1\sigma}^{[k]}(\tau) \\ \\ Q_{2\sigma}^{[k]}(\tau) \end{pmatrix};$$

где

$$Q_{1\sigma}^{[k]}(\tau)=\begin{vmatrix} q_{1\sigma}^{[k]}(\tau) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{m\sigma}^{[k]}(\tau) \end{vmatrix}; \qquad Q_{2\sigma}(\tau)=\begin{vmatrix} q_{m+1,\sigma}^{[k]}(\tau) \\ \cdot\cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{n\sigma}^{[k]}(\tau) \end{vmatrix}.$$

Тогда из (2.16) и (2.18) имеем

$$K_\sigma^{[k]}(\tau)\begin{pmatrix} \text{ӕ}(\tau)\;\Lambda_1(\tau); & \text{ӕ}(\tau)\;\Lambda_2(\tau) \\ \text{ӕ}(\tau); & \text{ӕ}(\tau) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{1\sigma}^{[k]}(\tau) \\ \\ Q_{2\sigma}^{[k]}(\tau) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \text{ӕ}(\tau)\Lambda_1(\tau)Q_{1\sigma}^{[k]}+ \\ \text{ӕ}(\tau)Q_{1\sigma}^{[k]}+ \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} +\text{ӕ}(\tau)\Lambda_2(\tau)Q_{2\sigma}^{[k]}(\tau) \\ +\text{ӕ}(\tau)Q_{2\sigma}^{[k]}(\tau) \end{matrix}\Bigg).$$

С учетом (2.15) это равенство может быть переписано в виде

$$K_\sigma^{[k]}(\tau)=\begin{pmatrix} \text{æ}(\tau)\Lambda_1(\tau)(Q_{1\sigma}^{[k]}(\tau)-Q_{2\sigma}^{[k]}(\tau)) \\ \text{æ}(\tau)(Q_{1\sigma}^{[k]}(\tau)+Q_{2\sigma}^{[k]}(\tau)) \end{pmatrix} \qquad 2.20$$

Рассмотрим случай, когда в (2.19) $\delta=\sigma$. Принимая во внимание, что

$$M_\sigma(\tau)K_\sigma(\tau)=\begin{cases}1 & \text{при } \delta=\sigma \\ 0 & \text{при } \delta\neq\sigma\end{cases};$$

имеем

$$\lambda_\sigma(\tau)q_{\sigma\sigma}^{[k]}(\tau)=q_{\sigma\sigma}^{[k]}(\tau)\ \lambda_\sigma(\tau)+\lambda_\sigma^{[k]}(\tau)+M_\sigma(\tau)\ D_\sigma^{[k-1]}(\tau),$$

откуда

$$\lambda_\sigma^{[k]}(\tau)=-M_\sigma(\tau)\ D_\sigma^{[k-1]}(\tau) \qquad (2.21)$$

Представим матрицу $D_\sigma^{[k-1]}(\tau)$ в виде

$$D_{\sigma 1}^{[k-1]}(\tau)=\begin{pmatrix} D_{1\sigma}^{[k-1]}(\tau) \\ D_{2\sigma}^{[k-1]}(\tau)\end{pmatrix}$$

где $D_{1\sigma}^{[k-1]}$ и $D_{2\sigma}^{[k-1]}(\tau)$ столбцевые матрицы порядка m.

Тогда из (2.13) и (2.20) имеем

$$D_{1\sigma}^{[k-1]}(\tau)=\frac{d}{d\tau}\left[\text{æ}(\tau)\ \Lambda_1(\tau)\Big(Q_{1\sigma}^{[k-1]}(\tau)-Q_{2\sigma}^{[k-1]}(\tau)\Big)\right]+\text{æ}(\tau)\Lambda_1(\tau)\sum_{\alpha=1}^{k-1}\Big(Q_{1\sigma}^{[k-\alpha]}$$

$$(\tau)-Q_{2\sigma}^{[k-\alpha]}(\tau)\Big)\ \lambda_\sigma^{[\alpha]}(\tau)+L^{-1}(\tau)\ R(\tau)\text{æ}(\tau)\ \Lambda_1(\tau)\ \Big(Q_{1\sigma}^{[k-1]}(\tau)-\ Q_{2\sigma}^{[k-1]}(\tau)\Big);$$

$$D_{2\sigma}^{[k-1]}(\tau)=\frac{d}{d\tau}\left[\text{æ}(\tau)\Big(Q_{1\sigma}^{[k-1]}(\tau)+Q_{2\sigma}^{[k-1]}(\tau)\Big)\right]+\text{æ}(\tau)\sum_{\alpha=1}^{k-1}\Big(Q_{1\sigma}^{[k-\alpha]}(\tau)+$$

$$Q_{2\sigma}^{[k-\alpha]}(\tau)\Big)\lambda_\sigma^{[\alpha]}(\tau);\quad \sigma=1,\dots,n;\ n=2m.\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad (2.22)$$

Из (2.21) и (2.22) следует что

$$\lambda_\sigma^{[k]}(\tau)=-\frac{1}{2}\mu_j(\tau)\left\{\frac{1}{\lambda_\sigma(\tau)}\left[\frac{d}{d\tau}\text{æ}(\tau)\ \Lambda_1(\tau)\Big(Q_{1\sigma}^{[k-1]}(\tau)-Q_{2\sigma}^{[k-1]}(\tau)\Big)+\text{æ}(\tau)\Lambda_1(\tau)\right.\right.$$

$$\left.\sum_{\alpha=1}^{k-1}\Big(Q_{1\sigma}^{[k-\alpha]}(\tau)-Q_{2\sigma}^{[k-\alpha]}(\tau)\Big)\lambda_\sigma^{[\alpha]}(\tau)+L^{-1}(\tau)\ R(\tau)\text{æ}(\tau)\Lambda_1(\tau)\Big(Q_{1\sigma}^{[k-1]}(\tau)-Q_{2\sigma}^{[k-1]}\Big)\right]$$

$$\left.+\frac{d}{d\tau}\text{æ}(\tau)\Big(Q_{1\sigma}^{[k-1]}(\tau)+Q_{2\sigma}^{[k-1]}(\tau)\Big)+\text{æ}(\tau)\sum_{\alpha=1}^{k-1}\Big(Q_{1\sigma}^{[k-\alpha]}(\tau)+Q_{2\sigma}^{[k-\alpha]}(\tau)\Big)\lambda_\sigma^{[\alpha]}(\tau)\right\}; \qquad (2.23)$$

где значения индексов j и σ связаны соотношением

$$j=\begin{cases}\sigma & \text{при } \sigma\leqslant m \\ \sigma-m & \text{при } \sigma>m\end{cases};$$

$\sigma=1,\cdot\cdot\cdot,n;\ n=2m;\ k=1,\cdot\cdot\cdot,r.$

Рассмотрим случай, когда в (2.19) $\delta\neq\sigma$. При этом имеем

$$\lambda_\delta(\tau)\ q_{\delta\sigma}^{[k]}(\tau)=q_{\delta\sigma}^{[k]}(\tau)\lambda_\sigma(\tau)+M_\delta(\tau)\ D_\sigma^{[k-1]}(\tau)$$

Отсюда

$$q_{\delta\sigma}^{[k]}(\tau)=\frac{1}{\lambda_\delta(\tau)-\lambda_\sigma(\tau)}M_\delta(\tau)D_\sigma^{[k-1]}(\tau) \qquad (2.24)$$

где $\delta\neq\sigma$.

Учитывая, что

$$M_{\delta}(\tau)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_{\delta}(\tau)}\mu_{l}(\tau):\ \ \mu_{l}(\tau)\right)$$

где

$$l=\begin{cases}\delta & \text{при } \delta\leq m\\ \delta-m & \text{при } \delta>m\end{cases},$$

Из (2.22) и (2.24) имеем

$$q^{[k]}_{\delta\sigma}(\tau)=\frac{1}{2(\lambda_{\delta}(\tau)-\lambda_{\sigma}(\tau))}\mu_{l}(\tau)\left\{\frac{1}{\lambda_{\delta}(\tau)}\left[\frac{d}{d\tau}\text{ӕ}(\tau)\Lambda_{1}(\tau)\left(Q_{1\sigma}(\tau)-Q^{[k-1]}_{2\sigma}(\tau)\right)+\right.\right.$$
$$+\text{ӕ}(\tau)\Lambda_{1}(\tau)\sum_{\alpha=1}^{k-1}\left(Q^{[k-\alpha]}_{1\sigma}-Q^{[k-\alpha]}_{2\sigma}\right)\gamma^{[\alpha]}_{\sigma}(\tau)+L^{-1}(\tau)R(\tau)\text{ӕ}(\tau)\Lambda_{1}(\tau)\left(Q^{[k-1]}_{1\sigma}(\tau)-\right.$$
$$\left.\left.Q^{[k-1]}_{2\sigma}(\tau)\right)\right]+\frac{d}{d\tau}\text{ӕ}(\tau)\left(Q^{[k-1]}_{1\sigma}(\tau)+Q^{[k-1]}_{2\sigma}(\tau)\right)+\text{ӕ}(\tau)\sum_{\alpha=4}^{k-1}\left(Q^{[k-\alpha]}_{1\sigma}(\tau)+Q^{[k-\alpha]}_{2\sigma}\right.$$
$$\left.\left.(\tau)\right)\lambda^{[\alpha]}_{\sigma}(\tau)\right\}; \tag{2.25}$$

$\delta=1,\ldots,n$; $\sigma=1,\ldots,n$; $\delta\neq\sigma$; $n=2m$; $k=1,\ldots,r$.

Возможность произвольного выбора элементов $q^{[k]}_{\sigma\sigma}(\tau)$ в дальнейшем будет использована для нормирования столбцов матрицы $K^{(r)}(\tau,\varepsilon)$. Соотношения (2.14), (2.16), (2.20), (2.22), (2.23) и (2.25) позволяют построить $K^{[k]}_{\sigma}(\tau)$ и $\lambda^{[k]}_{\sigma}(\tau)$ так, чтобы выполнялись равенства (2.12). При этом равенство (2.11) примет вид

$$T^{(r)}_{\sigma}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon^{r+1}\left[\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\beta=\nu}^{r}\varepsilon^{\nu-1}K^{[r-\beta+\nu]}_{\sigma}(\tau)\gamma^{[\beta]}_{\sigma}(\tau)-U_{1}(\tau)K^{[r]}_{\sigma}(\tau)+\right.$$
$$\left.+\frac{dK^{[r]}_{\sigma}(\tau)}{d\tau}\right]. \tag{2.26}$$

Представим матрицу $T^{(r)}_{\sigma}(\tau,\varepsilon)$ в виде

$$T^{(r)}_{\sigma}(\tau,\varepsilon)=\begin{pmatrix}T^{(r)}_{1\sigma}(\tau,\varepsilon)\\ T^{(r)}_{2\sigma}(\tau,\varepsilon)\end{pmatrix}$$

где $T^{(r)}_{1\sigma}(\tau,\varepsilon)$ и $T^{(r)}_{2\sigma}(\tau,\varepsilon)$—столбцевые матрицы порядка m.

Тогда, подставляя (2.20) в (2.26), с учетом структуры матрицы $U_{1}(\tau)$ из (2.4), имеем

$$T^{(r)}_{1\sigma}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon^{r+1}\left[\frac{d}{d\tau}\text{ӕ}(\tau)\Lambda_{1}(\tau)\left(Q^{[r]}_{1\sigma}(\tau)-Q^{[r]}_{2\sigma}(\tau)\right)+\text{ӕ}(\tau)\Lambda_{1}(\tau)\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\beta=\nu}^{r}\varepsilon^{\nu-1}\right.$$
$$\left.\left(Q^{[r-\beta+\nu]}_{1\sigma}(\tau)-Q^{[r-\beta+\nu]}_{2\sigma}(\tau)\right)\gamma^{[\beta]}_{\sigma}(\tau)+L^{-1}(\tau)\text{ӕ}(\tau)\Lambda_{1}(\tau)\left(Q^{[r]}_{1\sigma}(\tau)-Q^{[r]}_{2\sigma}(\tau)\right)\right];$$

$$T^{(r)}_{2\sigma}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon^{r+1}\left[\frac{d}{d\tau}\text{ӕ}(\tau)\left(Q^{[r]}_{1\sigma}(\tau)+Q^{[r]}_{2\sigma}(\tau)\right)+\text{ӕ}(\tau)\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\beta=\nu}^{r}\varepsilon^{\nu-1}\left(Q^{[r-\beta+\nu]}_{1\sigma}+\right.\right.$$
$$\left.\left.Q^{[r-1+\nu]}_{2\sigma}(\tau)\right)\lambda^{[\beta]}_{2\sigma}(\tau)\right]; \tag{2.27}$$

где $\sigma=1,\ldots,n$.

