Л. Г. КАНКАНЯН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В СРЕДЕ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Как известно [1], среди эффективных методов воздействия на продуктивный пласт можно отметить следующие: торпедирование забоев скважин, применение кислотных обработок скважин и гидроразрыв пластов. Однако метод торпедирования может создавать трещиноватость только в ограниченной зоне и применим главным образом для весьма плотных пород. Метод обработки забоев скважин соляной кислотой также основан на искусственном повышении проницаемости пласта и этот метод наиболее близок к методу гидравлического разрыва пластов. Сущность метода гидравлического разрыва пластов заключается в том, что на забоях скважин создаются высокие давления, превышающие в 1,5—2 раза гидростатический напор жидкости, в результате чего пласт расслаивается или в нем образуются трещины. В настоящем параграфе мы будем рассматривать вибровоздействия на пласт и распространение звуковых волн в продуктивном пласте.

Исходными уравнениями, описывающими распространение звуковых волн в пласт (пласт, среда с переменной плотностью) будут уравнения непрерывности и уравнения движения Эйлера, которые в одномерном случае имеют вид:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+v\frac{\partial\rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}+0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+v\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0$$

Все величины, входящие в (1.1) ρ—плотность, v —скорость, p—давление, являются функциями x и t. x—пространственная координата, t—время. Прежде чем перейти к решению системы (1.1), рассмотрим характеристики системы и некоторые соотношения на них. Для удобства, запишем систему (1.1) в матричной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\rho\\ v\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v & \rho\\ c^2/\rho & v\end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix}\rho\\ v\end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Так как в (1. 2) $\rho=\rho(x, t)$ и $V=v(x, t)$, $p=\varphi(\rho)$, то

$$d\rho=\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dt+\frac{\partial\rho}{\partial x}\,dx;\quad dv=\frac{\partial v}{\partial t}\,dt+\frac{\partial v}{\partial x}\,dx. \tag{1.3}$$

С учетом (1.2) и (1.3) система может быть записана в виде:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & v & \rho \\ 0 & 1 & C_n\rho^{n-2} & v \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial\rho}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ d\rho \\ dv \end{vmatrix} \tag{1.4}$$

Уравнения характеристики для (1.4) имеют вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & V & \rho \\ 0 & 1 & C_n\rho^{n-2} & V \\ dt & 0 & dx & 0 \\ 0 & dt & 0 & dx \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 - 2\frac{dx}{\partial t} + \left(v^2 - C_n\rho^{n-1}\right) = 0$$

Здесь $\frac{\partial p}{\partial x}$ заменили на

$$\frac{\partial\rho}{\partial x},\ \frac{\partial\rho}{\partial x} = c^2\frac{\partial\rho}{\partial x},\ c^2 = \frac{d\rho}{d\rho} = \varphi^1(\rho).$$

Кроме того, ввели в качестве зависимости между p и ρ уравнение политроны: [11]

$$P = a\rho^n,\ \frac{dp}{d\rho} = c^2 n\rho^{n-1};\ \frac{c}{\rho} = \sqrt{na}\ \rho^{(n-3)/2}$$

Таким образом, в качестве характеристик мы получим:

$$dx = (v \pm \sqrt{c\rho^{n-1}})\ dt$$

Перейдем теперь к получению соотношений на характеристиках для (1.4)

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & V & \rho & 0 \\ 0 & 1 & C_n\rho^{n-2} & v & 0 \\ dt & 0 & dx & 0 & d\rho \\ 0 & dt & 0 & dx & dv \end{vmatrix} \tag{1.5}$$

Требуем, чтобы ранг матрицы (1.5) был равен рангу матрицы, составленной из ее первых четырех столбцов, следовательно, должен быть равен нулю определитель матрицы, составленной из произвольных четырех столбцов

$$\begin{vmatrix} 0 & V & \rho & 0 \\ 1 & C_n\rho^{n-2} & V & 0 \\ 0 & dx & 0 & d\rho \\ dt & 0 & dx & dv \end{vmatrix} = 0 \tag{1.6}$$

Из (1.6) после несложных преобразований получим уравнение

$$\rho\left(V \pm c^{\frac{1}{2}} n\, \rho^{\frac{n-1}{2}}\right)\frac{dv}{d\rho} \mp c^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{n-1}{2}}\left(V \pm c^{\frac{2}{2}}{}_{n}\rho^{\frac{n-1}{3}}\right)=0 \tag{1.7}$$

Решением нелинейного уравнения первого порядка с частными производными (1.7) является функция

$$V=\frac{2}{n-1}\, c^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{n-1}{2}}, \quad n\neq 1$$

Это решение годится в неизотермическом случае, где показатель политропии $n\neq 1$ (в изотермическом случае $n=1$).

