И. Н. КАРАБАН

УЧЕТ НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ПАРАМЕТРОВ ОГРАНИЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Значительные трудовые, материальные и энергетические затраты, связанные с определением точных значений параметров ограничений, часто не позволяют иметь достаточно точные значения этих величин.

Если в первом приближении пренебречь неоднозначностью параметров оптимизируемой целевой функции, то можно сформулировать ряд важных прикладных задач, например:

—получение области оптимальных решений, соответствующей заданной области возможных значений параметров ограничений;

—определение области параметров ограничений, для которой все оптимальные решения остаются в заданной окрестности оптимального проектного решения:

—идентификация множества ограничений задачи, существенное изменение которых оставляет неизменным оптимальное проектное решение.

Теория линейного программирования [1], а также некоторые дополнительные математические модели способствуют эффективному решению перечисленных задач.

Построение области оптимальных решений сводится к анализу решений системы линейных алгебраических уравнений, определяющих оптимальное проектное решение. Эти уравнения формируются из ограничений задачи линейного программирования

$$\max_{z\{z_i\}} \sum_{i=1}^{m} c_i\, z_i \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, z_i \leqslant u_j, \quad j=\overline{1,n} \tag{2}$$

где $\{z_i\}$—искомое решение;

c_i—точные параметры целевой функции;

a_{ij}, u_j—приближенные параметры ограничений.

Номера m ограничений, входящих в систему линейных уравнений, определяются составом небазисных свободных переменных (они равны нулю) в симплекс-таблице, определяющей оптимальное решение при фиксированных проектных значениях параметров ограничений. Поскольку число свободных переменных n может быть больше числа компонентов вектора z (т. е. $n>m$), то в число небазисных переменных может входить часть компонентов вектора z. Обозначая через $j_1, j_2, \cdots, j_p$ ($p\leqslant m$) номера ограничений, соответствующих небазисным свободным переменным, и полагая равными нулю $m-p$ небазисных компонентов вектора z после соответствующего переобозначения компонентов z приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ij}^{0} z_i = u_j^{0}, \quad j=j_1, j_2, \cdot \cdot \cdot, j_p. \tag{3}$$

где a_{ij}^0, u_j^0 —проектные значения параметров ограничений. Решением (3) является z^0—оптимальное проектное решение.

Определение области решений системы уравнений

$$\sum_{i=1}^{p} a_{ij} z_i = u_j, \quad j=j_1, j_2, \cdot \cdot \cdot, j_p \tag{4}$$

на первом этапе сводится к оптимизационной задаче вида

$$\max_z z_i \qquad (\text{или } \min_z z_i) \qquad i=\overline{1,r}$$

при ограничениях (4), а также с учетом ограничений

$$\varphi(a,u)\leqslant 0, \qquad a\{a_{ij}\}, \qquad \varphi(\cdot)—d \text{ функция}$$

учитывающих вариации параметров ограничений. После определения значений компонентов вектора z одну из них удобно зафиксировать и определить при каждом фиксированном значении предельные значения остальных р—1 компоненты. Это дает возможность построить проекцию искомой области решений в пространстве пар учитываемых компонентов вектора z.

Не исключено, что из-за значительных вариаций параметров ограничений оптимальное решение не будет наохдиться в полученной области $w(z)\leqslant 0$, так как значения целевой функции окажутся большими в одной из точек, смежных к точке оптимума, координаты которой меняются при изменении параметров ограничений. Исключение такой ситуации достигается при выполнении сформулированных ниже условий.

Пусть z^1, z^2, $\cdot \cdot \cdot$, z^m—координаты вершин, смежных к z^0, при проектных значениях исходных данных.
Тогда упомянутые достаточные условия приобретают следующий вид:

$$F>Fj, \qquad j=\overline{1,m}$$

где
$$Fj=\max_z \sum_{i=1}^{m} c_i z_i$$

при условии $wj(z)\leqslant 0$;

$$F=\min_z \sum_{i=1}^{m} c_i z_i$$

при условии $w(z)\leqslant 0$;

$wj(z)\leqslant 0$—область возможных значений j-й смежной вершины. Функции $wj(z)$ могут быть получены так же как и $w(z)$.