Из (2.27) и (2.18) видно, что при ограниченности членов конечного ряда (2.9), условие (2.8) выполняется.

Таким образом, доказана возможность и дан алгоритм, по которому посредством собственных векторов и собственных значений матрицы m-го порядка $L^{-1}(\tau)$ $N(\tau)$ можно построить такое преобразование (2.5), при котором $\Lambda^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ в (2.6) будет иметь диагональную структуру, а матрица $T^{(r)}(\tau, \varepsilon)$ будет удовлетворять условию (2.8).

Формулы (2.14), (2.16), (2.20), (2.22), (2.23), (2.25) и (2.27) являются рекуррентными. С их помощью могут быть последовательно определены все члены конечного ряда (2.9) и (2.10), а, следовательно, и все переходные матрицы для приведения уравнений (2.2) к виду (2.6).

Ниже приводится одна закономерность при построении членов конечного ряда (2.10).

3. Закономерность построения членов конечного ряда (2.10) сформулируем следующим образом.

Теорема 3.1. Пусть уравнение (2.2) невырожденным преобразованием (2.5) приводится к виду (2.6), где $\Lambda^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ имеет диагональную структуру и определяется формой конечного ряда (2.10), а матрица $T^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ удовлетворяет условию (2.8).

Тогда для произвольного члена конечного ряда (2.10) $\Lambda^{[k]}(\tau)= =\mathrm{diag}\{\lambda_1^{[k]}(\tau), \cdot \cdot \cdot, \lambda_n^{[k]}(\tau)\}$ любому элементу $\lambda_\sigma^{[k]}(\tau)$ соответствует такое $\lambda_\delta^{[k]}(\tau)$, что выполняется равенство

$$\lambda_\sigma^{[k]}(\tau)=(-1)^{k+1}\,\lambda_\delta^{[k]}(\tau) \tag{3.1}$$

где $\sigma=1, \cdot \cdot \cdot, n$; $\delta=1, \cdot \cdot \cdot, n$; $\delta\neq\sigma$.

Доказательство. Представим матрицу $\Lambda^{[k]}(\tau)$ в блочном виде

$$\Lambda^{[k]}=\mathrm{diag}\,\{\Lambda_1^{[k]}(\tau),\ \Lambda_2^{[k]}(\tau)\};$$

где $\Lambda_1^{[k]}(\tau)$ и $\Lambda_2^{[k]}(\tau)$ являются диагональными матрицами порядка m. Из (2.15) и (2.14) имеем

$$\Lambda_1^{[o]}(\tau)=-\Lambda_2^{[o]}(\tau) \tag{3.2}$$

С целью обнаружения закономерностей при построении $\Lambda_1^{[k]}(\tau)$ и $\Lambda_2^{[k]}(\tau)$ в общем случае, построим $\Lambda_1^{[1]}(\tau)$, $\Lambda_2^{[1]}(\tau)$, $\Lambda_1^{[2]}(\tau)$, $\Lambda_2^{[2]}(\tau)$, $\Lambda_1^{[3]}(\tau)$, $\Lambda_2^{[3]}(\tau)$. Из (2.14) и (2.18) видно, что

$$Q^{[o]}(\tau)=E_n$$

где E_n—единичная матрица порядка n.

Следовательно, из (2.23) имеем

$$\lambda_\sigma^{[1]}(\tau)=-\frac{1}{2}\mu_j(\tau)\left[\frac{1}{\lambda_\sigma(\tau)}\,\frac{d\varkappa_j(\tau)\lambda_\sigma(\tau)}{d\tau}+L^{-1}(\tau)\,R(\tau)\varkappa_j(\tau)+\frac{d\varkappa_j(\tau)}{d\tau}\right] \tag{3.3}$$

где $\quad j=\begin{cases}\sigma & \text{при } \sigma\leqslant m\\ \sigma-m & \text{при } \sigma>m\end{cases};\quad \sigma=1, \cdot \cdot \cdot, n;\ n=2m.$

Из (3.3) легко видеть, что

$$\lambda_j^{[1]}(\tau)=\lambda_{j+m}^{(1)}(\tau) \tag{3.4}$$

Поскольку

$$\Lambda_1^{[k]}(\tau)=\mathrm{diag}\left\{\lambda_1^{[k]}(\tau), \ldots, \lambda_j^{[k]}(\tau), \ldots, \lambda_m^{[k]}(\tau)\right\}; \tag{3.5}$$

$$\Lambda_2^{(k)}(\tau)=\mathrm{diag}\left\{\lambda_{m+1}^{(k)}(\tau), \ldots, \lambda_{j+m}^{(k)}(\tau), \ldots, \lambda_n^{(k)}(\tau)\right\};$$

из (3.4) имеем

$$\Lambda_1^{(1)}(\tau)=\Lambda_2^{(1)}(\tau). \tag{3.6}$$

Используя (2.25), определим

$$q_{\delta\sigma}^{(1)}(\tau)=\frac{1}{2(\lambda_\delta(\tau)-\lambda_\sigma(\tau))}\mu_i(\tau)\left[\frac{1}{\lambda_\delta(\tau)}\left(\frac{d\varkappa_j(\tau)\lambda_\sigma(\tau}{d\tau}+L^{-1}(\tau)\ R(\tau)\varkappa_j(\tau)\lambda_\sigma(\tau)\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{d\varkappa_j(\tau)}{d\tau}\right] \tag{3.7}$$

где

$$i=\begin{cases}\delta & \text{при } \delta\leqslant m\\ \delta-m & \text{при } \delta>m\end{cases};\quad j=\begin{cases}\sigma & \text{при } \sigma\leqslant m\\ \sigma-m & \text{при } \sigma<m\end{cases};$$

$$\delta=1, \ldots, n;\ \sigma=1, \ldots, n;\ \delta\neq\sigma;\ n=2m.$$

Из 3.7 видно, что

$$q_{\delta\sigma}^{(1)}(\tau)=-q_{\delta+m,\ \sigma+m}^{(1)}(\tau)\ \text{при}\ \ \delta\leqslant m;\ \sigma\leqslant m;\ \delta\neq\sigma;$$

$$q_{\delta\sigma}^{(1)}(\tau)=-q_{\delta-m,\ \sigma+m}^{(1)}(\tau)\ \text{при}\ \ \delta>m;\ \sigma\leqslant m,$$

$$q_{\delta\sigma}^{(1)}(\tau)=-q_{\delta-m,\ \sigma-m}^{(1)}(\tau)\ \text{при}\ \ \delta>m;\ \sigma>m;\ \delta\neq\sigma$$

$$q_{\delta\sigma}^{(1)}(\tau)=-q_{\delta+m,\ \sigma-m}^{(1)}(\tau)\ \text{при}\ \ \delta\leqslant m;\ \sigma>m. \quad \ldots \tag{3.8}$$

Если матрицу $Q^{(k)}(\tau)$ представить в блочном виде

$$Q^{(k)}(\tau)=\begin{pmatrix} Q_1^{(k)}(\tau); & Q_3^{(k)}(\tau)\\ Q_2^{(k)}(\tau); & Q_2^{(k)}(\tau)\end{pmatrix} \tag{3.9}$$

где $Q_1^{(k)}(\tau)$, $Q_2^{(k)}(\tau)$, $Q_3^{(k)}(\tau)$, $Q_4^{(k)}(\tau)$ представляют собой квадратные матрицы m-го порядка, то из (3.8) следует, что

$$Q_2^{(1)}(\tau)=-Q_3^{(1)}(\tau). \tag{3.10}$$

В случае, если произвольные диагональные элементы $q_{\sigma\sigma}^{(k)}(\tau)$ выбраны для $Q_1^{(1)}(\tau)$ и $Q_4^{(1)}(\tau)$ соответственно равными по модулю и обратными по знаку, выполняется равенство

$$Q_1^{(1)}(\tau)=-Q_4^{(1)}(\tau). \tag{3.11}$$

Используя (2.23); получим

$$\lambda_\sigma^{(2)}(\tau)=-\frac{1}{2}\mu_j(\tau)\left\{\frac{1}{\lambda_\sigma(\tau)}\left[\frac{d}{d\tau}\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1\sigma}^{(1)}(\tau)-Q_{2\sigma}^{(1)}(\tau)\right)+\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\right.\right.$$

$$\left.\left(Q_{1\sigma}^{(1)}(\tau)-Q_{2\sigma}^{(1)}(\tau)\right)\lambda_\sigma^{(1)}(\tau)+L^{-1}(\tau)\ R(\tau)\Lambda_1(\tau)\right)\Bigg]+\left[\frac{d}{d\tau}\ \varkappa(\tau)\left(Q_{1\sigma}^{(1)}(\tau)+\right.\right.$$

$$\left.\left.G_{2\sigma}^{(1)}(\tau)\right)+\varkappa(\tau)\left(Q_{1\sigma}^{(1)}(\tau)+Q_{2\sigma}^{(1)}(\tau)\right)\lambda_\sigma^{(1)}(\tau)\ \right]\Bigg\} \tag{3.12}$$

где $$j=\begin{cases}\sigma & \text{при } \sigma\leqslant m\\ \sigma-m & \text{при } \sigma>m\end{cases}$$

$\sigma=1,\cdot\ \cdot\ \cdot, n=2m$.

Из (3.10) и (3.11) легко видеть, что при изменении индекса σ на m выражение $Q_{1\sigma}^{(1)}(\tau)-Q_{2\sigma}^{(1)}(\tau)$ не меняется, в то время, как выражение $Q_{1\sigma}^{(1)}(\tau)+Q_{2\sigma}^{(1)}(\tau)$ меняет знак на противоположный, сохраняя по модулю свое значение.

Таким образом, из (3.12) следует, что

$$\lambda_j^{(2)}(\tau)=-\lambda_{j+m}^{(2)}(\tau) \tag{3.13}$$

Учитывая (3.5), имеем

$$\Lambda_1^{(2)}(\tau)=-\Lambda_2^{(2)}(\tau). \tag{3.14}$$

Из (2.25) определим $q_{\delta\sigma}^{(2)}(\tau)$

$$q_{\delta\sigma}^{(2)}(\tau)=\frac{1}{2(\lambda_\delta(\tau)-\lambda_\sigma(\tau))}\mu_i(\tau)\left\{\frac{1}{\lambda_\delta(\tau)}\left[\frac{d}{d\tau}\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1\sigma}^{(1)}(\tau)-Q_{2\sigma}^{(1)}(\tau)\right)+\right.\right.$$
$$\left.+\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)(Q_\sigma^{(1)}(\tau-Q_{2\sigma}^{(1)}(\tau))\lambda_\sigma^{(1)}(\tau)+L^{-1}(\tau)R(\tau)\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1\sigma}^{(1)}(\tau)-Q_{2\sigma}^{(1)}(\tau)\right)\right]+$$
$$\left.\frac{d}{d\tau}\varkappa(\tau)\left(Q_{1\sigma}^{(1)}(\tau)+Q_{2\sigma}^{(1)}(\tau)\right)+\varkappa(\tau)\left(Q_{1\sigma}^{(1)}(\tau)+Q_{2\sigma}^{(1)}(\tau)\right)\lambda_\sigma^{(1)}(\tau)\right\} \tag{3.15}$$

где $$i=\begin{cases}\delta & \text{при } \delta\leqslant m\\ \delta-m & \text{при } \delta>m\end{cases};$$

$\delta=1,\cdot\ \cdot\ \cdot, n,\ \sigma=1,\cdot\ \cdot\ \cdot; n;\ n=2m;\ \delta\neq\sigma.$