Заметим, что система (1.1) является нелинейной системой дифференциальных уравнений первого порядка, в которых независимые переменные явно не входят в коэффициенты уравнения. Следуя методу Римана, перейдем к новым независимым переменным V, ρ, т. е. $t=t(V, \rho)$, $x=x(V,\rho)$, при этом покажем, что система (I.I) преобразуется в линейную систему

$$dt=\frac{\partial t}{\partial v}dv+\frac{\partial t}{\partial \rho}d\rho, \qquad dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial t}dt \tag{1.8}$$

$$dx=\frac{\partial x}{\partial v}dv+\frac{\partial x}{\partial \rho}d\rho, \qquad d\rho=\frac{\partial \rho}{\partial x}dx+\frac{\partial \rho}{\partial t}dt$$

или

$$dt=\frac{\partial t}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial t}dt\right)+\frac{\partial t}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}dx+\frac{\partial \rho}{\partial t}dt\right),$$

$$dx=\frac{\partial x}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial t}dt\right)+\frac{\partial x}{\partial \rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}dx+\frac{\partial \rho}{\partial t}dt\right). \tag{1.9}$$

Из (1.9) получим следующие системы для определения

$$\frac{\partial v}{\partial x};\ \frac{\partial v}{\partial t};\ \frac{\partial \rho}{\partial x};\ \frac{\partial \rho}{\partial t};$$

$$\frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial t}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}=1 \qquad \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}=1$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial x}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial t}=0 \qquad \frac{\partial t}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial \rho}\frac{\partial \rho}{\partial x}=0 \tag{1.10}$$

Учитывая уравнение политроны, т. е. $p=\frac{p_0}{\rho_0^n}\rho^n$, система (1. 1) будет иметь вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+v\frac{\partial \rho}{\partial x}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial x}v+c\rho^{n-2}\frac{\partial \rho}{\partial x}=0, \quad \text{где } C=\frac{p_{0}n}{\rho_0^n}.$$

Из системы (1.10) находим частные производные U_t, V_x, ρ_t, ρ_x (индексы справа внизу означают частные производные)

$$V_t=\frac{x_\rho}{\Delta},\quad V_x=-\frac{t_\rho}{\Delta},\quad \rho_t=-\frac{x_v}{\Delta},\quad \rho_x=\frac{t_v}{\Delta},\ \text{где}\ \Delta=t_v x_\rho-t_\rho x_v\neq 0$$

Равенство $\Delta=0$ означало бы линейную зависимость между ρ и V в силу (1.1) такая зависимость исключена. Подставляя эти значения в (1.1), получим:

$$\frac{\partial x}{\partial v}-V\frac{\partial t}{\partial v}+\rho\frac{\partial t}{\partial \rho}=0 \qquad (1.11)$$

$$\frac{\partial x}{\partial \rho}-V\frac{\partial t}{\partial \rho}+c\rho^{n+2}\ \frac{\partial t}{\partial v}=0$$

Из второго уравнения (1.11) имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(x-vt)=-c\rho^{n-2}\ \frac{\partial t}{\partial v}=\frac{\partial^2 w}{\partial\rho\partial v}. \qquad (1.12)$$

В (1.12) введена новая переменная $W(\rho, v)$, через которую x,t могут быть выражены следующим образом:

$$x-vt=\frac{\partial w}{\partial v},\quad t=-c^{-1}\rho^{-(n-2)}\ \frac{\partial w}{\partial \rho}. \qquad (1.13)$$

Функция $W(\rho, v)$ удовлетворяет второму уравнению системы (1.11). Действительно, из уравнения (1.12) с учетом (1.13) имеем тождество

$$\frac{\partial^2 W}{\partial v\partial\rho}=\frac{\partial^2 w}{\partial\rho\partial v}.$$

Рассмотрим первое уравнение системы (1.11). Запишем его в виде:

$$\frac{\partial}{\partial v}(x-vt)+t+\rho\frac{\partial t}{\partial \rho}=0 \qquad (1.14)$$

Подставляя (1.13) в уравнение (1.14) получим:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}-\frac{1}{c}\rho^{3-n}\ \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}+\frac{n-3}{c}\rho^{2-n}\ \frac{\partial w}{\partial \rho}=0 \qquad (1.15)$$

Если предполагать, что является медленно меняющейся функцией ρ, т. е. $\left|\frac{\partial w}{\partial \rho}\right|>\left|\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}\right|$, то при малых плотностях ρ уравнение (1.15) переходит в уравнение параболического типа, которое было рассмотрено в [1].