Геометрическая иллюстрация сформулированных условий применительно к двумерному случаю дана на рис. 1. Она соответствует отсутствию общих точек у трех областей

$$w_1(z)\leqslant 0, \quad w_2(z)\leqslant 0, \quad w(z)\leqslant 0.$$

Следует отметить, что простота построения области оптимальных решений в рассмотренном случае связана с возможностью однозначного выделения ограничений, которыми определяется оптимальная точка. Втом случае, когда оптимальная точка в силу неоднозначности параметров ограничений может переходить в одну из смежных вершин, не удается реализовать столь простой алгоритм определения области оптимальных решений, так как заранее не известен набор ограничений, определяющих оптимальную точку.

Синтез области параметров ограничений, при которых оптимальное решение остается в заданной окрестности точки z^0 на первом этапе сводится к экстремальным задачам вида

$$\max_{z,a,u} a_{ij} \quad (\text{или } \min_{z,a,u} a_{ij}) \tag{5}$$

при условиях (4), а также с учетом ограничений

$$\varphi_1(a,u) \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \|z(a,\ u)-z^0\| \leqslant \delta$$

где $\|\cdot\|$ — подходящая норма;

$\varphi_1(\cdot)$ — к вектор функция, учитывающая ограничения на векторы a и u.

Если заданы ограничения на параметры a_{ij} то решаются задачи вида

$$\max_{z,a,u} u_j \quad \text{или} \quad (\min_{z,a,u} u_j) \tag{6}$$

при ограничениях (4), а также с учетом аналогичных ограничний

$$\varphi_2(a,u) \leqslant 0, \qquad \|z(a,u)-z^0\| \leqslant \delta.$$

Заметим, что в общем случае попытки одновременного определения области двух параметров в любом уравнении (1) приводят к неограниченной области, что не имеет практического значения. Поэтому ограничения $\varphi_1(a,u) \leqslant 0$ и $\varphi_2(a,u) \leqslant 0$ должны учитывать предельно допустимые вариации всех параметров.

Для наглядности область параметров удобно представлять в виде проекций в пространстве пар компонентов векторов a и u. Для этого по аналогии с вышеизложенной схемой необходимо решить ряд задач вида (5) и (6) после фиксации соответствующей компоненты векторов a или u.

Рассмотренный выше подход к определению области параметров относится только к параметрам активных ограничений, т. е. ограничений непосредственно влияющих на оптимальное решение. Что касается параметров других ограничений, то из расчетной практики известно, что в большинстве случаев они могут изменяться в очень широких пределах не влияя при этом наоптимальное решение.

В общем случае область параметров к-го ограничения вида (2) $(1 \leqslant k \leqslant n)$ может быть очень широкой, так как она определяется неравенством.

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\, z_i^0 \leqslant u_k, \tag{7}$$

в котором роль параметров играют составляющие оптимального проектного решения z_i^0. Смысл неравенства (7) состоит в том, что оптимальное решение z^0 не меняется до тех пор пока параметры активных ограничений постоянны, а параметры неактивных ограничений постоянны, а параметры неактивных ограничений изменяются так, что только z_0 удовлетворяет всем этим ограничениям.

К сожалению, на практике не всегда удается выбрать параметры ограничений с учетом (7). Это связано с тем, что форма области (7) зависит от оптимального проектного решения z^0 которое может быть получено только в результате оптимизации целевой функции (1) при ограничениях (2). Так как оптимальное решение z^0 определяет и состав активных ограничений, то они также не могут быть известны до решения оптимизационной задачи. Таким образом, существенное сокращение затрат на сбор достаточно точной информации при проектировании новой системы остается под вопросом, так как попытки использовать недостаточно точную информацию на стадии первоначального отыскания оптимального решения могут привести к существенным погрешностям. Несмотря на это ограничение (7) в сочетании с дополнительными ограничениями на параметры a_{ij} и u_j могут быть эффективно использованы в процессе анализа допустимых изменений в системе в процессе ее эксплуатации или реконструкции, когда необходимо сохранить неизменным оптимальный режим функционирование системы.

ЛИТЕРАТУРА

1 *Г. Оуэн.* Теория игр. М., Мир, 1971.

Ի. Ն. ԿԱՐԱԲԱՆ

ԳԾԱՅԻՆ ԾՐԱԳՐԱՎՈՐՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿՈՒՄՆԵՐԻ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՈՉ ՄԻԱՆՇԱՆՈՒԹՅԱՆ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկվում են օպտիմիզացիոն մոդելների անալիզի և սինթեզի ալգորիթմները գծային ծրագրավորման խնդրի սահմանափակումների պարամետրերի ոչ միանշանության պայմաններում։