Из (3.15) следует

$$\begin{aligned}
&q_{\delta\sigma}^{(2)}(\tau)=q_{\delta+m,\ \sigma+m}^{(2)}(\tau) && \text{при} && \delta\leqslant m;\ \sigma\leqslant m;\ \delta\neq\sigma;\\
&q_{\delta\sigma}^{(2)}(\tau)=q_{\delta-m,\ \sigma+m}^{(2)}(\tau) && \text{при} && \delta>m;\ \sigma\leqslant m;\\
&q_{\delta\sigma}^{(2)}(\tau)=q_{\delta-m,\ \sigma-m}^{(2)}(\tau) && \text{при} && \delta>m;\ \sigma>m;\ \delta\neq\sigma;\\
&q_{\delta\sigma}^{(2)}(\tau)=q_{\delta+m,\ \sigma-m}^{(2)}(\tau) && \text{при} && \delta\leqslant m;\ \sigma>m.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Из (3.9) и (3.16) следует, что

$$Q_2^{(2)}(\tau)=Q_3^{(2)}(\tau) \tag{3.17}$$

В случае, если произвольные диагональные элементы $q_{\sigma\sigma}^{(2)}(\tau)$ выбраны для $Q_1^{(2)}(\tau)$ и $Q_4^{(2)}(\tau)$ соответственно равными, выполняется равенство

$$Q_1^{(2)}(\tau)=Q_4^{(2)} \tag{3.18}$$

Из (2. 23) имеем

$$\lambda^{(\sigma)}(\tau)=-\frac{1}{2}\mu_j(\tau)\left\{\frac{1}{\lambda_j(\tau)}\left[\frac{d}{d\tau}\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1\sigma}^{(2)}(\tau)-Q_{2\sigma}^{(2)}(\tau)\right)+\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1\sigma}^{(2)}(\tau)-\right.\right.\right.$$
$$\left.Q_{2\sigma}^{(2)}(\tau)\right)\lambda_\sigma^{(1)}(\tau)+\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1\sigma}^{(1)}(\tau)-Q_{2\sigma}^{(1)}(\tau)\right)\lambda_\sigma^{(2)}(\tau)+L^{-1}(\tau)R(\tau)\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1\sigma}^{(2)}(\tau)-\right.$$

$$-Q^{(2)}_{2\sigma}(\tau)\Big)\Big] + \frac{d}{d\tau}\varkappa(\tau)\Big(Q^{(2)}_{1\sigma}(\tau)+Q^{(2)}_{2\sigma}(\tau)\Big)+\varkappa(\tau)\Big(Q^{(2)}_{1\sigma}(\tau)+Q^{(2)}_{2\sigma}(\tau)\Big)\lambda^{(1)}_{\sigma}(\tau)+\varkappa(\tau)$$

$$\Big(Q^{(1)}_{1\sigma}(\tau)+Q^{(1)}_{2\sigma}(\tau)\Big)\lambda^{(2)}_{\sigma}(\tau)\Big\}$$

где
$$j=\begin{cases}\sigma & \text{при} \quad \sigma\leq m\\ \sigma-m & \text{при} \quad \sigma>m\end{cases}; \qquad (3.19)$$

$\sigma=1,\cdot\cdot\cdot, n;\ \ n=2m.$

Из (3.17) и (3.18) легко видеть, что при изменении индекса σ на m выражение $Q^{(2)}_{1\sigma}(\tau)-Q^{(2)}_{2\sigma}(\tau)$ меняет знак на противоположный, сохраняя по модулю свое значение, в то время, как выражение $Q^{(2)}_{1\sigma}(\tau)+Q^{(2)}_{2\sigma}(\tau)$ не меняется.

Таким образом, из (3.17) следует, что

$$\lambda^{(3)}_{j}(\tau)=\lambda^{(3)}_{j+m}(\tau) \qquad (3.20)$$

Учитывая (3. 5), имеем

$$\Lambda^{(3)}_{1}(\tau)=\Lambda^{(3)}_{2}(\tau) \qquad (3.21)$$

Обобщая полученные результаты, для первых четырех членов разложения (2.10) могут быть установлены следующие закономерности. Как следует из (2.15), (2.14), (3.4), (3.39) и (3.20), для членов разложения (2.10) при нулевой и четных степенях ε каждому из диагональных элементов соответствует другой—равный ему по модулю и обратный по знаку, з при нечетных степенях ε каждому из диагональных элементов соответствует равный ему другой.

Размещение вышеуказанных пар элементов, при котором индексы при элементах каждой пары отличаются на m, приводит к выполнению (3.2), (3.6), (3.14) и (3.21). При этом, как видно из (3.8) и (3.16), выражение $Q^{(k)}_{1\sigma}(\tau)-Q^{(k)}_{2\sigma}(\tau)$, где $k=1,2$, при изменении индекса σ на m меняет знак, сохраняя по модулю свое значение, для четного k и не меняется при нечетном k. Для выражения $Q^{(k)}_{1\sigma}(\tau)+Q^{(k)}_{2\sigma}(\tau)$, где $k=1, 2$; наблюдается обратное.

Пусть полученные условия выполняются для $k-1$-го члена разложения (2.10). Докажем, что те же закономерности наблюдаются и при построении k—го члена разложения.

а). Допустим k—четное число.

Тогда выражение $Q^{(k-1)}_{1\sigma}(\tau)-Q^{(k-1)}_{2\sigma}(\tau)$ в (2.23) при изменении индекса σ на m не меняется, а выражение $Q^{(k-1)}_{1\sigma}(\tau)+Q^{(k-1)}_{2\sigma}(\tau)$, сохраняя свое значение по модулю, меняет знак на противоположный.

Выражение $\sum\limits_{\alpha=1}^{k-1}\Big(Q^{(k-\alpha)}_{1\sigma}(\tau)-Q^{(k-\alpha)}_{2\sigma}(\tau)\Big)\lambda^{(\alpha)}_{\sigma}(\tau)$ в (2.23) не меняется при изменении индекса σ на m, поскольку для всех значений $\alpha=1,\cdot\cdot\cdot, k-1$; выражения $Q^{(k-\alpha)}_{1\sigma}(\tau)-Q^{(k-\alpha)}_{2\sigma}(\tau)$ и $\lambda^{(\alpha)}_{\sigma}(\tau)$, сохраняя свои значения по модулю, либо одновременно меняют знак, либо остаются без изменений. Из аналогичных соображений следует, что выражение $\sum\limits_{\alpha=1}^{k-1}\Big(Q^{(k-\alpha)}_{1\sigma}(\tau)+Q^{(k-\alpha)}_{2\sigma}(\tau)\Big)\lambda^{(\alpha)}_{\sigma}(\tau)$ в (2.23) сохраняя свое значение по модулю, меняет знак на противоположный при изменении индекса σ на m.

Следовательно, для четных k при изменении индекса σ на m выражение $\lambda_\sigma^{(k)}(\tau)$ из (2.23), сохраняя свое значение по модулю, меняет знак на противоположный.

б). Допустим k—нечетное число.

Рассуждения, совершенно аналогичные случаю а) приводят к следующему выводу: для нечетных k выражение $\lambda_\sigma^{(k)}(\tau)$ из (2.23) не меняется при изменении индекса σ на m.

Таким образом, доказано, что

$$\lambda_\sigma^{(k)}(\tau)=(-1)^{k+1}\,\lambda_\delta^{(k)}(\tau) \tag{3.22}$$

где $|\delta-\sigma|=m$ и, если области определения δ и σ обозначить соответственно через Ω_δ и Ω_σ, то и Ω_δ, $\Omega_\sigma \subset \{1, \cdot\cdot\cdot, n\}$; $\Omega_\delta \cap \Omega_\sigma = \varnothing$.

Следовательно,
$$\Lambda_1^{(k)}(\tau)=(-1)^{k+1}\,\Lambda_2^{(k)}(\tau) \tag{3.23}$$

Очевидно, что размещение элементов диагональной матрицы $\Lambda^{(k)}(\tau)$, при котором выполняются условия (3.22) и (3.23), не является необходимым, а только существенным образом сокращает схему расчета членов конечного ряда (2.10) и совершенно не влияет на общность условия (3.1) и формулировки теоремы. Теорема доказана.

Следствие 3.1. Если матрицу преобразования (2.5) построить так, чтобы на сегменте, соответствующем для τ рассматриваемому интервалу времени $[t_0,T)$, выполнялись условия (3.22) и (3.23), то

$$Q_1^{(k)}(\tau)=(-1)^k Q_4^{(k)}(\tau);\qquad Q_2^{(k)}(\tau)=(-1)^k\,Q_3^{(k)}(\tau); \tag{3.24}$$

где $Q_1^{(k)}(\tau)$, $Q_2^{(k)}(\tau)$, $Q_3^{(k)}(\tau)$, $Q_4^{(k)}(\tau)$ определяются из (2.18) и (3.9), $k=1\,\cdot\cdot\cdot, r$.

Действительно, обоснование возможности такого построения матрицы преобразования (2.5), при котором выполняются равенства (3.22) и (3.23), проводились в предположении, что

$$q_{\sigma s}^{(k)}(\tau)=(-1)^j\,q_{\delta\delta}^{(k)}(\tau) \tag{3.25}$$

где $|s-\sigma|=m$, а на области определения s и σ накладываются те же ограничения, что и в (3.22).

Следовательно, условия (3.10), (3.11), (3.17), (3.18) и рассуждения, приведенные в ходе доказательства теоремы 3.1, полностью подтверждают справедливость условия (3.24).

Построим матрицу $M^{(r)}(\tau, \varepsilon)$ в форме конечного ряда

$$M^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\,M^{[k]}(\tau) \tag{3.26}$$

Тогда из (2.9) и (3.26) имеем

$$M^{(r)}(\tau,\varepsilon)\,K^{(r)}(\tau,\varepsilon)=M^{(o)}(\tau)\,K^{(o)}(\tau)+\sum_{k=1}^{r} r^k\sum_{\alpha=0}^{k}M^{(k-\alpha)}(\tau)\,K^{(\alpha)}(\tau)+r^{r+1}\sum_{\nu=1}^{r}\sum_{\beta=\nu}^{r}r^{\nu-1}M^{(r-\beta+\nu)}(\tau)\,K^{(\beta)}(\tau). \tag{3.27}$$

Члены конечного ряда (3.26) можно построить так, чтобы первая двойная сумма в (3.27) обратилась в нуль.

Действительно,

$$\sum_{\alpha=0}^{k} M^{(k-\alpha)}(\tau)\ K^{(\alpha)}(\tau)=M^{(k)}(\tau)\ K^{(0)}(\tau)+\sum_{\alpha=1}^{k} M^{(k-\alpha)}(\tau)\ K^{(\alpha)}(\tau).$$

Отсюда легко видеть, что при

$$M^{(k)}(\tau)=-\left[\sum_{\alpha=1}^{k} M^{(k-\alpha)}(\tau)\ K^{(\alpha)}(\tau)\right]M^{(0)}(\tau),$$

первая двойная сумма в (3.27) обращается в нуль.

Из (2.15) и (2.16) зададим матрицу $M^{(0)}(\tau)$ в виде

$$M^{(0)}(\tau)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \Lambda_1^{-1}(\tau)\ \mu(\tau);\ \mu(\tau) \\ -\Lambda_1^{-1}(\tau)\ \mu(\tau);\ \mu(\tau)\end{pmatrix} \tag{3.28}$$

где, как известно, $\mu(\tau)=\varkappa^{-1}(\tau)$.

Тогда из (3.16), (3.27) и (3.28), следует, что при

$$M^{(k)}(\tau)=-\left[Q^{(k)}(\tau)+\sum_{\alpha=1}^{k-1} M^{(k-\alpha)}(\tau)\ K^{(\alpha)}(\tau)\right]M^{(0)}(\tau) \tag{3.29}$$

матрица $M^{(r)}(\tau,\varepsilon)$, определяемая равенством (3.26), с точностью до величин порядка ε^{r+1} является обратной для матрицы $K^{(r)}(\tau,\varepsilon)$. Соотношение (3.29) является рекуррентным, с ее помощью могут быть последовательно определены все члены конечного ряда (3.26).