Пусть $v=\eta$, $\xi=\rho^\gamma$, γ—произвольная константа, тогда

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2};\quad \frac{\partial w}{\partial \rho}=\frac{\partial w}{\partial \xi}\ \frac{\partial \xi}{\partial \rho};\quad \frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \rho}\right)^2+\frac{\partial w}{\partial \xi}\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial \rho^2}.$$

При этом уравнение (1.15) после очевидных преобразований примет вид:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}-\frac{1}{c}\rho^{3-n}\ \gamma^2\rho_2{}^{(\gamma-1)}\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}-\frac{1}{c}\ \rho^{3-n}\ \gamma(\gamma-1)\times\rho^{\gamma-2}\frac{\partial w}{\partial \xi}+\frac{n-3}{c}\rho^{2-n}\gamma\rho^{\gamma-1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi}=0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}-\frac{\gamma^2}{c}\rho^{2\gamma-n+1}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}-\frac{(\gamma-1)\gamma}{c}\rho^{\gamma-n+1}\frac{\partial w}{\partial\xi}+\frac{\gamma(n-3)}{c}\rho^{\gamma-n+1}\frac{\partial w}{\partial\xi}=0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}-\frac{\gamma^2}{c}\rho^{2\gamma-n+1}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\frac{\gamma(n-3)-\gamma(\gamma-1)}{c}\rho^{\gamma-n+1}\frac{\partial w}{\partial\xi}=0$$

Выбираем γ так, чтобы $2\gamma-n+1=0$, отсюда $\gamma=\frac{n-1}{2}$. После подстановки значения γ окончательно получим:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}-\frac{(n-1)^2}{4c}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\frac{(n-1)(n-3)}{4c}\frac{1}{\xi}\frac{\partial w}{\partial\xi}=0 \tag{1.16}$$

Обозначим $\tau=\frac{2\sqrt{c}}{n-1}\xi$, тогда уравнение (1.16) примет вид

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}+\left(\frac{n-3}{n-1}\right)\frac{1}{\tau}\frac{\partial w}{\partial\tau}=0 \tag{1.17}$$

Уравнение (1.17) допускает разделение переменных вида: $W=\Phi(\eta)\varphi(\tau)$. Подставляя в (1.17) $w=\Phi\cdot\varphi$, получим уравнения относительно Φ и φ

$$\frac{d^2\Phi}{d\eta^2}+\lambda^2\Phi=0,\quad \frac{d^2\varphi}{d\tau^2}-\frac{\gamma}{\tau}\frac{d\varphi}{d\tau}+\lambda^2\varphi=0,\quad \gamma=\frac{n-3}{n-1} \tag{1.18}$$

Из первого уравнения (1.18) следует, что функция Φ при любом вещественном $\lambda\neq0$, имеет колеблющееся периодическое решение. Фундаментальной системой решений для этого уравнения являются функции $Sin\lambda\eta$ и $Cos\lambda\eta$. Второе уравнение системы (1.18) при $\gamma=0$ имеет ту же фундаментальную систему решений, что и Φ, лишь с тем отличием, что вместо η должно быть τ, т. е. решения в этом случае тоже осциллирующие.

Рассмотрим случай, когда $\gamma\neq0$. Известно [3], что инвариантом уравнения является функция вида: $I=\lambda^2-\frac{\gamma^2+2\gamma}{4\tau^2}$

Решением уравнения является функция Бесселя $\frac{\gamma+1}{2}$ порядка, т.е. $\tau^{\frac{\gamma+1}{2}}Z_{\frac{\gamma+1}{2}}\left(\lambda\sqrt{\tau}\right)$ в этом случае имеем апериодическое решение. При $\gamma=0$ функция Бесселя выражается через элементарную функцию и фундаментальной системой решений являются функции $\frac{sin\lambda\tau}{\sqrt{\tau}}$, $\frac{Cos\lambda\tau}{\sqrt{\tau}}$. Решение и в этом случае имеет колеблющийся характер.