Действительно, из (3. 29) имеем

$$M^{(1)}(\tau)=-Q^{(1)}(\tau)\ M^{(0)}(\tau);$$

$$M^{(2)}(\tau)=-[Q^{(2)}(\tau)-Q^{(1)}(\tau)\ Q^{(1)}(\tau)]\ M^{(0)}(\tau)$$

$$M^{(3)}(\tau)=-[Q^{(3)}(\tau)-(Q^{(2)}(\tau)-Q^{(1)}(\tau)Q^{(1)}(\tau))Q^{(1)}(\tau)-Q^{(1)}(\tau)Q^{(2)}(\tau)]M^{(0)}(\tau);$$

$$M^{(4)}(\tau)=-[Q^{(4)}(\tau)+M^{(3)}(\tau)K^{(1)}(\tau)+M^{(2)}(\tau)K^{(2)}+M^{(1)}(\tau)K^{(3)}(\tau)]\ M^{(0)}(\tau)=$$
$$=-\{Q^{(4)}(\tau)-[Q^{(3)}(\tau)-(Q^{(2)}(\tau)-Q^{(1)}(\tau)\ Q^{(1)}(\tau)\ Q^{(1)}(\tau)-Q^{(1)}(\tau)\ Q^{(2)}(\tau)]Q^{(1)}(\tau)-$$
$$-(Q^{(2)}(\tau)-Q^{(1)}(\tau)\ Q^{(1)}(\tau))\ Q^{(2)}(\tau)-Q^{(1)}(\tau)\ Q^{(3)}(\tau)\}\ M^{(0)}(\tau);$$

. . . . (3.30)

Представим матрицу $M^{(k)}(\tau)$ в блочном виде

$$M^{(k)}(\tau)=\begin{pmatrix}\mu_1^{(k)}(\tau); & \mu_2^{(k)}(\tau) \\ \mu_3^{(k)}(\tau); & \mu_4^{(k)}(\tau)\end{pmatrix}$$

где $\mu_1^{(k)}(\tau)$, $\mu_2^{(k)}(\tau)$, $\mu_3^{(k)}(\tau)$ и $\mu_4^{(k)}(\tau)$ представляют собой квадратные матрицы порядка m.

Подставляя (3.28) и матрицу $Q^{(k)}(\tau)$, представленную в виде (3.9), с учетом (3.24) в (3.30), для первых трех членов разложения (3.26) имеем

$$\mu_1^{(0)}(\tau)=\frac{1}{2}\Lambda_1^{-1}(\tau)\ \mu(\tau);\quad \mu_2^{(0)}(\tau)=\frac{1}{2}\mu(\tau);$$

$$\mu_3^{(0)}(\tau)=-\frac{1}{2}\ \Lambda_1^{-1}(\tau)\ \mu(\tau);\quad \mu_4^{(0)}=\frac{1}{2}\ \mu(\tau);$$

$$\mu_1^{(1)}(\tau)=-\frac{1}{2}\Big(Q_1^{(1)}(\tau)+Q_2^{(1)}(\tau)\Big)\Lambda_1^{-1}(\tau)\mu(\tau);$$

$$\mu_2^{(1)}(\tau)=-\frac{1}{2}\Big(Q_1^{(1)}(\tau)-Q_2^{(1)}(\tau)\Big)\mu(\tau);$$

$$\mu_1^{(2)}(\tau)=-\frac{1}{2}\Big[Q_2^{(1)}(\tau)\ Q_1^{(1)}(\tau)-Q_1^{(1)}(\tau)\ Q_2^{(1)}(\tau)+Q_2^{(1)}(\tau)\ Q_2^{(1)}(\tau)-Q_1^{(1)}(\tau)-$$

$$Q_1^{(1)}(\tau)+Q_1^{(2)}(\tau)-Q_2^{(2)}(\tau)\Big]\Lambda_1^{-1}(\tau)\ \mu(\tau);$$

$$\mu_2^{(2)}(\tau)=\frac{1}{2}\Big[Q_1^{(1)}(\tau)\ Q_1^{(1)}(\tau)-Q_2^{(1)}(\tau)Q_2^{(1)}(\tau)+Q_2^{(1)}(\tau)Q_1^{(1)}(\tau)-Q_1^{(1)}(\tau)Q_2^{(1)}(\tau)-$$

$$-Q_1^{(2)}(\tau)-Q_2^{(2)}(\tau)\Big]\mu(\tau);$$

$$\mu_3^{(2)}(=)-\frac{1}{2}\Big[Q_1^{(1)}(\tau)\ Q_1^{(1)}(\tau)-Q_2^{(1)}(\tau)\ Q_2^{(1)}(\tau)+Q_1^{(1)}(\tau)\ Q_2^{(1)}(\tau)-Q_2^{(1)}(\tau)$$

$$Q_1^{(1)}(\tau)-Q_1^{(2)}(\tau)+Q_2^{(2)}(\tau)\Big]\Lambda_1^{-1}(\tau)\ \mu(\tau);$$

$$\mu_4^{(2)}(\tau)=\frac{1}{2}\Big[Q_2^{(1)}(\tau)\ Q_1^{(1)}(\tau)-Q_1^{(1)}(\tau)\ Q_2^{(1)}(\tau)+Q_1^{(1)}(\tau)\ Q_1^{(1)}(\tau)-Q_2^{(1)}(\tau)\ Q_2^{(1)}$$

$$(\tau)-Q_1^{(2)}(\tau)-Q_2^{(2)}(\tau)\Big]\mu(\tau).$$

Обобщая полученные результаты, можно утверждать, что для первых трех членов разложения (3.26) выполняются равенства

$$\mu_1^{(\beta)}(\tau)=(-1)^{\beta+1}\ \mu_3^{(\beta)}(\tau);\qquad \mu_2^{(\beta)}(\tau)=(-1)^{\beta}\ \mu_4^{(\beta)}(\tau);$$

где $\beta=0,\ 1,\ 2.$

Пусть указанная закономерность имеет место при построении $k-1$-го члена разложения (3.26).
Докажем, что аналогичное имеет место при построении k-го члена этого разложения.
Как следует из (2.16), (2.18), (3.9) и (3.24) матрицу $k^{(k)}(\tau)$ можно представить в блочном виде

$$K^{(k)}=\begin{pmatrix} \varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)(Q_1^{(k)}(\tau)-Q_2^{(k)}(\tau)); & (-1)^{k+1}\ \varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)(Q_1^{(k)}(\tau)-Q_2^{(k)}(\tau)) \\ \varkappa(\tau)(Q_1^{(k)}(\tau)+Q_2^{(k)}(\tau)); & (-1)^{k}\ \varkappa(\tau)(Q_1^{(k)}(\tau)+Q_2^{(k)}(\tau) \end{pmatrix}$$

Тогда из (3.28) и (3.29) имеем

$$\mu_1^{(k)}(\tau)=-\frac{1}{2}\Big\{Q_1^{(k)}(\tau)+(-1)^{k+1}Q_2^{(k)}(\tau)+\sum_{\alpha=1}^{k-1}\Big[1+(-1)^{\alpha}\Big]\mu_1^{(k-\alpha)}(\tau)\varkappa(\tau)$$

$$\Lambda_1(\tau)\Big(Q_1^{(\alpha)}(\tau)-Q_2^{(\alpha)}(\tau)\Big)+\sum_{\alpha=1}^{k-1}\Big[1+(-1)^{\alpha+1}\Big]\mu_2^{(k-\alpha)}(\tau)\varkappa(\tau)\Big(Q_1^{(\alpha)}(\tau)+Q_2^{(\alpha)}(\tau)\Big)\Big\}$$

$$\Lambda_1^{-1}(\tau)\ \mu(\tau);$$

$$\mu_2^{(k)}(\tau)=-\frac{1}{2}\Big\{Q_1^{(k)}(\tau)+(-1)^{k}Q_2^{(k)}(\tau)+\sum_{\alpha=1}^{k-1}\Big[1+(-1)^{\alpha+1}\Big]\mu_1^{(k-\alpha)}(\tau)\varkappa(\tau)\Lambda_1$$

$$(\tau)\left(Q_1^{(\alpha)}(\tau)-Q_2^{(\alpha)}(\tau)\right)\sum_{\alpha=1}^{k-1}\left[1+(-1)^{\alpha}\right]\mu_2^{(k-\alpha)}(\tau)\varkappa(\tau)\left(Q_1^{(\alpha)}(\tau)+Q_2^{(\alpha)}(\tau)\right)\Bigg\}$$

$\mu(\tau)$; . . . . (3.31)

$$\mu_3^{(k)}(\tau)=-\frac{1}{2}\Bigg\{(-1)^{k+1}Q_1^{(k)}(\tau)+Q_2^{(k)}(\tau)+\sum_{\alpha=1}^{k+1}\left[(-1)^{k-\alpha+1}+(-1)^{k+1}\right]\mu_1^{(k-\alpha)}$$

$$(\tau)\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_1^{(\alpha)}(\tau)-Q_2^{(\alpha)}(\tau)\right)+\sum_{\alpha=1}^{k-1}\left[(-1)^{k+\alpha}+(-1)^{k+1}\right]\mu_2^{(k-\alpha)}(\tau)\varkappa(\tau)$$

$$\left(Q_1^{(\alpha)}(\tau)+Q_2^{(\alpha)}(\tau)\right)\Bigg\}\Lambda_1^{-1}(\tau)\mu(\tau)=-\frac{1}{2}\Bigg\{(-1)^{k+1}Q_4^{(k)}(\tau)+Q_2^{(k)}(\tau)+(-1)^{k+1}$$

$$\sum_{\alpha=1}^{k-1}\left[(-1)^{\alpha}+1\right]\mu_1^{(k-\alpha)}\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_1^{(\alpha)}(\tau)-Q_2^{(\alpha)}(\tau)\right)+(-1)^{k+1}\sum_{\alpha=1}^{k-1}\left[1+(-1)^{\alpha+1}\right]$$

$$\mu_2^{(k-\alpha)}(\tau)\varkappa(\tau)\left(Q_1^{(\alpha)}(\tau)+Q_1^{(\alpha)}(\tau)\right)\Bigg\}\Lambda_1^{-1}(\tau)\mu(\tau);$$

$$\mu_4^{(k)}(\tau)=-\frac{1}{2}\Bigg\{(-1)^{k}Q_1^{(k)}(\tau)+Q_2^{(k)}(\tau)+\sum_{\alpha=1}^{k-1}\left[(-1)^{k-\alpha+1}+(-1)^{k}\right]\mu_1^{(k-\alpha)}(\tau)$$

$$\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_1^{(\alpha)}(\tau)-Q_2^{(\alpha)}(\tau)\right)+\sum_{\alpha=1}^{k-1}\left[(-1)^{k-\alpha}+(-1)^{k}\right]\mu_2^{(k-\alpha)}(\tau)\varkappa(\tau)\left(Q_1^{(\alpha)}(\tau)+\right.$$

$$\left.Q_2^{(\alpha)}(\tau)\right)\Bigg\}\mu(\tau)=-\frac{1}{2}\Bigg\{(-1)^{k}Q_1^{(k)}(\tau)+Q_2^{(k)}(\tau)+(-1)^{k}\sum_{\alpha=1}^{k-1}\left[(-1)^{\alpha+1}+1\right]\mu_1^{(k-\alpha)}(\tau)$$

$$\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_1^{(\alpha)}(\tau)-Q_2^{(\alpha)}(\tau)\right)+(-1)^{k}\sum_{\alpha=1}^{k-1}\left[1+(-1)^{\alpha}\right]\mu_2^{(k-\alpha)}(\tau)\varkappa(\tau)\left(Q_1^{(\alpha)}(\tau)+\right.$$

$$\left.Q_2^{(\alpha)}(\tau)\right)\Bigg\}\mu(\tau).$$

Сопоставляя полученные равенства, можно утверждать, что при построении k-го члена разложения (3.26) имеют место равенства

$$\mu_1^{(k)}(\tau)=(-1)^{k+1}\mu_3^{(k)}(\tau);\quad \mu_2^{(k)}(\tau)=(-1)^{k}\mu_4^{(k)}(\tau); \tag{3.32}$$

где $k=0,1,\cdots,r$; что и требовалось доказать.

Следовательно, матрицу $M^{(k)}(\tau)$ в блочном виде можно представить следующим образом

$$M^{(k)}(\tau)=\begin{pmatrix}\mu_1^{(k)}(\tau); & \mu_2^{(k)}(\tau)\\ (-1)^{k+1}\mu_1^{(k)}(\tau); & (-1)^{k}\mu_2^{(k)}(\tau)\end{pmatrix} \tag{3.33}$$

где $\mu_1^{(k)}(\tau)$ и $\mu_2^{(k)}(\tau)$ определяются из рекуррентных соотношений (3.31), Использование соотношений (3.31) с учетом (3.32) и (3.33) существенным образом сокращает схему расчетов при построении членов конечного ряда (3.26), позволяя оперировать матрицами вдвое меньшего порядка по сравнению с методом определения этих членов из (3.29).

Ниже приводится алгоритм нормирования столбцов матрицы невырожденного преобразования.

4. Произвол, который имеется при построении матрицы $Q^{(k)}(\tau)$ для диагональных элементов $q_{\alpha\alpha}^{(k)}(\tau)$, можно использовать для нормирования столбцов матрицы $K^{(r)}(\tau,\varepsilon)$. При этом достаточно определить значения первых m диагональных элементов $q_{jj}^{(k)}(\tau)$ ($j=1, 2, \cdots, m$),

поскольку считаем, что построено такое преобразование (2.5), при котором выполняются (3.22) и (3. 23), и, следовательно, значения остальных диагональных элементов матрицы $Q^{(k)}(\tau)$ могут быть легко определены из (3. 25).

Далее будем считать, что эвклидова норма собственных векторов $K_\sigma(\tau)$ ($\sigma=1,\cdot\cdot\cdot,n;\ n=2m$) равна единице.

При этом

$$\lambda_j^*(\tau)\varkappa_j^*(\tau)\varkappa_j(\tau)\lambda_j(\tau)+\varkappa_j^*(\tau)\varkappa_j(\tau)=1 \tag{4.1}$$

где $j=1,\ 2,\ \cdot\cdot\cdot,\ m.$

Из (2.9). (2.14) и (2.20) имеем

$$K_j^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\left\|\begin{matrix}\varkappa_j(\tau)\lambda_j(\tau)+\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\sum\limits_{k=1}^{r} r^k\left(Q_{1j}^{(k)}(\tau)-Q_{2j}^{(k)}(\tau)\right)\\ \varkappa_j(\tau)+\varkappa(\tau)\sum\limits_{k=1}^{r} r^k\left(Q_{1j}^{(k)}(\tau)+Q_{2j}^{(k)}(\tau)\right)\end{matrix}\right\|$$

Отсюда

$$\|K_j^{(r)}(\tau,\ \varepsilon)\|^2=\|\varkappa_j(\tau)\lambda_j(\tau)+\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\sum_{k=1}^{r}\varepsilon^k\left(Q_{1j}^{[k]}(\tau)-Q_{2j}^{[k]}(\tau)\right)\|^2+\|\varkappa_j(\tau)+\varkappa(\tau)\sum_{k=1}^{r}$$

$$\varepsilon^k\left(Q_{1j}^{(k)}(\tau)+Q_{2j}^{(k)}(\tau)\right)\|^2=\lambda_j^*(\tau)\varkappa_j^*(\tau)\varkappa_j(\tau)\lambda_j(\tau)+\varkappa_j^*(\tau)\varkappa_j(\tau)+\sum_{k=1}^{r}\sum_{\alpha=0}^{k}\varepsilon^k\Bigg[\left(Q_{1j}^{[k-\alpha]}(\tau)\right.$$

$$\left.-Q_{2j}^{[k-\alpha]}(\tau)\right)^*\Lambda_1^*(\tau)\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1j}^{[\alpha]}(\tau)-Q_{2j}^{[\alpha]}(\tau)\right)+\left(Q_{1j}^{[k-\alpha]}(\tau)+Q_{2j}^{[k-\alpha]}\right.$$

$$\left.(\tau)\right)^*\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\varkappa(\tau)\left(Q_{1j}^{[\alpha]}(\tau)+Q_{2j}^{[\alpha]}(\tau)\right)\Bigg]\varepsilon^{r+1}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\alpha=k}^{r}\varepsilon^{k-1}\Bigg[Q_{1j}^{[r-\alpha+k]}(\tau)-Q_{2j}^{(r-\alpha+k)}$$

$$(\tau)\Big)^*\Lambda_1^*(\tau)\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1j}^{(\alpha)}(\tau)-Q_{2j}^{(\alpha)}(\tau)\right)+\left(Q_{1j}^{(r-\alpha+k)}(\tau)+Q_{2j}^{(r-\alpha+k)}(\tau)\right)^*$$

$$\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\left(Q_{1j}^{(\alpha)}(\tau)+Q_{2j}^{(\alpha)}(\tau)\right)\Bigg] \tag{4.2}$$

Произвольные диагональные элементы $q_{jj}^{(k)}(\tau)$ ($k=1,\ldots,\ r;\ j=1,\ldots m$) можно выбрать так, что первая двойная сумма в равенстве (4.2) обратится в нуль.

Действительно,

$$\sum_{\alpha=0}^{k}\Bigg[\left(Q_{1j}^{(k-\alpha)}(\tau)-Q_{2j}^{(k-\alpha)}(\tau)\right)^*\Lambda_1^*(\tau)\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1j}^{(\alpha)}(\tau)-Q_{2j}^{(\alpha)}(\tau)\right)+\left(Q_{1j}^{(k-\alpha)}\right.$$

$$\left.(\tau)+Q_{2j}^{(k-\alpha)}(\tau)\right)^*\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\left(Q_{1j}^{(\alpha)}(\tau)+Q_{2j}^{(\alpha)}(\tau)\right)\Bigg]=\left(Q_{1j}^{(k)}(\tau)-Q_{2j}^{(k)}(\tau)\right)^*\Lambda_1^*(\tau)\varkappa^*$$

$$(\tau)\varkappa_j(\tau)\lambda_j(\tau)+\left(Q_{1j}^{(k)}(\tau)+Q_{2j}^{(k)}(\tau)\right)^*\varkappa^*(\tau)\varkappa_j(\tau)+\lambda_j^*(\tau)\varkappa_j^*(\tau)\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\Big(Q_{1j}^{(k)}(\tau)-$$

$$\left.-Q_{2j}^{(k)}(\tau)\right)+\varkappa_j^*(\tau)\varkappa(\tau)\left(Q_{1j}^{(k)}(\tau)+Q_{2j}^{(k)}(\tau)\right)+\sum_{\alpha=1}^{k-1}\Bigg[\left(Q_{1j}^{(k-\alpha)}(\tau)-Q_{2j}^{(k-\alpha)}(\tau)\right)^*\Lambda_1^*$$

$$(\tau)\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1j}^{(\alpha)}(\tau)-Q_{2j}^{(\alpha)}(\tau)\right)+\left(Q_{1j}^{(k-\alpha)}(\tau)+Q_{2j}^{(k-\alpha)}(\tau)\right)^*\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\Big(Q_{1j}^{(\alpha)}$$

$$(\tau)+Q_{2j}^{(\alpha)}(\tau)\Big)\Bigg] \tag{4.3}$$

Далее из (2.18) и (2.24) с учетом (2.15) имеем

$$\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1j}^{(k)}(\tau)-Q_{2j}^{(k)}(\tau)\right)=\varkappa_j(\tau)\lambda_j(\tau)q_{jj}^{(k)}(\tau)-\frac{1}{2}\varkappa_j(\tau)\eta_j(\tau)\left(\frac{1}{\lambda_j(\tau)}D_{1j}^{(k-1)}(\tau)-D_{2j}^{(k-1)}(\tau)\right)+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{m}{}'\frac{\lambda_i(\tau)}{(\lambda_i(\tau)-\lambda_j(\tau))(\lambda_i(\tau)+\lambda_j(\tau))}\varkappa_i(\tau)\eta_i(\tau)\left(\frac{\lambda_i(\tau)}{\lambda_i(\tau)}D_{1j}^{(k-1)}(\tau)+\right.$$

$$\left.+\lambda_i(\tau)D_{2j}^{(k-1)}(\tau)\right);$$

$$\varkappa(\tau)\left(Q_{1j}^{(k)}(\tau)+Q_{2j}^{(k)}(\tau)\right)=\varkappa_j(\tau)q_{jj}^{(k)}(\tau)+\frac{1}{2\lambda_j(\tau)}\varkappa_j(\tau)\eta_j(\tau)\left(\frac{1}{\lambda_j(\tau)}D_{1j}^{(k-1)}(\tau)-D_{2j}^{(k-1)}(\tau)\right)+\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{m}{}'\frac{\lambda_j(\tau)}{(\lambda_i(\tau)-\lambda_j(\tau))(\lambda_i(\tau)+\lambda_j(\tau))}\varkappa_i(\tau)\eta_i(\tau)\left(\frac{1}{\lambda_j(\tau)}D_{1j}^{(k-1)}(\tau)+\right.$$

$$\left.+D_{2j}^{(k-1)}(\tau)\right);$$

(здесь штрих означает исключение из сумм члена с индексом $i=j$), $D_{1j}^{(k-1)}(\tau)$ и $D_{2j}^{(k-1)}(\tau)$ определяются из (2.22).

Подставляя полученные выражения в (4.3) и, учитывая (4.1) получим

$$\sum_{\alpha=0}^{k}\left[\left(Q_{1j}^{(k-\alpha)}(\tau)-Q_{2j}^{(k-\alpha)}(\tau)\right)^*\Lambda_1^*(\tau)\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1j}^{(\alpha)}(\tau)-Q_{2j}^{(\alpha)}(\tau)\right)+\left(Q_{1j}^{(k-\alpha)}(\tau)-Q_{2j}^{(k-\alpha)}(\tau)\right)^*\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\left(Q_{1j}^{(\alpha)}(\tau)+Q_{2j}^{(\alpha)}(\tau)\right)\right]=q_{jj}^{(k)*}(\tau)+q_{jj}^{(k)}(\tau)-\frac{\lambda_j(\tau)\lambda_j^*(\tau)-1}{2\lambda_j^*(\tau)}$$

$$\left(\frac{1}{\lambda_j(\tau)}D_{1j}^{(q-1)}(\tau)-D_{2j}^{(k-1)}(\tau)\right)\eta_j^*(\tau)\varkappa_j^*(\tau)\varkappa_j(\tau)+\left[\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{m}{}'\frac{\lambda_i(\tau)}{(\lambda_i^2(\tau)-\lambda_j^2(\tau))}\varkappa_i(\tau)\eta_i(\tau)\left(\frac{\lambda_j(\tau)}{\lambda_i(\tau)}D_{1j}^{(k-1)}(\tau)+\lambda_i(\tau)D_{2j}^{(k-1)}(\tau)\right)\right]^*\varkappa_j(\tau)\lambda_j(\tau)+\left[\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{m}{}'\frac{\lambda_i(\tau)}{(\lambda_i^2(\tau)-\lambda_j^2(\tau))}\varkappa_i(\tau)\eta_i(\tau)\left(\frac{1}{\lambda_j(\tau)}D_{1j}^{(k-1)}(\tau)+D_{2j}^{(k-1)}(\tau)\right)\right]\varkappa_j(\tau)-\frac{\eta_j(\tau)\lambda_j^*(\tau)-1}{2\lambda_j(\tau)}\varkappa_j^*(\tau)\varkappa_j(\tau)\eta_j(\tau)\left(\frac{1}{\lambda_j(\tau)}D_{1j}^{(k-1)}(\tau)-D_{2j}^{(k-1)}(\tau)\right)+\lambda_j^*(\tau)\varkappa_j^*(\tau)\left[\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{m}{}'\frac{\lambda_j(\tau)}{(\lambda_i^2(\tau)-\lambda_j^2(\tau))}\varkappa_i(\tau)\eta_i(\tau)\left(\frac{\lambda_j(\tau)}{\lambda_i(\tau)}D_{1j}^{(k-1)}(\tau)+\lambda_i(\tau)D_{2j}^{(k-1)}(\tau)\right)\right]+\varkappa_j^*(\tau)\left[\sum_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{m}{}'\frac{\lambda_j(\tau)}{\lambda_i^2(\tau)-\lambda_j^2(\tau)}\varkappa_i(\tau)\eta_i(\tau)\left(\frac{1}{\lambda_j(\tau)}D_{1j}^{(k-1)}(\tau)+D_{2j}^{(k-1)}(\tau)\right)\right]+\sum_{\alpha=1}^{k-1}\left[\left(Q_{1j}^{(k-\alpha)}(\tau)=Q_{2j}^{(k-\alpha)}(\tau)\right)^*\Lambda_1^*(\tau)\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1j}^{(\alpha)}(\tau)-Q_{2j}^{(\alpha)}(\tau)\right)+\left(Q_{1j}^{(k-\alpha)}(\tau)+Q_{1j}^{(k-\alpha)}(\tau)\right)^*\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\left(Q_{1j}^{(\alpha)}(\tau)+Q_{2j}^{(\alpha)}(\tau)\right)\right].$$