Теперь перейдем к физической природе движения. Для наглядности преобразуем второе уравнение системы (1.1), учитывая, что

$$\frac{dp}{dx}=\frac{\partial p}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\quad\text{и}\quad\frac{dp}{d\rho}=c^2,\quad\frac{dp}{dx}=c^2\frac{\partial\rho}{\partial x}.$$

Обозначим $\mu = \int\limits_0^\rho \frac{c}{\rho} d\rho,$

$$\frac{d\mu}{d\rho} = \frac{c}{\rho}.$$

Положим

$$R = \frac{1}{2}\left(\mu + v\right) \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^\rho \frac{c}{\tilde{\rho}} d\tilde{\rho} + v\right), \tag{1.19}$$

$$S = \frac{1}{2}\left(\mu - v\right) = \frac{1}{2}\left(\int\limits_0^\rho \frac{c}{\tilde{\rho}} d\tilde{\rho} - v\right),$$

Заметим, что (1. 19) являются характеристиками уравнения

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + V\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + V\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} = 0 \tag{1.1'}$$

Найдем частные производные R_t, R_x, S_t и S_x. Из (1.19) имеем:

$$R_t = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} + V_t\right); \quad R_x = \frac{1}{2}\Big)\frac{c}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + V_x\Big),$$

$$S_t = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} - V_t\right); \quad S_x = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} - V_x\right). \tag{1.20}$$

Рассмотрим выражение:

$$R_t + (v+c)\,R_x \quad \text{и} \quad S_t + (v-c)\,S_x,$$

$$R_t + \left(v+c\right)R_x = \frac{1}{2}\left(\frac{c}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t}\right) + \frac{1}{2}\left(v+c\right)\left(\frac{c}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{c}{2\rho}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\rho}{c}\frac{\partial v}{\partial t} + \left(v+c\right)\frac{\partial\rho}{\partial t} + \left(v+c\right)\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\rho}{c}\right\} = \frac{c}{2\rho}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + V\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\rho}{c}\left[\frac{\partial v}{\partial t} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + V\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right)\right\},$$

$$S_t + \left(v-c\right)S_x = \frac{c}{2\rho}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial t} + V\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\rho}{c}\left[\frac{\partial v}{\partial t} + V\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}\right]\right\}.$$

Правые части этих выражений равны нулю в силу (1.1′), т. е.

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \left(v+c\right)\frac{\partial R}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \left(v-c\right)\frac{\partial S}{\partial x} = 0,$$

или в матричном виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}+\left(v\pm c\right)\frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix}=0. \tag{1.21}$$

Учитывая, что в (1.21) $R=R(t, x)$, $S=S(t, x)$, имеем:

$$dR=\frac{\partial R}{\partial x}dx+\frac{\partial R}{\partial t}dt \quad \text{и} \quad \frac{ds}{\partial x}dx+\frac{\partial S}{\partial t}dt$$

подставляя значения R_t и S_t, получим:

$$\frac{dR}{dt}=\frac{\partial R}{\partial x}\left[\frac{dx}{dt}-\left(v+c\right)\right], \tag{1.22}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{\partial s}{\partial x}\left[\frac{dx}{dt}-\left(v-c\right)\right].$$

Из (1.22) следует, что определенное значение R или S распространяется со скоростью

$$\frac{dx}{dt}=v+c \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dt}=v-c. \tag{1.23}$$

Если $|v|<c$, то R распространяется в сторону возрастная x, а S в в сторону убывания, причем оба движения происходят с переменными скоростями. Если в частности предположим, что в начальном состоянии имеется возмущение давления в узком интервале оси x, тогда из него будут исходить две волны уплотнения. Причем форма волны не будет сохраняться и тронт волны будет делаться более крутым, так как в силу (1.23) большие плотности будут распространяться с большими скоростями [21]. Будет происходить постепенный переход волны уплотнения в скачок уплотнения.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Максимович Г. К.* Гидравлический разрыв нефтяных пластов, Гостехиздат, 1957.

2 *Канканян Л. Г.* Определение оптимального управления в нелинейной задаче экстремального регулирования при случайных воздействиях.—Автоматика и телемеханика, 1978, № 9.

3 *Зоммерфельд А.* Механика деформируемых сред, М., ИЛ, 1954.

Լ. Գ. ՔԱՆՔԱՆՅԱՆ

ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ԽՏՈՒԹՅԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՁԱՅՆԱՅԻՆ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՏԱՐԱԾՈՒՄԸ.

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում է փոփոխական խտություն ունեցող միջավայրում ձայնային ալիքի տարածման ոչ գծային խնդիրը։ Օգտվելով Ռիմանի եղանակից ոչ գծային խնդիրը բերվում է գծային խնդրի։ Փոփոխական գործակիցներով գծային հավասարման լուծումը հնարավորություն է տալիս որոշելու այն տիրույթները, որտեղ տեղի է ունենում պարբերական և ոչ պարբերական լուծումներ։