Отсюда видно, что при

$$q_{ij}^{(k)}(\tau)=\frac{\lambda_j(\tau)\lambda_j(\tau)-1}{2\lambda_j(\tau)}\varkappa_j^*(\tau)\varkappa_j(\tau)\eta_j(\tau)\left(\frac{1}{\lambda_j(\tau)}D_{1j}^{(k-1)}(\tau)-D_{2j}^{(k-1)}(\tau)\right)-\lambda_j^*(\tau)\varkappa_j^*$$

$$(\tau)\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}{}' \frac{\lambda_i(\tau)}{(\lambda_i^2(\tau)-\lambda_j^2(\tau))}\varkappa_i(\tau)\eta_i(\tau)\left(\frac{\lambda_j(\tau)}{\lambda_i(\tau)}D_{1j}^{(k-1)}(\tau)+\lambda_i(\tau)D_{2j}^{(k-1)}(\tau)\right)\right]-\varkappa_j^*(\tau)$$

$$\left[\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{m}{}' \frac{\lambda_j(\tau)}{(\lambda_i^2(\tau)-\lambda_j^2(\tau))}\varkappa_i(\tau)\eta_i(\tau)\left(\frac{1}{\lambda_j(\tau)}D_{1j}^{(k-1)}(\tau)+D_{2j}^{(k-1)}(\tau)\right)\right]-\sum_{\alpha=1}^{k-1}\left[\left(Q_{1j}^{(k-\alpha)}\right.\right.$$

$$\left.(\tau)-Q_{2j}^{(k-\alpha)}(\tau)\right)^*\Lambda_1^*(\tau)\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1j}^{(\alpha)}(\tau)-Q_{2j}^{(\alpha)}(\tau)\right)+\left(Q_{1j}^{(k-\alpha)}(\tau)+Q_{2j}^{(k-\alpha)}\right.$$

$$\left.\left.(\tau)\right)^*\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\left(Q_{1j}^{(\alpha)}(\tau)+Q_{2j}^{(\alpha)}(\tau)\right)\right]; \tag{4.4}$$

первая двойная сумма в равенстве (4.2) обратится в нуль. Тогда с учетом (4.1) равенство (4.2) примет вид

$$\|K_j^{(r)}(\tau,\varepsilon)\|^2=1+\varepsilon^{r+1}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\alpha=k}^{r}\varepsilon^{k-1}\left[\left(Q_{1j}^{(r-\alpha+k)}(\tau)-Q_{2j}^{(r-\alpha+k)}(\tau)\right)^*\Lambda_1^*(\tau)\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\right.$$

$$\Lambda_1(\tau)\left(Q_{1j}^{(\alpha)}(\tau)-Q_{2j}^{(\alpha)}(\tau)\right)+\left(Q_{1j}^{(r-\alpha+k)}(\tau)+Q_{2j}^{(r-\alpha+k)}(\tau)\right)^*\varkappa^*(\tau)\varkappa(\tau)\left(Q_{1j}^{(\alpha)}(\tau)+\right.$$

$$\left.\left.+Q_{2j}^{(\alpha)}(\tau)\right)\right];$$

где $j=1,\dots,m$.

Таким образом, при выборе $q_{jj}^{(k)}(\tau)$ $(k=1,\dots,r)$ из (4.4) норма первых m столбцов матрицы $K^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ с точностью до величин порядка ε^{r+1} будет равна единице.

Значения остальных диагональных элементов матрицы $Q^{(k)}(\tau)$ легко определить из (3.25) и (4.4) посредством формулы

$$q_{j+m,\,j+m}^{(k)}(\tau)=(-1)^k\,q_{jj}^{(k)}(\tau) \tag{4.5}$$

где $j=1,\dots,m$.

Таким образом, рекуррентные соотношения (4.4) и (4.5) позволяют нормировать столбцы матрицы невырожденного преобразования (2.5).

Ниже рассматривается область предельных отклонений и условия равномерной устойчивости невозмущенного процесса на заданном интервале времени по отношению к заданной области предельных отклонений.

5. Переходя к установлению условий устойчивости и неустойчивости тривиального решения уравнения (2.2), зададим область предельных отклонений (1.2) посредством матрицы $K^{(r)}(\tau,\varepsilon)\in K^m$, полагая при этом, что столбцы матрицы $K^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ нормированы посредством рекуррентных соотношений (4.4) и (4.5).

Тогда область предельных отклонений может быть представлена в виде

$$(M^{(r)}(\tau,\varepsilon)x,\ M^{(r)}(\tau,\varepsilon)x)\leqslant\delta^2 \tag{5.1}$$

где $M^{(r)}(\tau,\varepsilon)=K^{(r)-1}(\tau,\varepsilon)$.

Учитывая (3.26) и (3.33), область предельных отклонений (5.1) можно определить из соотношения

$$\left\|\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\eta_1^{(k)}(\tau)\frac{dq}{dt}+\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\eta_2^{(k)}(\tau)q\right\|^2+\left\|\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k+1}\varepsilon^k\eta_1^{(k)}(\tau)\frac{dq}{dt}+\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\varepsilon^k\eta_2^{(k)}\right.$$

$$\left.(\tau)q\right\|^2\leqslant\delta^2 \tag{5.2}$$

Геометрически область (5.2) представляет собой $2m$-мерный эллипсоид, ограниченный поверхностью

$$\left\| \sum_{k=0}^{r} (-1)^{k+1} \varepsilon^k \eta_1^{(k)}(\tau) \frac{dq}{dt} + \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \varepsilon^k \eta_2^{(k)}(\tau) q \right\|^2 + \left\| \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k \eta_1^{(k)}(\tau) \frac{dq}{dt} + \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k \eta_2^{(k)}(\tau) q \right\|^2 = \delta^2 \tag{5.3}$$

При этом, как показано в [3], каждый из $4m$ лучей $x = \pm K_\sigma^r(\tau,\varepsilon) S$, ($\sigma = 1, \ldots, n$; $n = 2m$; $s < \infty$) пересекает поверхность (5.3) один раз при значении $s = \rho$. С точностью до величин порядка ε^{r+1} точки пересечения лучей с поверхностью эллипсоида находятся на неизменном расстоянии ρ от начала координат.

Введем обозначение

$$V(\tau, \varepsilon, q, \dot{q}) = \left\| \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k \eta_1^{(k)}(\tau) \frac{dq}{dt} + \sum_{k=0}^{r} \varepsilon^k \eta_2^{(k)}(\tau) q \right\|^2 + \left\| \sum_{k=0}^{r} (-1)^{k+1} \varepsilon^k \eta_1^{(k)}(\tau) \frac{dq}{dt} + \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \varepsilon^{(k)} \eta_2^{(k)}(\tau) q \right\|^2 = \|y\|^2. \tag{5.4}$$

Для определения производной от положительно определенной функции (5.4) перейдем в (2.6) к эрмитово сопряженным матрицам

$$\frac{dy^*}{dt} = y^* \Lambda^{(r)*}(\tau, \varepsilon) - y^* T^{(r)*}(\tau,\varepsilon) M^{(r)*}(\tau,\varepsilon) + H^*(\tau, K^{(r)} y) M^{(r)*}(\tau,\varepsilon)$$

Умножая полученное равенство справа на y, а (2.6) слева на y^* и складывая, имеем дифференциальное уравнение относительно нормы вектора y

$$\frac{d\|y\|}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{n} Re \lambda_\sigma^{(r)}(\tau,\varepsilon) \frac{|y_\sigma|^2}{\|y\|} - \frac{y^*}{2\|y\|} \left[M^{(r)}(\tau,\varepsilon) T^{(r)}(\tau,\varepsilon) + T^{(r)*}(\tau,\varepsilon) M^{(r)*}(\tau,\varepsilon) \right] y + \frac{1}{2\|y\|} \left[y^* M^{(r)}(\tau,\varepsilon) H(\tau, K^{(r)} y) + H^*(\tau, K^{(r)} y) M^{(r)*}(\tau,\varepsilon) y \right];$$

где y_σ ($\sigma = 1, \ldots, n$) — элементы столбцовой матрицы y.

Тогда производная от положительно определенной функции (5.4) по t, вычисленная в силу полученного уравнения, равна

$$\frac{dV(\tau,\varepsilon,q,\dot{q})}{dt} = 2\left[\sum_{\sigma=1}^{n} Re \lambda_\sigma^{(r)}(\tau,\varepsilon) |y_\sigma|^2 + \varepsilon^{r+1} y^* B^{(r)}(\tau,\varepsilon) y + \frac{1}{2}\Big(y M^{(r)}(\tau,\varepsilon) H(\tau, K^{(r)} y) + H^*(\tau, K^{(r)} y) M^{(r)*}(\tau,\varepsilon) y \Big) \right] \tag{5.5}$$

где

$$B^{(r)}(\tau,\varepsilon) = -\left[M^{(r)}(\tau,\varepsilon) T^{(r)}(\tau,\varepsilon) + (M^{(r)}(\tau,\varepsilon) T^{(r)}(\tau,\varepsilon))^* \right] / 2\varepsilon^{r+1}. \tag{5.6}$$

Из (2.26) легко видеть, что матрица $B^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ регулярна относительно ε в окресности точки $\varepsilon = 0$.

Представим матрицу $B^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ в блочном виде

$$B^{(r)}(\tau,\varepsilon) = \begin{pmatrix} B_1^{(r)}(\tau,\varepsilon); & B_3^{(r)}(\tau,\varepsilon) \\ B_2^{(r)}(\tau,\varepsilon); & B_4^{(r)}(\tau,\varepsilon) \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

где $B_1^{(r)}(\tau,\varepsilon)$, $B_2^{(r)}(\tau,\varepsilon)$, $B_3^{(r)}(\tau,\varepsilon)$, $B_4^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ — квадратные матрицы порядка m.

Тогда из (3.26), (3.33) и (5.6) имеем

$$B_1^{(r)}(\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{2\varepsilon^{r+1}}\left[\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\eta_1^{(k)}(\tau)T_1^{(r)}(\tau,\varepsilon)+\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\eta_2^{(k)}(\tau)T_2^{(r)}(\tau,\varepsilon)+T_1^{(r)*}(\tau,\varepsilon)\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\eta_1^{(k)*}(\tau)+T_2^{(r)*}(\tau,\varepsilon)\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\eta_2^{(k)*}(\tau)\right];$$

$$B_2^{(r)}(\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{2\varepsilon^{r+1}}\left[\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k+1}\varepsilon^k\eta_1^{(k)}(\tau)T_1^{(r)}(\tau,\varepsilon)+\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\varepsilon^k\eta_2^{(k)}(\tau)T_2^{(r)}(\tau,\varepsilon)+\right.$$
$$\left.+T_3^{(r)*}(\tau,\varepsilon)\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\eta_1^{(k)*}(\tau)+T_4^{(r)*}(\tau,\varepsilon)\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\eta_2^{(k)*}(\tau)\right];$$

$$B_3^{(r)}(\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{2\varepsilon^{\,+1}}\left[\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^{(k)}\eta_1^{(k)}(\tau)T_3^{(r)}(\tau,\varepsilon)+\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\eta_2^{(k)}(\tau)T_4^{(r)}(\tau,\varepsilon)+T_1^{(r)*}(\tau,\varepsilon)\sum_{k=0}^{r}\right.$$
$$\left.(-1)^{k+1}\varepsilon^k\eta_1^{(k)*}(\tau)+T_2^{(r)*}(\tau,\varepsilon)\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\varepsilon^k\eta_2^{(k)*}(\tau)\right];$$

$$B_4^{(r)}(\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{2\varepsilon^{r+1}}\left[\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k+1}\varepsilon^k\eta_1^{(k)}(\tau)\;T_3^{(r)}(\tau,\varepsilon)+\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\varepsilon^k\eta_2^{(k)}(\tau)T_4^{(r)}\right.$$
$$\left.(\tau,\varepsilon)+T_3^{(r)*}(\tau,\varepsilon)\sum_{k=0}^{r}(-1)^{k+1}\varepsilon^k\eta_1^{(k)*}(\tau)+T_4^{(r)*}(\tau,\varepsilon)\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\varepsilon^k\eta_2^{(k)*}(\tau)\right] \qquad (5.8)$$

где $T_1^{(r)}(\tau,\varepsilon)$, $T_2^{(r)}(\tau,\varepsilon)$, $T_3^{(r)}(\tau,\varepsilon)$, $T_4^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ — квадратные матрицы порядка m — определяются посредством (2.26), (2.27) и равенства

$$T^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\begin{pmatrix}T_1^{(r)}(\tau,\varepsilon); & T_3^{(r)}(\tau,\varepsilon)\\ T_2^{(r)}(\tau,\varepsilon); & T_4^{(r)}(\tau,\varepsilon)\end{pmatrix}$$

следующими соотношениями:

$$T_1^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon^{r+1}\left[\frac{d}{d\tau}\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)\,(Q_1^{(r)}(\tau)-Q_2^{(r)}(\tau))+L^{-1}(\tau)R(\tau)\Lambda_1(\tau)(Q_1^{(r)}(\tau)-\right.$$
$$Q_2^{(r)}(\tau))+\sum_{\beta=1}^{r}\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)(Q_1^{(r+1-\beta)}(\tau))+L^{-1}(\tau)\,R(\tau)\varkappa(\tau)\,\Lambda_1(\tau)(Q_1^{(r)}(\tau)-Q_2^{(r)}(\tau))+$$
$$+\sum_{\beta=1}^{r}\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)(Q_1^{(r+1-\beta)}(\tau)-Q_2^{(r+1-\beta)}(\tau))\Lambda_1^{(\beta)}(\tau)+\sum_{\nu=2}^{r}\sum_{\beta=\nu}^{r}\varepsilon^{\nu-1}\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)(Q_1^{(r-\beta+\alpha)}$$
$$\left.(\tau)-Q_2^{(r-\beta+\nu)}(\tau))\Lambda_1^{(\beta)}(\tau)\right];$$

$$T_2^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon^{r+1}\left[\frac{d}{d\tau}\varkappa(\tau)(Q_1^{(r)}(\tau)+Q_2^{(r)}(\tau))+\sum_{\beta=1}^{r}\varkappa(\tau)(Q_1^{(r+1-\beta)}(\tau)+Q_2^{(r+1-\beta)}(\tau))\Lambda_1^{(\beta)}\right.$$
$$\left.(\tau)+\sum_{\nu=2}^{r}\sum_{\beta=\nu}^{r}\varepsilon^{\nu-1}\varkappa(\tau)(Q_1^{(r-\beta+\nu)}(\tau)+Q_2^{(r-\beta+\nu)}(\tau))\Lambda_1^{(\beta)}(\tau)\right];$$

$$T_3^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon^{r+1}\left[(-1)^{r+1}\frac{d}{d\tau}\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)(Q_2^{(r)}(\tau)-Q_2^{(r)}(\tau))+(-1)^{r+1}L^{-1}(\tau)R(\tau)\varkappa\right.$$
$$(\tau)\Lambda_1(\tau)(Q_1^{(r)}(\tau)-Q_2^{(r)}(\tau))+(-1)^{r+1}\sum_{\beta=1}^{r}\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)(Q_1^{(r+1-\beta)}(\tau)-Q_2^{(r+1-\beta)}(\tau))\Lambda_1^{(\beta)}$$
$$\left.(\tau)+\sum_{\nu=2}^{r}(-1)^{r+\nu}\varepsilon^{\nu-1}\sum_{\beta=\nu}^{r}\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)(Q_1^{(r-\beta+\nu)}(\tau)-Q_2^{(r-\beta+\nu)}(\tau))\Lambda_1^{(\beta)}(\tau)\right];$$

$$T_4^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon^{r+1}\,\varepsilon^{r+1}\Bigg[(-1)^r\frac{d}{d\tau}\varkappa(\tau)(Q_1^{(r)}(\tau)+Q_2^{(r)}(\tau))+(-1)^r\sum_{\beta=1}^{r}\varkappa(\tau)(Q_1^{(r+1-\beta)}$$

$$(\tau)(Q_2^{(r+1-\beta)}(\tau))\Lambda_1^{(\beta)}(\tau)+\sum_{\nu=2}^{r}(-1)^{r+\nu+1}\varepsilon^{\nu-1}\sum_{\beta=\nu}^{r}\varkappa(\tau)(Q_1^{(r-\beta+\nu)}(\tau)+Q_2^{(r-\beta+\nu)}(\tau))$$

$$\Lambda_1^{(\beta)}(\tau)\Bigg].$$

Введем обозначения

$$P_1^{(0)}(\tau)=\frac{d}{d\varepsilon}\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)(Q_1^{(r)}(\tau)-Q_2^{(r)}(\tau))+L^{-1}(\tau)R(\tau)\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)(Q_1^{(r)}(\tau)-Q_2^{(r)}(\tau))+$$

$$+\sum_{\beta=1}^{r}\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)(Q_1^{(r+1-\beta)}(\tau)-Q_2^{(r+1-\beta)}(\tau))\Lambda_1^{(\beta)}(\tau);$$

$$P_2^{(0)}(\tau)=\frac{d}{d\tau}\varkappa(\tau)(Q_1^{(r)}(\tau)+Q_2^{(r)}(\tau))+\sum_{\beta=1}^{r}\varkappa(\tau)(Q_1^{(r+1-\beta)}(\tau)+Q_2^{(r+1-\beta)}(\tau))\Lambda_1^{(\beta)}(\tau);$$

$$P_1^{(\gamma)}(\tau)=\sum_{\beta=\gamma+1}^{r}\varkappa(\tau)(Q_1^{(r-\beta+\gamma+1)}(\tau)-Q_2^{(r-\beta+\gamma+1)}(\tau))\Lambda_1^{(\beta)}(\tau);$$

$$P_2^{(\gamma)}(\tau)=\sum_{\beta=\gamma+1}^{r}\varkappa(\tau)(Q_1^{r-\beta+\gamma+1}(\tau)+Q_2^{(r-\beta+\gamma+1)}(\tau))\Lambda_1^{(\beta)}(\tau);$$

$$\gamma=1,\dots,r-1;$$

$$P_1^{(r)}(\tau)=P_2^{(r)}(\tau)=0. \tag{5.9}$$

В новых обозначениях

$$T_1^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon^{r+1}\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k P_1^{(k)}(\tau);$$

$$T_2^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon^{r+1}\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k P_2^{(k)}(\tau);$$

$$T_3^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon^{r+1}\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r+k+}\varepsilon^k P_1^{(k)}(\tau);$$

$$T_4^{(r)}(\tau,,\varepsilon)=\varepsilon^{r+1}\sum_{k=0}^{r}(-1)^{r+k}\varepsilon^k P_2^{(k)}(\tau).$$

Подставляя полученные выражения в (5.8), с точностью до величин порядка ε^{r+1} получим

$$B_1^{(r)}(\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\Bigg[\sum_{\alpha=0}^{k}\Big(\eta_1^{(k-\alpha)}(\tau)\;P_1^{(\alpha)}(\tau)+P_1^{(k-\alpha)*}(\tau)\;\eta_1^{(\alpha)*}(\tau)\Big)+\sum_{\alpha=0}^{k}\Big(\eta_2^{(k-\alpha)}$$

$$(\tau)\;P_2^{(\alpha)}(\tau)+P_2^{(k-\alpha)*}\;\eta_2^{(\alpha)*}(\tau)\Big)\Bigg];$$

$$B_2^{(r)}(\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\;\varepsilon^k\Bigg\{\sum_{\alpha=0}^{k}(-1)^{\alpha+1}\Big[\eta_1^{(k-\alpha)}(\tau)\;P_1^{(\alpha)}(\tau)+(-1)^r\;P_1^{(k-\alpha)*}(\tau)$$

$$\eta_1^{(\alpha)*}(\tau)\Big]+\sum_{\alpha=0}^{k}(-1)^\alpha\Big[\eta_2^{(k-\alpha)}(\tau)\;P_2^{(\alpha)}(\tau)+(-1)^r\;P_2^{(k-\alpha)*}(\tau)\;\eta_2^{(\alpha)*}(\tau)\Big]\Bigg\};$$

$$B_3^{(r)}(\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{r}\varepsilon^k\left\{\sum_{\alpha=0}^{k}(-1)^{\alpha+1}\left[(-1)^r\eta_1^{(k-\alpha)}(\tau)\ p_1^{(\alpha)}(\tau)+p_1^{(k-\alpha)*}(\tau)\ \eta_1^{(\alpha)*}\right.\right.$$

$$\left.(\tau)\ \eta_1^{(\alpha)*}(\tau)\right]+\sum_{\alpha=0}^{k}(-1)^{\alpha}\left[(-1)^r\ \eta_2^{(k-\alpha)}(\tau)\ p_2^{(\alpha)}(\tau)+p_2^{(k-\alpha)*}(\tau)\ \eta_2^{(\alpha)*}(\tau)\right]\Bigg\};$$

$$B_4^{(r)}(\tau,\varepsilon)=-\frac{1}{2}(-1)^r\sum_{k=0}^{r}(-1)^k\ \varepsilon^k\left[\sum_{\alpha=0}^{k}\left(\eta_1^{(k-\alpha)}(\tau)\ p_1^{(\alpha)}(\tau)+p_1^{(k-\alpha)*}(\tau)\ \eta_1^{(\alpha)*}\right.\right.$$

$$\left.\left.(\tau)\right)+\sum_{\alpha=0}^{k}\left(\eta_2^{(k-\alpha)}(\tau)+p_2^{(k-\alpha)*}(\tau)\ \eta_2^{(\alpha)*}(\tau)\right)\right];$$

где матрицы $\eta_1^{(k)}(\tau)$, $\eta_2^{(k)}(\tau)$ и $p_1^{(k)}(\tau)$, $p_2^{(k)}(\tau)$, $(k=0,1,\ldots,r)$ определяются соответственно из (3.31) и (5.9).

Таким образом, соотношения (5.7) и (5.10) позволяют построить матрицу $B^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ из (5.5) посредством матриц вдвое меньшего порядка. Из (5.10) следует также, что матрица $B^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ имеет следующую структуру

$$B^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\begin{pmatrix}F^{(r)}(\tau,\varepsilon)+D^{(r)}(\tau,\varepsilon); & F^{(r)}(\tau,\varepsilon)-D^{(r)}(\tau,\varepsilon)\\ F^{(r)}(\tau,\varepsilon)-D^{(r)}(\tau,\varepsilon); & F^{(r)}(\tau,\varepsilon)+D^{(r)}(\tau,\varepsilon)\end{pmatrix} \tag{5.11}$$

где $F^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{r}\varepsilon^k\ F^{(k)}(\tau)$; $D^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{r}\varepsilon^k\ D^{(k)}(\tau)$.

Значения членов разложения $F^{(k)}(\tau)$ и $D^{(k)}(\tau)$ легко можно определить из (3.28), (3.31), (5.9) и (5.10) отдельно для чётных и нечетных r. В частности,

$$F^{(o)}(\tau)=-\frac{1}{4}\left(\eta(\tau)\ \frac{d\varkappa(\tau)}{d\tau}+\frac{d\varkappa^*(\tau)}{d\tau}\eta^*(\tau)\right);$$

$$D^{(o)}(\tau)=-\frac{1}{4}\left(\Lambda_1^{-1}(\tau)\ \eta(\tau)\frac{d\varkappa(\tau)\Lambda_1(\tau)}{d\tau}+\frac{d\Lambda_1^*(\tau)\varkappa^*(\tau)}{d\tau}\eta^*(\tau)\Lambda_1^{-1*}(\tau)\right)$$

Сформулируем закономерность при определении собственных значений матрицы $B^{(r)}(\tau,\varepsilon)$.

Теорема 5.1. Пусть дана эрмитова матрица $B^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ порядка n с собственными значениями $\nu_1^{(r)}(\tau,\varepsilon),\ \ldots,\ \nu_n^{(r)}(\tau,\varepsilon)$, определяемая по (5.11) из (3.31), (5.9) и (5.10) через эрмитовы матрицы простой структуры $D^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ и $F^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ одного и того же порядка m с собственными значениями $\alpha_1^{(r)}(\tau,\varepsilon),\ldots,\alpha_m^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ и $\beta_1^{(r)}(\tau,\varepsilon),\ldots,\beta_m^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ соответственно, причем $n=2m$. Тогда матрица $B^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ имеет простую структуру, а собственные значения $\nu_1^{(r)}(\tau,\varepsilon),\ \ldots,\ \nu_n^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ связаны с $\alpha_1^{(r)}(\tau,\varepsilon),\ldots,\alpha_m^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ и $\beta_1^{(r)}(\tau,\varepsilon),\ldots,\beta_m^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ следующим соотношением

$$\nu_\sigma^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\begin{cases}2\beta_\sigma^{(r)}(\tau,\varepsilon) & \text{при } \sigma\leqslant m\\ 2\alpha_{\sigma-m}^{(r)}(\tau,\varepsilon) & \text{при } \sigma>m\end{cases}; \tag{5.12}$$

где $\sigma=1,\ \ldots,\ n$.

Доказательство. Пусть $\chi^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ и $\eta^{(r)}(\tau,\varepsilon)$—невырожденные унитарные матрицы порядка m, приводящие соответственно матрицы

$D^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ и $F^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ к диагональному виду. Введем в рассмотрение матрицу

$$S^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\eta^{(r)}(\tau,\varepsilon); & \chi^{(r)}(\tau,\varepsilon)\\ \eta^{(r)}(\tau,\varepsilon); & -\chi^{(r)}(\tau,\varepsilon)\end{pmatrix} \tag{5.13}$$

Тогда

$$S^{(r)-1}(\tau,\varepsilon)\ B^{(r)}(\tau,\varepsilon)\ S^{(r)}(\tau,\varepsilon)=2\begin{pmatrix}\eta^{(r)*}(\tau,\varepsilon)\ F^{(r)}(\tau,\varepsilon)\ \eta^{(r)}(\tau,\varepsilon); & 0\\ 0; & \chi^{(r)*}(\tau,\varepsilon)\ D^{(r)}(\tau,\varepsilon)\ \chi^{(r)}(\tau,\varepsilon)\end{pmatrix} \tag{5.14}$$

Таким образом, невырожденная матрица $S^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ из (5.13) приводит матрицу $B^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ к диагональному виду. Следовательно, эрмитова матрица $B^{(r)}(\tau,\varepsilon)$ имеет простую структуру. Как видно из (5.14), соотношение (5.12) справедливо. Теорема доказана.

Пусть

$$\sigma^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\max_{j}\left[\ \mathrm{Re}\lambda_{\sigma}^{(r)}(\tau,\varepsilon),\ \mathrm{Re}\lambda_{s}^{(r)}(\tau,\varepsilon)\ \right] \tag{5.15}$$

где $\lambda_{s}^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{r}\varepsilon^{k}\lambda_{s}^{(k)}(\tau);\quad \lambda_{\sigma}^{(r)}(\tau,\varepsilon)=\sum\limits_{k=0}^{r}(-1)^{k+1}\varepsilon^{k}\lambda_{s}^{(k)}(\tau);$

$$j=\begin{cases} s & \text{при}\quad s\leqslant m\\ s-m & \text{при}\quad s>m\end{cases};$$

$j=1,\ldots\ldots, m$; $n=2m$ и, если области определения σ s обозначить соответственно через Ω_{σ} и Ω_{s}, то Ω_{σ} $\Omega_{s}\subset\{1,\ldots\ldots, n\}$ и $\Omega_{\sigma}\bigcap\Omega_{s}=\varnothing$.

Сформулируем условия устойчивости и неустойчивости невозмущенного процесса, представленного тривиальным решением уравнения (2.2) на заданном интервале времени $[t_0, T)$ по отношению к области предельных отклонений (5.2).

Теорема 5.2. Если для всех t, $t_*\in[t_0, T)$ выполняется условие

$$\int\limits_{\tau_*}^{\tau_1}\left\{\delta^{(r)}(\tau,\varepsilon)+2\varepsilon^{r+1}\max_{j}\left[\ \alpha_j^{(r)}(\tau,\varepsilon),\ \beta_j^{(r)}(\tau,\varepsilon)\ \right]\right\}d\tau<0; \tag{5.16}$$

где $\tau_*=\varepsilon t_*$; $\tau_1=\varepsilon t$; $j=1,\ \cdot\ \cdot\ \cdot, m$; то невозмущенный процесс (тривиальное решение уравнения (2 2.)) равномерно устойчив на заданном интервале времени $[t_0, T)$ по отношению к области (5. 2).

Теорема 5.3. Если в какой-либо момент $t_*\in[t_0, T)$ выполняется условие

$$\int\limits_{\tau_*}^{\tau_1}\left\{\delta^{(r)}(\tau,\varepsilon)+2\varepsilon^{r+1}\min_{j}\left[\ \alpha_j^{(r)}(\tau,\varepsilon),\ \beta_j^{(r)}(\tau,\varepsilon)\ \right]\right\}d\tau>0; \tag{5.17}$$

где $\tau_*=\varepsilon t_*$; $\tau_1=\varepsilon t$; $j=1,\ \cdot\ \cdot\ \cdot, m$; то невозмущенный процесс (тривиальное решение уравнения (2. 2)) не может быть равномерно устойчивым на интервале времени $[t_0, T)$ по отношению к области (5.2).

Из (2.3) и (5.5) следует, что доказательство теорем 5.2 и 5.3 непосредственно вытекает из рассуждений, приведенных в ходе доказательства условий устойчивости и неустойчивости процесса, изложенных в работах [7] и [8].

Применяя полученные результаты к уравнению (2.1), т. е. принимая в (5.16) и (5.17) $\varepsilon=1$, в качестве критерия равномерной устойчивости и неустойчивости невозмущенного процесса, можно предложить условия:

$$1.\ \sup[\delta^{(r)}_{(t)}+2\max_{j}(\alpha^{(r)}_{j}(t),\ \beta^{(r)}_{j}(t))]<0;$$

$t\in[t_0,\ T)$; $(j=1,\cdot\cdot\cdot,\ m)$—достаточное условие устойчивости;

$$2.\ \sup[\delta^{(r)}_{(t)}+2\min_{j}(\alpha^{(r)}_{j}(t),\ \beta^{(r)}_{j}(t))]<0;$$

$t\in[t_0,\ T)$; $(j=1,\cdot\cdot\cdot,\ m)$ — необходимое условие устойчивости;

$$3.\ \sup[\delta^{(r)}(t)+2\min_{j}(\alpha^{(r)}_{j}(t),\ \beta^{(r)}_{j}(t))]>0;$$

$t\in[t_0,\ T)$; $(j=1,\cdot\cdot\cdot\ m)$—достаточное условие неустойчивости;

$$4.\ \sup[\delta^{(r)}(t)+2\max_{j}(\alpha^{(r)}_{j}(t),\ \beta^{(r)}_{j}(t))]\geqslant 0;$$

$t\in[t_0,\ T)$; $(j=1,\cdot\cdot\cdot,\ m)$—необходимое условие неустойчивости
$\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$ (5.18)

Неравенства (5.18) не решают задачи об устойчивости, если в какой-либо момент $t_*\in[t_0,\ T)$

$$-2\min_{j}[\alpha^{(r)}_{j}(t_*),\ \beta^{(r)}_{j}(t_*)]\geqslant\delta^{(r)}(t_*)\geqslant-2\max_{j}[\alpha_j(t_*),\ \beta_j(t_*)] \tag{5.19}$$

где $j=1,\cdot\cdot\cdot\cdot,\ m$.

Беря последовательно $r=1,2,\cdot\cdot\cdot\cdot$, можно ожидать существенного сокращения ширины „полосы неопределенности". Как отмечено в [6] расчеты, проведенные для некоторых реальных объектов, показали, что уже при $r=1$ значения $\max\limits_{j}[\alpha^{(r)}_{j}(t),\ \beta^{(r)}_{j}(t)]$ и $\min\limits_{j}[\alpha^{(r)}_{j}(t),\ \beta^{(r)}_{j}(t)]$ весьма малы (порядка 10^{-2}, 10^{-3}) и „полоса неопределенности" практически стягивается в прямую линию.

Это обстоятельство, а также наличие равенств (3.1), (3.24) и рекуррентных соотношений (2.22), (2.23), (2.25), (2.27), (3.31), (5.10) и соотношения (5.12), существенным образом упрощающих схему расчетов для получения условий (5.18), позволяют рекомендовать приведенный алгоритм для приложений к решению прикладных задач.

Таким образом, сформулированы условия равномерной устойчивости и неустойчивости по отношению к заданной области предельных отклонений по уравнениям первого приближения для процесса, описываемого системой дифференциальных уравнений второго порядка с медленно меняющимися коэффициентами. При этом как построение области предельных отклонений, так и получение самих условий устойчивости реализовано без приведения исследуемой системы уравнений к нормальному виду, при котором порядок матрицы линейной части удваивается. Это обстоятельство позволило получить условия равномерной устойчивости, оперируя матрицами вдвое меньшего порядка по сравнению с общепринятыми методами, где в качестве исходной рассматривается система дифференциальных уравнений в нормальном виде.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Абгарян К. А.* Асимптотическое расщепление уравнений линейной системы автоматического управления, Доклады АН СССР, 166, № 2, 1966.

Абгарян К. А. Метод асимптотического расщепления системы линейных дифференциальных уравнений, Известия АН АрмССР, серия «Математика», № 2, 1966.

Абгарян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем, М., Наука, 1973.

Боголюбов Н. Н. О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, 1945.

Лебедев А. А. О применении метода «замороженных коэффициентов» для исследования устойчивости неустановившегося движения, Изв. ВУЗов, Авиационная техника, № 1, 1958.

Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николаенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений, Киев, 1966.

Хачатрян С. Т. Некоторые условия равномерной устойчивости движения на заданном интервале времени, Известия АН АрмССР, серия технических наук, № 2, 1973.

Хачатрян С. Т. Об устойчивости движения на заданном интервале времени, Известия АН АрмССР, № 3, 1974.

Ս. Թ. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ԴԱՆԴԱՂ ՓՈՓՈԽՎՈՂ ԳՈՐԾԱԿԻՑՆԵՐՈՎ ԵՐԿՐՈՐԴ ԿԱՐԳԻ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՀԱՄԱԿԱՐԳԻ ՄԻՋՈՑՈՎ ՆԿԱՐԱԳՐՎՈՂ ՊՐՈՑԵՍԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱՉԱՓ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Հոդվածում բերվում է տրված ժամանակամիջոցում շարժման կայունության սահմանումը և ձևակերպվում է երկրորդ կարգի դանդաղ փոփոխվող գործակիցներով դիֆերենցիալ հավասարումների համակարգով նկարագրվող պրոցեսի կայունության և անկայունության պայմանները, գրգռումների փոփոխման տրված տիրույթի նկատմամբ։ Նշված պայմանները ստացված են անմիջականորեն, առանց սիստեմը նորմալ տեսքի բերելու։ Այդ պատճառով զգալիորեն պարզեցվում է հաշվարկման ալգորիթմը, որովհետև կայունության և անկայունության պայմանները ստացվում են երկու անգամ փոքր կարգ ունեցող մատրիցների միջոցով։